Московский физико-технический институт

Иррациональные уравнения и неравенства.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

В этой работе мы рассмотрим основные методы и приёмы решения иррациональных уравнений. Как правило все эти методы заключаются в анализе функций, стоящих в разных частях уравнений, исследование их на непрерывность, монотонность, дифференцируемость, выпуклость, периодичность итак далее. В некоторых случаях полученное уравнение упрощается путём введения специальных замен, о чём будет сказано ниже, либо сводятся к некоторым функциональным уравнениям. Отдельное внимание нужно уделить специальным тригонометрическим заменам, ибо их использование в решение задачи, может её максимально упростить. Рассмотрим теперь некоторые примеры замен.

Тригонометрическая подстановка.

От иррациональностей вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ можно избавиться, делая замены неизвестной $x = a\sin t$, $x = \dfrac{a}{\sin t}$, $x = a \operatorname{tg} t$, соответственно. Действительно, в выражении $\sqrt{a^2-x^2}$(считая, что $a > 0$) область допустимых значений неизвестной x представляет свой отрезок $[-a; a]$. Множество значений функции $x(t) = a\sin t$ есть такой же отрезок. Поэтому можно сделать замену $x = a\sin t$, при этом иррациональность уничтожается: $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cdot|\cos t|$. Ограничив допустимые значения неизвестной t условием $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, можно отбросить и знак модуля (т.к. $\cos t \geqslant 0$). Таким образом, $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Задача №1. Решить уравнение:

$$(4x-\sqrt{3})\sqrt{1-x^2} = x$$

Решение:

1) ОДЗ $x \in [-1; 1]$, значит можно положить $x = \sin t$, $t \in [-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}] \Rightarrow (4\sin t-\sqrt{3})\cos t = \sin t \Leftrightarrow 2\sin 2t = \sin t + \sqrt{3}\cos t \Leftrightarrow \sin 2t = \sin(t+\dfrac{\pi}{3}) \Rightarrow t_1 = -\dfrac{4}{9}\pi\ t_2 = \dfrac{2}{9}\pi\ t_3 = \dfrac{1}{3}\pi \Rightarrow x_1 = \sin(-\dfrac{4}{9}\pi),\ x_2 = \sin\dfrac{2}{9}\pi, x_3 = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\left\{\ \sin\left(-\dfrac{4}{9}\pi\right);\ \sin\left(\dfrac{2}{9}\pi\right); \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Задача №2. Решить уравнение:

$$x+\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}(2x^2-1)$$

Решение:

ОДЗ: $x \in [-1;1]$ сделаем замену $x = \cos\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, тогда уравнение примет вид: $\cos\alpha + |\sin\alpha| = \sqrt{2}(2\cos^2\alpha - 1)$, т.к. $\alpha \in [0;\pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$, имеем: $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \Leftrightarrow$ $(\cos\alpha + \sin\alpha)(\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = -1 \\ \sin(\alpha - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \\ \alpha = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

т.к. $0 \leq \alpha \leq \pi$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{3}{4}\pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{12} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \cos\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \dfrac{\pi}{12} \end{array}\right.$, откуда получаем ответ.

Ответ: $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos\frac{\pi}{12}\}$.

Различные варианты замены переменной.

Рассмотрим задачи, связанные с биквадратным уравнением: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$, которое решается с помощью замены $x^2 = t$.

Задача №3. Решить уравнение: $\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{6}{x^2 - 2x} - 12 = 0$

Решение:

Преобразуем это уравнение к виду: $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 1} - \dfrac{6}{x^2 - 2x} - 12 = 0$, положим $x^2 - 2x = t \Rightarrow$ $\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{6}{t} - 12 = 0 \Leftrightarrow 12t^2 + 17t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -\dfrac{3}{4}$ или $t_2 = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 2x = -\dfrac{3}{4}$ или $x^2 - 2x = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $x_1 = \dfrac{1}{2};\ x_2 = \dfrac{3}{2};\ x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3};\ x_4 = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\right\}$.

