Московский физико-технический институт

Использование производной, интеграла и свойств функций при доказательстве некоторых неравенств.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Теоретический материал.

Определим множество точек, которое мы будем называть промежутком и обозначать символом I: $(a;b)$, $(a;b]$, $[a;b)$, $[a;b]$, $(-\infty;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$

Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1: Пусть функция $f(x)$ имеет неотрицательную производную на промежутке I, тогда для любого c из I и любых $x_1 \le x \le x_2$ имеем $f(x_1) \le f(c) \le f(x_2)$.

Утверждение 2: Пусть функция $f(x)$ имеет положительную производную на промежутке I, тогда для любого c из I и любых $x_1 < c < x_2$ имеем (если такие $x_1 < c < x_2$ существуют) получим $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$.

Ограничение: если такие $x_1 < c < x_2$ существуют и возникают в том случае если точка c совпадает с концом промежутка, например $c = a$ для промежутков $[a;b)$, $[a;b]$, $[a;+\infty)$, то в этом случае будет справедлива только часть неравенства $f(a) < f(x_2)$.

Следствие 1: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную на промежутке I и $f'(x) \ge g'(x)$ для всех x из I, и для c из I, $f(c) \ge g(c)$, тогда при всех $x \ge c$ из I, $f(x) \ge g(x)$.

Утверждение 3: Если для каждого x из промежутка I имеет место неравенство $f(x) \ge g(x)$, то имеет место также неравенство: $\int\limits_a^x f(t)dt \ge \int\limits_a^x g(t)dt$.

Примеры.

Задача №1 Доказать неравенство: $2^{x+1} > x+2$, когда $x \ge 1$.

Решение:

Рассмотрим функцию $h(x) = 2^{x+1} - x - 2$ в области $[1,+\infty)$. Имеем $h(1) = 1$ и $h'(x) = 2^{x+1}\ln 2 - 1$. Функция $y = 2^x$ возрастает в области $[1,+\infty)$, тогда $h'(x) \ge 4\ln 2 - 1 > 0$.

Следовательно, когда $x \ge 1$, имеем $h(x) \ge h(1)$, или $2^{x+1} \ge x+3$, поэтому $2^{x+1} > x+2$.

Задача №2 Доказать неравенство $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\arctan x > 1$, где $x > 0$.

Решение:

Докажем, что в случае $x > 0$ имеем неравенство $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$ в области $(0, +\infty)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0$, значит, функция $f(x) > 0$, причём $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/2$.

Ч.т.д.

Задача №3 (Неравенство Юнга) Доказать неравенство $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, где $a, b, p, q > 0$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^{p-1}}{pb} + \dfrac{b^{q-1}}{qx}$ в области $(0, +\infty)$ (здесь мы взяли исходное неравенство, разделили на ab и обозначили за $a = x$ — переменную). Найдём производную функции $f(x)$. Отметим здесь также тождество: $q(p-1) = p$, которое будет использовано ниже.

$f'(x) = \dfrac{p-1}{p}\dfrac{x^{p-2}}{b} - \dfrac{b^{q-1}}{qx^2} = \dfrac{x^p - b^q}{qbx^2}$, видим, что $f'(x) > 0$ при $x > b^{q/p}$ и $f'(x) < 0$ при $0 < x < b^{q/p}$. Таким образом, в области $[0, b^{q/p}]$ функция убывает, а в области $[b^{q/p}, +\infty)$ возрастает, следовательно, в точке $b^{q/p}$ функция достигает минимума $f(x) = \dfrac{x^{p-1}}{pb} + \dfrac{b^{q-1}}{qx} \ge f(b^{q/p}) = \dfrac{b^{q(p-1)/p}}{pb} + \dfrac{b^{q-1}}{qb^{q/p}} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \ge xb$, откуда в случае $a = x$ получаем наше неравенство.

Ч.т.д.

