Тема 13. Евклидово пространство. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Ортогонализация базиса. Матрица Грама и ее свойства. Координатное представление скалярного произведения в конечномерном случае.

Определение и основные свойства евклидова пространства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

Определение 13.1. Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число (x, y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(x, x) \geq 0$, причем

$$(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = o,$$

тогда говорят, что задано *евклидово пространство E*.

Замечание: аксиомы 1–4 в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейный* (что следует из аксиом 2 и 3) и *симметричный* (следует из аксиомы 1) функционал, который, кроме того, порождает *положительно определенный квадратичный* (следует из аксиомы 4) функционал. Любой билинейный функционал, обладающий данными свойствами, может использоваться в качестве скалярного произведения.

Пример 13.1.

1°. Трехмерное геометрическое пространство со скалярным произведением, введенным по правилам § 2.2, является евклидовым.

2°. Пространство n-мерных столбцов

$$x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|; \; y = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\|$$

со скалярным произведением, определяемым по формуле $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

3°. Евклидовым будет пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau .$$

Задача 13.1. *Можно ли в трехмерном пространстве скалярное произведение определить как произведение длин векторов на куб косинуса угла между ними*?

Решение. Нет, нельзя, так как не будет выполняться аксиома 3 определения 13.1.

Определение 13.2. В евклидовом пространстве E назовем

1) *нормой* (или *длиной*) элемента x число $\left| x \right| = \sqrt{(x, x)}$;

2) *расстоянием* между элементами x и y число $\left| x - y \right|$.

Замечание: использование для обозначения нормы элемента ограничителей вида $\left|\ \dots\ \right|$ не приводит к каким-либо конфликтам с введенными ранее обозначениями, поскольку для линейного пространства вещественных чисел норма числа, очевидно, совпадает с его абсолютной величиной, для комплексного числа норма совпадает с его модулем, а для линейного пространства геометрических векторов – с длиной вектора.

Теорема 13.1 (неравенство Коши–Буняковского). **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство**

$$\left|(x, y)\right| \le \left|x\right|\left|y\right|.$$

Доказательство.

Для $\forall x, y \in E$ и вещественного числа τ элемент $x - \tau y \in E$. Согласно аксиоме 4 из определения 13.1

$$0 \le (x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - 2(x, y)\tau + (y, y)\tau^2 =$$

$$= \left|x\right|^2 - 2(x, y)\tau + \left|y\right|^2\tau^2 \quad \forall\tau.$$

Полученный квадратный трехчлен неотрицателен для любого τ тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен, то есть $(x, y)^2 - \left|x\right|^2\left|y\right|^2 \le 0$.

Теорема доказана.

Задача 13.2. *Показать, что неравенство Коши–Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы.*

Следствие 13.1 (неравенство треугольника). **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство**

$$\left|x + y\right| \le \left|x\right| + \left|y\right|.$$

Доказательство.

Из аксиом евклидова пространства и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left| x+y \right|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$$
$$\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда в силу неотрицательности чисел $\left| x+y \right|$ и $|x| + |y|$ получаем неравенство треугольника.

Следствие доказано.

Отметим, что неравенства Коши–Буняковского и треугольника для евклидова пространства из примера 13.1 (2°) имеют вид

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2} \quad \forall \xi_i, \eta_i \,, \quad i = [1, n];$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2} \quad \forall \xi_i, \eta_i \,, \quad i = [1, n],$$

в то время как для евклидова пространства из примера 13.1 (3°) соответственно:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau \right| \le \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau) d\tau} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau) d\tau} \;;$$

$$\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} (x(\tau) + y(\tau))^2 d\tau} \le \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau) d\tau} + \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau) d\tau} \;.$$

Определение 13.3. В евклидовом пространстве E *величиной угла* между ненулевыми элементами x и y назовем число $\alpha \in [0, \pi]$, удовлетворяющее соотношению

$$\cos\alpha = \frac{(x, y)}{|x|\,|y|}.$$

Из неравенства Коши–Буняковского (теорема 13.1) следует, что величина угла существует для любой пары ненулевых элементов в E.

Определение 13.4. В евклидовом пространстве E элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Заметим, что нулевой элемент евклидова пространства ортогонален любому другому элементу.

Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

Определение 13.5. В конечномерном евклидовом пространстве E^n базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}\ \ \forall i, j = [1, n]$.

Теорема 13.2 (Грама–Шмидта). **Во всяком евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис.**

Доказательство.

1°. Пусть в E^n дан некоторый, вообще говоря, неортогональный базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Построим вначале базис

$$\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$$

из попарно ортогональных элементов. Последовательное построение этих элементов будем называть *процессом ортогонализации базиса*.