Задача №4. Решить уравнение: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

Решение:

Преобразуем это уравнение следующим образом: $((x+3)(x+8))((x+2)(x+12)) = 4x^2 \Rightarrow (x^2 + 11x + 24)(x^2 + 14x + 24) = 4x^2 \Rightarrow (x + 11 + \dfrac{24}{x})(x + 14 + \dfrac{24}{x}) = 4$, и сделаем замену: $x + 11 + \dfrac{24}{x} = t$, $x + 11 + \dfrac{24}{x} = t + 3 \Rightarrow t(t+3) = 4 \Rightarrow t_1 = -4$ или $t_2 = 1 \Rightarrow x^2 + 11x + 24 = -4x$ или $x^2 + 11x + 24 = x \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2};\ x_{3,4} = -6; -4$

Ответ: $\left\{-6;\ -4; \dfrac{-12 \pm \sqrt{129}}{2}\right\}$.

Задача №5. Решить уравнение: $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$

Решение:

Так как $x=0$ не является решением уравнения, то разделим левую и правую часть уравнения на x^2, получим: $\dfrac{(x^2-2x+2)^2}{x^2}+3\dfrac{(x^2-2x+2)}{x}=10$, положим $\dfrac{x^2-2x+2}{x}=t\Rightarrow t^2+3t=10$ $t_1=2;\ t_2=-5\Rightarrow x^2-2x+2=2x$ или $x^2-2x+2=-5x\Rightarrow x_{1,2}=4\pm\sqrt{2};\ x_3=-1;\ x_4=-2$

Ответ: $\{-2;\ -2;\ 4\pm\sqrt{2}\}$.

Задача №6. Решить уравнение: $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$

Решение:

Сделаем здесь следующую замену: $t=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\Rightarrow 3\left(t^2+\dfrac{8}{3}\right)=10t\Leftrightarrow 3t^2-10t+8=0\Rightarrow t_1=2;\ t_2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow x^2-12=6x$ или $x^2-12=4x\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{21};\ x_2-2;x_3=6$

Ответ: $\{-2;6;3\pm\sqrt{21}\}$.

Задача №7. Решить уравнение: $7\ x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0$

Решение:

Так как $x=0$ не является решением, то разделим это уравнение на x^2, получим: $\dfrac{x^4}{x^2}-3\dfrac{x^3}{x^2}-8+\dfrac{12}{x}+\dfrac{16}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2-3x-8+\dfrac{12}{x}+\dfrac{16}{x^2}=0$ или $x^2+\dfrac{16}{x^2}-3(x-\dfrac{4}{x})-8=0$, положим теперь $t=x-\dfrac{4}{x}\Rightarrow t^2-3t=0\Rightarrow t=0$ или $t=3\Rightarrow x^2-4=0$ или $x^2-4=3x\Rightarrow x_{1,2}=\pm2;x_3=4;\ x_4=-1$

Ответ: $\{-1;\ 4;\ \pm2\}$.

Задача №8. Решить уравнение: $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40$

Решение:

Представим это уравнение в следующем виде: $x^2+\dfrac{(9x)^2}{(x+9)^2}=40\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{9x}{x+9}\right)^2+18\dfrac{x^2}{x+9}=40\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2}{x+9}\right)^2+18\dfrac{x^2}{x+9}=40$, теперь положим: $t=\dfrac{x^2}{(x+9)}\Rightarrow t^2+18t-40=0\Rightarrow t_1=2;\ t_2=-20\Rightarrow x^2=2x+18$ или $x^2=-20x-180\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$;

Ответ: $\{1\pm\sqrt{19}\}$.

Уравнение вида: $a^4+b^4=(a+b)^4$

Преобразуем выражение $a^4+b^4=(a+b)^4\Rightarrow a^4+b^4=(a^2+b^2+2ab)\cdot(a^2+b^2+2ab)=a^4+b^4+\underbrace{2a^2b^2+4a^3b+4ab^3+4a^2b^2}_{\equiv 0}$

Очевидно, что тождество будет верным, когда $6a^2b^2+4a^3b+4ab^3=0\Leftrightarrow 2ab(3ab+2a^2+2b^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ 3ab+2a^2+2b^2=0\end{array}\right.$

Задача №9. Решить уравнение: $(x+1)^4+(x+3)^4=16(x+2)^4$

Решение:

Преобразуем это уравнение: $(x+1)^4+(x+3)^4=(2(x+2))^4=(2x+4)^4$. Пусть $a=x+1$, $b=x+3$, тогда уравнение эквивалентно: $\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+3=0 \\ 2(x+1)^2+3(x+1)(x+3)+2(x+3)^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1;\ -3\}$.

Сведение иррационального уравнения к системе уравнений.