Задача №4 Доказать неравенство $\operatorname{tg} x - \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} \le x$, где $0 \le x \le \pi/2$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = x - \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$ в области $[0, \pi/2)$. И рассмотрим производную сложной функции $f(x)$. Отметим здесь следующие тождества: $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, и $(\operatorname{tg}^3 x)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}' x$. В итоге получим: $f'(x) = 1 - (\operatorname{tg}' x) + \left(\dfrac{\operatorname{tg}^3}{3}\right)' = 1 - (\operatorname{tg} x)' + \operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)' = (\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg} x)' + 1 = \operatorname{tg}^4 x \ge 0$, следовательно, $f(x) \ge f(0) = 0$, то есть $x \ge \operatorname{tg} x - \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$.

Ч.т.д.

Задача №5 Доказать неравенство $\sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{m=1}^{k} \dfrac{a_m a_n}{m+n} \right) \ge 0$

Решение:

Рассмотрим функцию $h(x) = \sum_{n=1}^{k} \left(\sum_{m=1}^{k} \dfrac{x^m a_m x^n a_n}{m+n} \right)$ в области $[0, +\infty)$, а также её производную.

В итоге имеем: $xh'(x) = \sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{k} x^m a_m x^n a_n\right) = (xa_1 + ... + x^k a_k)^2 \geq 0$, следовательно, для $x > 0, h'(x) \geq 0$, поэтому $h(1) \geq h(0) = 0$, то есть $\sum_{n=1}^{k}\left(\sum_{m=1}^{k} \dfrac{a_m a_n}{m+n}\right) \geq 0$

Ч.т.д.

Задача №6 Доказать неравенство $\ln(2\sin x) > \dfrac{1}{2}(\pi - x)x - \dfrac{5}{72}\pi^2$ при $x \in (\pi/6, \pi/2)$.

Решение:

Рассмотрим неравенство $\operatorname{ctg} x > \pi/2 - x$, справедливость которого следует из известного неравенства $\operatorname{tg}\alpha > \alpha\ \ (0 < \alpha < \pi/2)$ с заменой α на $(\pi/2 - x)$.

Интегрируем рассматриваемое неравенство, получим $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} \operatorname{ctg} t dt > \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} (\pi/2 - t)dt = \dfrac{1}{2}x(\pi - x) - \dfrac{5}{72}\pi^2$,

$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} \operatorname{ctg} t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} \dfrac{\cos t}{\sin t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} \dfrac{d(\sin t)}{\sin t} = \ln(\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x} = \ln(\sin x) - \ln\dfrac{1}{2} = \ln(2\sin x)$.

Имеем, $\ln(2\sin x) > \dfrac{x(\pi - x)}{2} - \dfrac{5}{72}\pi^2$.

Ч.т.д.

Задача №7 Доказать неравенства: $x - \sin x \leq 1 - \cos x \leq x\sqrt{2} - \sin x, 0 \leq x \leq \pi/2$.

Решение:

Оценим выражение $\sin x - \cos x \Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4) \Rightarrow$ при $0 \leq x \leq \pi/2$, имеет место неравенство $1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, интегрируем его,

$\int\limits_{0}^{x} dt \leq \int\limits_{0}^{x} (\cos t + \sin t)dt \leq \int\limits_{0}^{x} \sqrt{2}dt$, $x \leq \sin x - \cos x + 1 \leq x\sqrt{2}$.

Ч.т.д.

Задача №8 Доказать неравенство для $\forall \in N \quad \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n} < \ln 3$

Решение:

Возьмём функцию $\dfrac{1}{x}$ и рассмотрим следующее неравенство: $\int\limits_{n+k-1}^{n+k} \dfrac{1}{n+k}dt < \int\limits_{n+k-1}^{n+k} \dfrac{1}{x}dx$, $k = 1, 2, ..., 2n$,

откуда $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n} < \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{1}{x}dx + \int\limits_{n+1}^{n+2} \dfrac{1}{x}dx + ... + \int\limits_{n+1}^{n+2} \dfrac{1}{x}dx = \int\limits_{n}^{3n} \dfrac{1}{x}dx = \ln(x)\Big|_{n}^{3n} = \ln 3$

Ч.т.д.