Возьмем $e_1' = g_1$. Элемент e_2' будем искать в виде

$$e_2' = g_2 + \alpha_{21} e_1',$$

где α_{21} – некоторая константа. Подберем α_{21} так, чтобы $(e_1', e_2') = 0$, для этого достаточно, чтобы

$$(e_1', e_2') = (e_1', g_2 + \alpha_{21} e_1') =$$

$$= (e_1', g_2) + \alpha_{21}(e_1', e_1') = 0; \; \alpha_{21} = -\frac{(e_1', g_2)}{(e_1', e_1')}.$$

Заметим, что $e_2' \neq o$. Действительно, из

$$o = e_2' = g_2 + \alpha_{21} e_1' = g_2 + \alpha_{21} g_1$$

следует линейная зависимость g_1 и g_2, что противоречит условию принадлежности этих элементов базису (см. лемму 08.2).

2°. Допустим теперь, что нам удалось ортогонализовать $k-1$ элемент, и примем в качестве e_k' элемент

$$e_k' = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e_j'.$$

Потребуем, чтобы $(e_k', e_i') = 0 \quad \forall i = [1, k-1]$, но тогда в силу $(e_j', e_i') = 0; \; j = [1, k-1]$ имеем

$$(e_i', e_k') = (e_i', g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e_j') = (e_i', g_k) + \alpha_{ki}(e_i', e_i') = 0;$$

$$\alpha_{ki} = -\frac{(e_i', g_k)}{(e_i', e_i')}; \quad i = [1, k-1].$$

Покажем теперь, что в этом случае $e_k' \neq o$. Допустим противное: $e_k' = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e_j' = o$. Однако поскольку все элементы e'_i , $i=[1,k-1]$ по построению есть некоторые линейные комбинации элементов $g_i; i=[1,k-1]$, мы приходим к линейной зависимости g_i ; $i=[1,k]$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $e'_k \neq o$.

3°. Процесс ортогонализации продолжается до исчерпания множества элементов g_i ; $i=[1,n]$, после чего достаточно *пронормировать* полученные элементы e'_i ; $i=[1,n]$, чтобы получить искомый ортонормированный базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, где $e_k = \dfrac{e'_k}{|e'_k|}$; $k=[1,n]$.

Теорема доказана.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта может быть применен к любой, в том числе и к линейно зависимой, системе элементов евклидова пространства. Если ортогонализуемая система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент, после отбрасывания которого можно продолжить процесс ортогонализации.

Матрица Грама. Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ в евклидовом пространстве является матрица Грама.

Определение 13.6. В евклидовом пространстве E *матрицей Грама* системы элементов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ называется симметрическая матрица вида

$$\|\Gamma\|_f = \begin{Vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \cdots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \cdots & (f_2, f_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \cdots & (f_k, f_k) \end{Vmatrix}.$$

Пусть в E^n дан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, в силу определения 13.1, представимо в виде

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где $\gamma_{ij} = (g_i, g_j) \ \ \forall i, j = [1, n]$ – компоненты матрицы $\|\Gamma\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама*.

Заметим, что эта матрица симметрическая, в силу коммутативности скалярного произведения (см. аксиому 1 в опр. 13.1), является матрицей симметричного билинейного функционала, задающего скалярное произведение. Тогда (принимая во внимание определение 11.2) координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x, y) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Gamma \|_g \| y \|_g =$$

$$= \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \dots & (g_1, g_n) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \dots & (g_2, g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_n, g_1) & (g_n, g_2) & \dots & (g_n, g_n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix},$$

где $\| x \|_g$ и $\| y \|_g$ – координатные представления (столбцы) элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Очевидно, что эта формула согласуется с определением билинейного функционала.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе $\| \Gamma \|_e = \| E \|$, и, следовательно, формула для скалярного произведения принимает вид $(x, y) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| y \|_g = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

Теорема 13.3. **Для базисной матрицы Грама $\| \Gamma \|_g$ в любом базисе $\det \| \Gamma \|_g > 0$.**

Доказательство.

Из определения 13.1 следует, что скалярное произведение есть билинейный, симметричный функционал, поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ (с матрицей перехода $\| S \|$) по теореме 11.1 для матрицы Грама имеют место равенства

$$\| \Gamma \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Gamma \|_g \| S \|; \ \det \| \Gamma \|_{g'} = \det \| \Gamma \|_g (\det \| S \|)^2,$$

где $\det \| S \| \neq 0$.

Откуда следует, что значение $\operatorname{sgn}(\det \| \Gamma \|_g)$ инвариантно, то есть не изменяется при замене базиса. А, приняв во внимание, что в ортонормированном базисе $\det \| \Gamma \|_e = 1$, приходим к заключению, что в любом базисе $\det \| \Gamma \|_g > 0$.

Теорема доказана.

Следствие 13.2. **Система элементов $\{ f_1, f_2,..., f_k\}$ в E^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Доказательство.