Задача №10. Решить уравнение: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Решение:

Пусть $\begin{cases} x^3+1=2y \\ 2x-1=y^3 \end{cases}$, тогда уравнение примет вид: $x^3-y^3+1=2y-2x+1 \Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=-2(x-y)$, откуда следует, что если $x-y\neq 0$, то $x^2+xy+y^2=-2\Rightarrow$, следовательно, $x=y\Rightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$ $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; $x_3=1$

Ответ: $\left\{1; \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Задача №11. Решить уравнение: $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-3}=3$

Решение:

Пусть $u=\sqrt{x}$ и $v=\sqrt[3]{x-3}\Rightarrow v+u=3$ и $v^3=u^2-3\Rightarrow \begin{cases} v+u=3 \\ v^3=u^2-3 \end{cases} \Rightarrow v^3=v^2-6v+6\Leftrightarrow (v-1)(v^2+6)=0\Rightarrow v=1\Rightarrow \sqrt[3]{x-3}=1\Rightarrow x=4$

Ответ: $\{4\}$.

Задача №12. Решить уравнение: $\sqrt[4]{x+7}-\sqrt[4]{x-9}=2$

Решение:

Пусть $u=\sqrt[4]{x+7}$ и $\sqrt[4]{x-9}$, тогда $\begin{cases} u^4-v^4=16 \\ u-v=2 \end{cases} \Rightarrow (2+v)^4-v^4=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow v=0\Rightarrow u=2\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x+7}=2 \\ \sqrt[4]{x-9}=0 \end{cases} \Rightarrow x=9$

Ответ: $\{9\}$.

Анализ ОДЗ.

Задача №13. Решить уравнение: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x-2}+x+1=2x^3$

Решение:

Найдем ОДЗ: $\rightarrow \begin{cases}1-x^2 \geqslant 0\\ x^2+x-2 \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[-1;1]\\ x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x=1$. Далее проверкой убеждаемся, что $x=1$ — корень уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

Задача №14. Решить уравнение: $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Решение:

ОДЗ уравнения $\rightarrow x\in[-3;-1]\cup(0;+\infty)$, перепишем уравнение в следующем виде $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$, и возведем обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $2\sqrt{x(x+1)}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=2-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$, из которого легко видеть, что $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$, а $\sqrt{x(x+1)}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\geq 0$, поэтому получим систему: $\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x^2}=2\\ \left[\begin{array}{l}x(x+1)=0\\ 1+\dfrac{1}{x^2}=0\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow x=-1$

Далее проверкой убеждаемся, что это корень исходного уравнения.

Ответ: $\{-1\}$.

Использование монотонности функций.

Задача №15. Решить уравнение: $2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{3-x}+4$

Решение:

ОДЗ: $1\leqslant x\leqslant 3$, рассмотрим функцию $f(x)=2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}$, её производная равна: $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$. Видим, что $f'(x)>0$ при $\forall x\in[1;3]$, следовательно, $f(x)\uparrow$(возрастающая).

Рассмотрим теперь функцию: $g(x)=\sqrt{3-x}+4$, её производная равна: $g(x)'=-\frac{1}{2}(\sqrt{3-x})^{-1}$, следовательно, $g'(x)<0\forall x\in[1;3]$, следовательно, $g(x)\searrow$ (убывает). Поэтому уравнение имеет только один корень. Методом подбора определяем, что $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Использование числовых неравенств.

<u>Задача №16.</u> Решить уравнение: $(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$

Решение:

Воспользуемся неравенством Коши: $\dfrac{16x^{200}+1}{2} \geq \sqrt{16x^{200}}$ и $\dfrac{y^{200}+1}{2} \geq \sqrt{y^{200}}$, тогда будем иметь: $\left(\dfrac{16x^{200}+1}{2}\right)\left(\dfrac{y^{200}+1}{2}\right) \geq 16\sqrt{x^{200}}\sqrt{y^{200}}$, откуда видно, что неравенство превратится в равенство при условии: $\begin{cases} 16x^{200}=1 \\ y^{200}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}} \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Ответ: $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}}; y=\pm 1$.

<u>Задача №17.</u> Решить уравнение: $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4$

Решение:

Воспользуемся неравенством Бернулли: если $n \in (0;1)$, то $(1+x)^n \leq 1+nx$ (доказательство этого неравенства для случая $n \in (0;1)$ можно посмотреть в википедии).