Задача №9 Доказать неравенство $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n!$, где $n \in N$

Решение:

Возьмём натуральный логарифм от обеих частей, получим: $n\ln n - n < \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n$. Если это неравенство верно, то верно и исходное. Данное неравенство мы можем оценить следующим образом: $\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n > \int\limits_1^2 \ln x dx + \int\limits_2^3 \ln x dx + ... + \int\limits_{n-1}^{n} \ln x dx$, это неравенство следует из того, что $\ln 2 > \int\limits_1^2 \ln x dx, ..., \ln n > \int\limits_{n-1}^{n} \ln x dx$, последнее доказывается через индукцию ($n > 1$). Имеем:

$\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n > \int\limits_1^n \ln x dx = (x\ln(x) - x)\Big|_1^n = n\ln n - n + 1 > n\ln n - n$, следовательно, $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ч.т.д.

Задача №10 Вычислить целую часть числа $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}$, целая часть числа по определению — это функция вида: $[x]$, например: $[2,5] = 2, [-1,5] = -2$.

Решение:

Имеем: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} < \int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + ... + \int\limits_{10^6-1}^{10^6} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{10^{12}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = 14997 + 3(1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}) < 14997$

Аналогично имеем также $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}} > \int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_5^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + ... + \int\limits_{10^6}^{10^6+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_4^{10^6+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(10^6+1)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} > \frac{3}{2}10^4 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = 14996 + \frac{8 - 3\sqrt[3]{16}}{2} > 14996$, таким образом, $14996 < ... < 14997$.

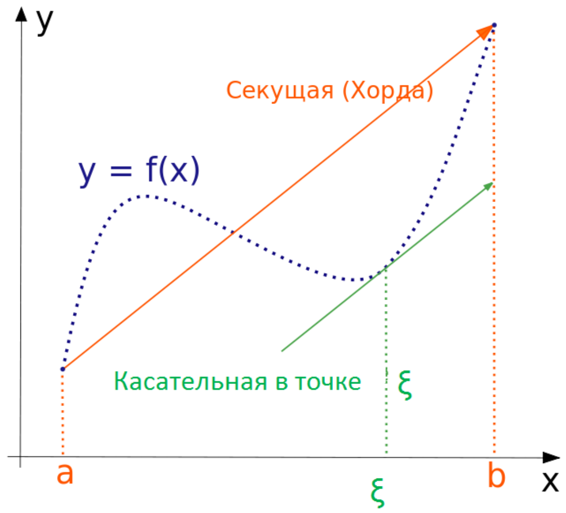
Ответ: целая часть числа равна 14996.

Теорема Лагранжа.

При решении некоторых неравенств удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема Лагранжа: Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Данную теорему имеет простую геометрическую интерпретацию: Существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что касательная функции f в этой точке параллельна секущей $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Покажем на примерах, как можно её использовать.

Задача №11 Доказать неравенство $\forall n \in N$ и $\alpha > 0$ $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}} < \dfrac{1}{\alpha}\left[\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \dfrac{1}{n^{\alpha}}\right]$

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x \in R$, её производная равна: $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, зафиксируем некоторую точку x_0 и применим теорему Лагранжа: $\left[\dfrac{1}{x^{\alpha}} - \dfrac{1}{{x_0}^{\alpha}}\right] = -\dfrac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}$, где $\xi \in (x_0, x)$

Положим $x_0 = x - 1$, то есть $\mid x - x_0 \mid = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha}} - \dfrac{1}{x^{\alpha}} = \dfrac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}}$, где $\xi \in (x-1, x)$, положим $x = n$, тогда $\left[\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \dfrac{1}{n^{\alpha}}\right] = \dfrac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}} > \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\xi \in (n-1, n)$.

Ч.т.д.