Будем иметь: $(1-x)^{1/2}+(1+x)^{1/2}+(1-x^2)^{1/4}+(1+x^2)^{1/4} \leq 1-\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{1}{4}x^2+1+\dfrac{1}{4}x^2$, откуда $(1-x)^{1/2}+(1+x)^{1/2}+(1-x^2)^{1/4}+(1+x^2)^{1/4} \leq 4$, то есть равенство достигается при $x=0$.

Ответ: $\{0\}$.

Уравнения вида: $f(g(x))=f(h(x))$

<u>Задача №18.</u> Решить уравнение: $x=\underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{\ldots+\sqrt{5+x}}}}}_{\text{n раз}}$

Решение:

ОДЗ: $x \geq [-5;+\infty)$. Пусть $f(x)=\sqrt{5+x}$, рассмотрим её производную: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{5+x}}>0$ для $\forall x \in$ ОДЗ, следовательно, $f(x) \nearrow$ (возрастающая), поэтому решением исходного уравнения будут все решения уравнения: $f(x)=x$ (более подробно этот случай уравнений рассмотрен в работе: метод итераций) $\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Задача №19. Решить уравнение: $(x-1)^4+4x-4=x^2+4\sqrt{x}$

Решение:

ОДЗ: $x\geq 0$. Представим это уравнение в виде: $(x-1)^4+4(x-1)=x^2+4\sqrt{x}$. Положим $f(t)=t^4+4t$, $g(t)=t-1$, $h(t)=\sqrt{t}$, тогда наше уравнение равносильно: $f(g(x))=f(h(x))$ (отметим здесь то, что это слишком тонкий приём, который на практике встречается достаточно редко, однако в этом случае он идеально подходит для упрощения задачи).

Рассмотрим производную функции $f(x)\Rightarrow f'(x)=4x^3+4>0$, $\forall x>0$, то есть $f(x)\nearrow$, следовательно, уравнение сводится к виду: $x-1=\sqrt{x}\Rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (более подробно этот вид уравнений также рассмотрен в работе по методу итераций).

Ответ: $\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Задача №20. Решить уравнение: $x^4-2x^2+2\mid x^2-1\mid+1=4x^2+4\mid x\mid$

Решение:

Представим это уравнение в виде: $(x^2-1)^2+2\mid x^2-1\mid=(2x)^2+2\mid 2x\mid$, пусть $f(t)=t^2+2\mid t\mid$, $g(t)=t^2-1$ и $h(t)=2t$, тогда наше уравнение примет вид: $f(g(x))=f(h(x))$, заметим также, что: $f(-x)=(-x)^2+2\mid -1\mid\cdot\mid x\mid=x^2+2\mid x\mid=f(x)$, то есть $f(x)$ — чётная и убывает на интервале $(-\infty;0]$, и на интервале $x\geq 0$ — возрастает, следовательно, решениями исходного уравнения будут все решения уравнения $g(x)=h(x)$. Имеем: $x^2-1=\pm 2x\Rightarrow x=\pm 1\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm 1\pm\sqrt{2}$.

Задача №21. Решить уравнение: $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x^2+x+2}\right)=0$

Решение:

Пусть $f(t)=\sin t$, а $g(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $h(t)=\dfrac{1}{t^2+t+2}$, тогда получим $f(g(x))+f(h(x))=0$, так как $f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$ — нечётная, то $f(g(x))=f(-h(x))$. Так как $f'(x)=\cos x>0$ для $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$, то $f(x)\nearrow$ — строго возрастает.

К тому же $-\dfrac{1}{2}\leq g(t)\leq\dfrac{1}{2}$, откуда $0\leq h(t)\leq\dfrac{4}{7}$, следовательно уравнение сводится к уравнению: $\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{x^2+x+2}\Rightarrow x^3+2x^2+2x+1=0\Rightarrow x=-1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Разные задачи.

Задача №22. Решить неравенство:

$$\sqrt{6x-13}-\sqrt{3x^2-13x+13}\geqslant 3x^2-19x+26$$

В ответе указать сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x.