Задача №12 Показать, что $\ln x < x - 1, x > 1$

Решение:

Используем нашу теорему $\Rightarrow \dfrac{\ln x - 0}{x - 1} = \dfrac{1}{\xi}$, $\xi \in (1, x) \Rightarrow \ln x = \dfrac{x-1}{\xi}, \xi > 1 \Rightarrow \ln x < x - 1, \forall x > 1$.

Ч.т.д.

Упражнения.

Пользуясь теоремой Лагранжа, докажите следующие неравенства:

1) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, при $0 < a < b, n \in N$

2) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$

3) $e^x \geq 1 + x, x \in R$

4) $e^x > ex, x > 1$

5) $x^\alpha \mid \ln x \mid < \dfrac{1}{\alpha e}, 0 < x < 1, \alpha > 0$

Свойства функций.

При доказательстве некоторых неравенств можно использовать следующие свойства функций.

1) Если функция $f(x)$ определена в области $[a, d]$ и убывает в области $[a, c]$, а в области $[c, b]$ возрастает, тогда в области $[d, e]$ функция $f(x)$ принимает своё наибольшее значение в одной из граничных точек области $[a, b]$ $(a \leq d < e \leq b)$.

2) Если функция $f(x)$ определена в области $[a, b]$ и в области $[a, c]$ возрастает, а в области $[c, b]$ убывает, то в области $[d, e]$ функция $f(x)$ принимает своё наименьшее значение в одной из граничных точек области $[d, e]$ $(a \leq d < e \leq b)$.

Замечание: Иногда требуется доказывать неравенства вида $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$ при некоторых значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, как правило поступают здесь так, преобразуют это неравенство к виду: $f(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, и исследуют зависимость от x_i — переменных $(1 \leq i \leq n)$ функции $F(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n)$, при этом переменные $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ рассматриваются как постоянные.

Задача №13 Доказать неравенство $({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)\cos\dfrac{\pi}{n+1} \geq x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$, где $n \in N, n \geq 2$.

Решение:

Рассмотрим функцию $F(x_1) = \cos\dfrac{\pi}{n+1}{x_1}^2 - x_2x_1 + ({x_2}^2 + ... + {x_n}^2)\cos\dfrac{\pi}{n+1} - x_2x_3 - ... - x_{n-1}x_n$.

Она принимает своё наименьшее значение при $x_1 = \dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$, следовательно, $F(x_1) = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)\cos\dfrac{\pi}{n+1} - x_1x_2 - ... - x_{n-1}x_n \geq F\left(\dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right)$.

Нетрудно доказать, что $F\left(\dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right) = \left(\dfrac{\sin\dfrac{3\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{2\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}{x_2}^2 + {x_3}^3 + ... + {x_n}^2\right)\cos\dfrac{\pi}{n+1} - x_2x_3 - ... - x_{n-1}x_n$.

Рассмотрим квадратичную функцию $G(x_2) = F\left(\dfrac{x_2}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right)$, получим

$$G(x_2) \geq G\left(\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{3\pi}{n+1}}x_3\right) = \left(\frac{\sin\dfrac{4\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{3\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\cdot {x_3}^3 + ... + {x_n}^2\right)\cdot\cos\frac{\pi}{n+1} - x_3x_4 - ... - x_{n-1}x_n.$$

Проведя аналогичные рассуждения для переменных $x_3, ..., x_n$, получим

$F(x_1) \geq G(x_2) \geq ... \geq \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\pi}{n+1}}{2\sin\dfrac{n\pi}{n+1}\cos\dfrac{\pi}{n+1}}{x_n}^2\cos\dfrac{\pi}{n+1} = 0$, следовательно, $({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)\cos\dfrac{\pi}{n+1} \geq x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n$.

Ч.т.д.

Задача №14 Доказать неравенство: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$, где $0 \leq a, b, c \leq 1$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(a) = a^2(1-b) - c^2a + b^2 + c^2 - bc^2 - 1$ в области $[0,1]$. Если $b \neq 1$, то $f(a)$ является квадратным трёхчленом по a, ветви графика которого направлены вверх. Следовательно, функция $f(a)$ принимает наибольшее значение в одной из точек на концах отрезка $[0,1]$. Поскольку $f(0) = b^2 + c^2 - bc^2 - 1 = (1-b)(c^2 - 1 - b) \leq 0, f(1) = 1 - b - c^2 + b^2 + c^2 - b^2c - 1 = b(b-1) - b^2c \leq 0$, то на отрезке $[0,1]$ $f(a) \geq 0$, что и требовалось доказать. Если $b = 1$, то доказательство проводится аналогично.

Ч.т.д.

Задача №15 Доказать неравенство $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1$, где $0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3$.

Решение:

Рассмотрим монотонную функцию $f(x) = x + x_2 + x_3 - xx_2 - x_2x_3 - xx_3 = x(1 - x_2 - x_3) + x_2 + x_3 - x_3x_2$, которая принимает наибольшее значение в одной из крайних точек отрезка $[0,1]$: $f(0) = x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 + (1 - x_3)(x_2 - 1) \leq 1$, $f(1) = 1 - x_3 - x_2 + x_2 + x_3 - x_2x_3 = 1 - x_2x_3 \leq 1$. Следовательно, на отрезке $[0,1]$ $f(x) \leq 1$ или же $f(x_1) = x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1$.

Ч.т.д.

Неравенство Йенсена и его связь с определением выпуклой функции.

Неравенство Йенсена — неравенство, введённое Иоганом Йенсеном и тесно связанное с определением выпуклой функции.

Формулировка: Пусть функция $f(x)$ является выпуклой на некотором промежутке I и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + q_n = 1$. Тогда каковы бы ни были числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка I, выполняется неравенство:

$$\boxed{f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)} \text{ или } \boxed{f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)}.$$

Замечание: 1) Если функция $f(x)$ вогнута (выпукла вверх), то знак в неравенстве меняется на противоположный.

2) Сам Иоган Йенсен исходил из более частного соотношения, а именно $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, оно отвечает случаю $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$.

Доказательство: проведём его методом математической индукции $\Rightarrow$

Для $n = 2$ неравенство следует из определения выпуклой функции. Допустим, что оно верно для какого-либо натурального числа n, докажем, что оно верно и для $n+1$, то есть

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$

С этой целью, заменим слева сумму двух последних слагаемых $\alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}$ одним слагаемым

$(\alpha_n + \alpha_{n+1})\left(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right)$, это даст возможность воспользоваться неравенством для n и установить, что выражение выше не превосходит суммы

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1}\right).$$

Остается лишь применить к значению функции в последнем слагаемом неравенство для $n = 2$.

Ч.т.д.

Поскольку мы будем доказывать неравенства, то полезно записать это всё в виде теорем.

Утверждение 5: Если имеет место неравенство

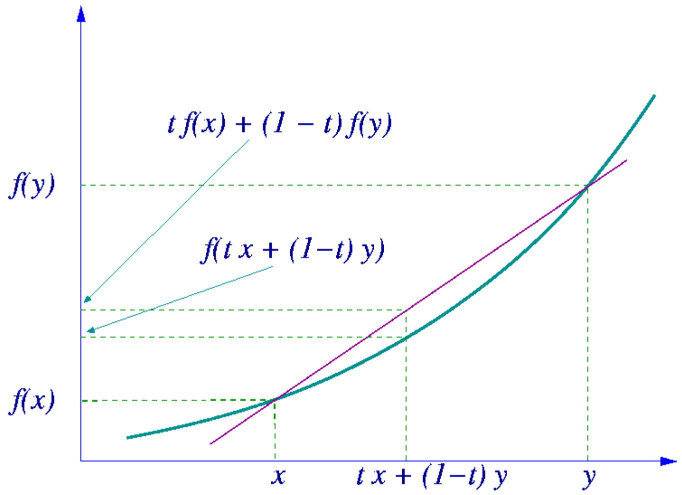
$$(1): \boxed{\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \text{ или } (2): \boxed{\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