Решение:

Положим $\sqrt{6x-13}=a$ и $\sqrt{3x^2-13x+13}=b$, $a,b\geq 0 \Rightarrow 3x^2-19x+26=b^2-a^2$, $a-b\geq b^2-a^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)\geq 0 \Rightarrow a-b\geq 0 \Rightarrow a\geq b\geq 0$, то есть $\sqrt{6x-13}\geq\sqrt{3x^2-13x+13} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 6x-13\geq 3x^2-13x+13 \\ 3x^2-13x+13\geq 0 \end{cases}$, $x\in[2;\dfrac{13}{3}]$; $x\in\left(-\infty;\dfrac{13-\sqrt{13}}{6}\right]\bigcup\left[\dfrac{13+\sqrt{13}}{6};+\infty\right)\Rightarrow x=3;4.$

Ответ: $\{7\}$.

Задача №23. Найти все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=2^{\frac{y}{3}}+3^{\frac{y}{3}} \\ \sqrt{-5x^2-8xy-3y^2}=-y-2x \end{cases}$$

Решение:

Разберёмся сначала со вторым уравнением, возведём его в квадрат $\Rightarrow -5x^2-8xy-3y^2=y^2+4xy+4x^2 \Leftrightarrow (2y+3x)^2=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x$, пусть $-\dfrac{x}{2}=t$, тогда из первого уравнения получим: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2t}=2^t+3^t$. Используя умножение на сопряжённое выражение, получаем: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2t}=2^t+3^t$, пусть $b=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}>3$, тогда $2^t+3^t=b^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{b}\right)^2+\left(\dfrac{3}{b}\right)^2=1$, левая часть представляет собой сумму двух убывающих функций, так как основания меньше 1, значит данное уравнение может иметь не более одного корня. Методом подбора находим, что $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-1, y=\dfrac{3}{2}$. Далее проверкой убеждаемся, что $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ решение уравнения.

Ответ: $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$.

Задача №24. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|}\geqslant 0$$

Решение:

Т.к. неравенство $|\ f(x)\ |>|\ g(x)\ |$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x)>g^2(x),(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))>0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -x^2+x+6\geq 0 \\ (2x^2-8x+4)(-6x+8)>0 \end{cases} (1)$$

Квадратный трёхчлен x^2+x+6 имеет корни -2 и 3, корнями квадратного трехчлена x^2-4x+2 являются числа $x_1=2-\sqrt{2}$ и $x_2=2+\sqrt{2}$, а система (1) равносильна системе:

$$\begin{cases} (x+2)(x-3)<0 \quad (2) \\ (x-x_1)(x-\dfrac{4}{3})(x-x_2)<0 \quad (3) \end{cases}, \text{ где } -2<x_1<\tfrac{4}{3}<3<x_2.$$

Множество E_1 решений неравенства (2) — отрезок $[-2;3]$. Множество E_2 решений неравенства (3), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x<x_1$ и $\dfrac{4}{3}<x<x_2$, а множество решений системы (2), (3) — пересечение множеств E_1 и E_2.

Ответ: $[-2;2-\sqrt{2})\bigcap\{4/3;3]$.

Упражнения.

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}$

2) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$

4) $\sqrt{x^3-x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2+1}=3$

5) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-32x+64}=9$

6) $x^2-2x+4-3\sqrt{2x^2-4x+5}=-1$

7) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

8) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

9) $\sqrt{3x-2}-\dfrac{x^2-2x+4}{\sqrt{3x-2}}=x-3$

10) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3x-6+2\sqrt{2x^2-3x-9}$

11) $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$

12) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

13) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

14) $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=4$

15) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$

16) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$

17) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$

18) $(4x^2-9)\sqrt{x+1}=0$

19) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$

20) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

21) $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\leq\dfrac{1}{x^2-2x+4}$

22) $\dfrac{1}{\sqrt{\mid x+1\mid -2}}\leq\dfrac{1}{9+x}$

23) $\sqrt{3+4\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x$

24) $\sqrt{x^2-5x+6}<1+\sqrt{x^2-x+1}$

25) $\sqrt{\dfrac{243+9x-2x^2}{2x+3}}>9-\mid x\mid$

Литература

[1] http://www.problems.ru/

[2] http://www.math.ru/

[3] Методическое пособие по математике для поступающих в вузы, МФТИ, 2008 год.

[4] А.И.Козко, В.Г.Чирский, задачи с параметром и другие сложные задачи, 2008 год.

[5] Варианты ЕГЭ по математике 2003—2012 год.

[6] В.И.Голубев, решение сложных и нестандартных задач по математике.

[7] А.С. Бортаковский, В.М. Закалюкин, В.П. Шапошников, экзамеционные задачи и варианты по математике.