для любых чисел a и b из области $D(f) = I$, то для любых $\alpha_1, ..., \alpha_n \in Q_+$ где $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$, и любых чисел $x_1, ..., x_n \in I$ имеет место неравенство:

$$\boxed{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)} \text{ или } \boxed{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)}$$

Определение: Действительная функция, определённая на некотором интервале (в общем случае на выпуклом подмножестве некоторого векторного пространства), выпукла, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $t \in [0,1]$ выполняется неравенство Йенсена:

$$\boxed{f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)}$$



Если это неравенство является строгим для всех $t \in (0,1)$ и $x \neq y$, то функция называется строго выпуклой; если выполняется обратное неравенство, функция называется вогнутой, или выпуклой вверх.

Утверждение 6: Если для любых чисел a и b из интервала $D(f) = I$ и любых α, β таких, что $\alpha, \beta \geq 0, \alpha+\beta = 1$, имеет место неравенство

(1) $\boxed{\alpha f(a)+\beta f(b) \geq f(\alpha a+\beta b)}$ или (2) $\boxed{\alpha f(a)+\beta f(b) \leq f(\alpha a+\beta b)}$, то имеет место неравенство

(3) $\boxed{\alpha_1 f(x_1)+...+\alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1+...+\alpha_n x_n)}$ или (4) $\boxed{\alpha_1 f(x_1)+...+\alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1+...+\alpha_n x_n)}$

где $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0, \alpha_1+...+\alpha_n = 1$, а $x_1, ..., x_n \in I$.

Утверждение 7: Если для $f(x)$ функции в области $D(f) = I$ имеет место условие $f''(x) \geq 0$ или $f''(x) \leq 0$, то имеет место также условие (1) $\boxed{\alpha_1 f(x_1)+...+\alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1+...+\alpha_n x_n)}$ или (2) $\boxed{\alpha_1 f(x_1)+...+\alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1+...+\alpha_n x_n)}$, где $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0, \alpha_1+...+\alpha_n = 1$, а $x_1, ..., x_n \in I$.

Доказательство: Пусть имеет место условие (2). Сначала докажем, что имеет место $\alpha f(a)+\beta f(b) \geq f(\alpha a+\beta b)$. Действительно, воспользовавшись формулой конечных приращений находим, что $\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2) = \alpha(f(x_1)-f(\alpha x_1+\beta x_2))+\beta(f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)) = \alpha f'(c_1)(x_1-\alpha x_1-\beta x_2)+\beta f'(c_2)(x_2-\alpha x_1-\beta x_2) = \alpha\beta(f'(c_2)-f'(c_1))(x_2-x_1) = \alpha\beta f''(c)(c_2-c_1)(x_2-x_1)$, где $x_1 < c_1 < \alpha x_1+\beta x_2 < c_2 < x_2$ и $c_1 < c < c_2$.

Следовательно, знак левой части совпадает со знаком $f''(c)$, что означает, что $\alpha f(a)+\beta f(b) \geq f(\alpha a+\beta b)$ справедливо.

Задача №16 Доказать неравенство $\dfrac{\cos x_1 + ... + \cos x_n}{n} \leq \cos\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)$, где $x_1, ..., x_n \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Решение:

Докажем, что для любых чисел $a, b \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ имеет место условие теоремы 5, то есть $\dfrac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos\dfrac{a+b}{2}$. Действительно, $\dfrac{\cos a + \cos b}{2} = \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} \leq \cos\dfrac{a-b}{2}$.

Считая, что $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, и воспользовавшись неравенством $\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) \leq f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)$, получим $\dfrac{1}{n}(\cos x_1 + ... + \cos x_n) \leq \cos\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)$.

Ч.т.д.

Задача №17 Доказать неравенство $\left(\sum_{i=1}^n {a_i}^k\right)\left(\sum_{i=1}^n {c_i}^k\right)^{k-1} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i {c_i}^{k-1}\right)^k$, где $a_i, c_i > 0, i = 1, ..., n$ и $k \notin (0, 1)$

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = x^k$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(x) = k(k-1)x^{k-2} \geq 0$, то, приняв $\alpha_i = \dfrac{{c_i}^k}{\sum_{j=1}^n {a_j}^k}, x_i = \left(\dfrac{a_i}{c_i}\right)^k$, где $i = 1, ..., n$, согласно теореме №7 получим $\sum_{i=1}^n \left(\dfrac{a_i}{c_i}\right)^k \dfrac{{c_i}^k}{\sum_{j=1}^n {c_j}^k} \geq \left(\sum_{i=1}^n \dfrac{a_i}{c_i}\dfrac{{c_i}^k}{\sum_{j=1}^n {c_j}^k}\right)^k$, откуда и получается данное неравенство.

Задача №18 Докажите неравенство $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \geq 64$, где $x, y, z > 0$ и $x+y+z = 1$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(t) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$ в области $(0, +\infty)$. Поскольку $f''(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$, то имеет место неравенство $\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)$. Взяв $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{1}{3}, t_1 = x, t_2 y, t_3 = z$, получим $\dfrac{1}{3}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\right] \geq \ln\left(1+\dfrac{3}{x+y+z}\right)$, откуда, приняв во внимание, что $x + y + z = 1$, получим $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \geq \left(1+\dfrac{3}{x+y+z}\right)^3 = 64$.

Ч.т.д.

Упражнения.

Доказать неравенства:

1) $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2, a, b \geq 0$

2) $2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x+y)^n, x, y > 0, n \in N$

3) $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{3!}$

4) $\ln(\cos x) \leq -\dfrac{x^2}{2}$, где $0 \leq x < \pi/2$

5) $\dfrac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a > b > 0, p > n$

6) $\left(1 + x^t\right)^{\dfrac{1}{t}} - \left(1 + x^t\right)^{-\dfrac{1}{t}} \leq x$, где $x \geq 0, t \geq 2$

7) $ab \leq e^a + b(\ln b - 1), b \geq 1$

8) $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 3, 0 \leq x \leq \pi/2$

9) $n! < n\left(\dfrac{n}{e}\right)^n, n \geq 7, n \in N$

10) $\left(a^\alpha + b^\alpha\right)^{\dfrac{1}{\alpha}} > \left(a^\beta + b^\beta\right)^{\dfrac{1}{\beta}}, a, b > 0, 0 < \alpha < \beta$

11) $\left(\dfrac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\dfrac{a}{c}\right)^a \cdot \left(\dfrac{b}{d}\right)^b, a, b, c, d > 0$

12) неравенство Бернулли:

$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, если $\alpha > 1, x > -1, x \neq 0$

$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, если $0 < \alpha < 1, x > -1, x \neq 0$

13) $x^2 \geq (1+x)\ln(1+x)^2, x > -1$

15) $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, n \geq 3, n \in N$

15) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}, 0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

16) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

17) $(a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ac)$, где a, b, c-стороны треугольника.

18) $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{b+1} \geq \dfrac{1}{1+m} + \dfrac{1}{1+\dfrac{ab}{m}}$, где $1 < a < m < b$.

Литература

[1] http://www.problems.ru/

[2] http://www.math.ru/

[3] Василевский А.Б.Методы решения задач. Минск: Высшая школа. 1974.

[4] Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики.

[5] В.В.Прасолов, Задачи по алгебре, арифметике и анализу.

[6] А.И.Маркушевич, Замечательные кривые, Популярные лекции по математике Москва 1978.

[7] Физико-математические олимпиады. М. Знание, 1977.

[8] Квант, 1970-1997.

[9] Маршал А., Олкин И. Неравенства, теория можоризации и её приложения-М. Мир, 1983.

[10] Кюршак Й. и др, Венгерские математические олимпиады.- М: Мир, 1976.