Если элементы $\{ f_1, f_2,..., f_k\}$ линейно зависимы, то определитель их матрицы Грама равен нулю. Действительно, пусть существуют такие, не равные нулю одновременно, числа $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_k$, что

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_k f_k = o .$$

Умножив это равенство скалярно слева на $f_i \ \forall i = [1, k]$, получим

$$\lambda_1 (f_i, f_1) + \lambda_2 (f_i, f_2) + ... + \lambda_k (f_i, f_k) = 0 \ \forall i = [1, k].$$

Тогда, согласно правилам действий с матрицами (см. тему 01), следует, что нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы Грама, имеющая коэффициентами числа

$$\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_k ,$$

будет равна нулевому столбцу и, следовательно, будет равен нулю определитель матрицы Грама (см. лемму 07.2 и теорему 07.2).

С другой стороны, если элементы $\{ f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке и к ним применим результат теоремы 13.1.

Следствие доказано.

Теперь можно доказать необходимость в теореме 12.4.

Теорема 12.4 **Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно,** (Критерий Сильвестра). **чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид**

$$\det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix};\ k=[1,n],$$

были положительными.

Доказательство необходимости.

1°. Из аксиоматики евклидова пространства следует, что введение скалярного произведения в линейном пространстве равносильно заданию некоторого симметричного билинейного функционала, порождающего положительно определенный квадратичный функционал. Обратно, по положительно определенному квадратичному функционалу, однозначно восстанавливается породивший его симметричный билинейный функционал, который можно принять за скалярное произведение.

2°. Покажем, что у положительно определенного квадратичного функционала все (указанного в условии теоремы вида) главные миноры его матрицы положительны. Действительно, если ввести в Λ^n скалярное произведение при помощи его порождающего билинейного функционала, то матрица этого квадратичного функционала в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ есть матрица Грама этого базиса.

Рассмотрим последовательно линейные оболочки систем элементов вида $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$; $k=[1,n]$. Все эти системы линейно независимые (как подмножества базиса), и по теореме 13.3 соответствующие им матрицы Грама имеют положительные определители, поэтому

$$\det\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kk} \end{Vmatrix} =$$

$$= \det\begin{Vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \dots & (g_1, g_k) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \dots & (g_2, g_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \dots & (g_k, g_k) \end{Vmatrix} > 0 \;;$$

$k = [1, n].$

Теорема доказана.

Теорема 13.4. **Координатный столбец любого элемента x евклидова пространства E^n в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ может быть представлен в виде**

$$\| x \|_g = \| \Gamma \|_g^{-1} \| b \|_g ,$$

где $\|\Gamma\|_g$ – матрица Грама, а $\| b \|_g = \begin{Vmatrix} (x, g_1) \\ (x, g_2) \\ \dots \\ (x, g_n) \end{Vmatrix}$.

Доказательство.

Умножим обе части равенства $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ скалярно на g_k, $k = [1, n]$. Тогда получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i (g_i, g_k) = (x, g_k) \;, \quad k = [1, n] ,$$

основная матрица которой есть базисная матрица Грама. Поскольку в силу теоремы 13.3 эта матрица невырожденная, приходим к формуле $\| x \|_g = \| \Gamma \|_g^{-1} \| b \|_g$.

Теорема доказана.

Следствие 13.3. **В ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ евклидова пространства E^n для любого элемента**

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E^n$$

имеют место равенства $\xi_i = (x, e_i)$, $\quad i = [1, n]$.

Замечание: формула $\xi_i = (x, e_i)$, $i = [1, n]$ малополезна для конечномерных евклидовых пространств, поскольку элемент x в этом случае однозначно и полностью описывается своими координатами. Однако данная формула может быть использована для обобщения понятия координатного представления на случай евклидовых пространств с неограниченным числом линейно независимых элементов.

Согласно определению 06.4 матрица $\| Q \|$, удовлетворяющая соотношению $\| Q \|^{\mathrm{T}} = \| Q \|^{-1}$, называется ортогональной, причём для любой ортогональной матрицы справедливы равенства

$$\| Q \|^{\mathrm{T}} \| Q \| = \| Q \| \| Q \|^{\mathrm{T}} = \| E \| \text{ и } \det \| Q \| = \pm 1 .$$

Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 13.5. **Ортогональные матрицы (и только они) в E^n могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.**

Доказательство.

Рассмотрим два различных ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ в E^n с матрицей перехода $\| S \|$ от первого базиса ко второму.

Поскольку в этих базисах матрица Грама единичная, то из соотношения

$$\| \Gamma \|_{e'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Gamma \|_{e} \| S \|$$

следует равенство

$$\| E \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| E \| \| S \|, \text{ или } \| E \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| S \|.$$

Поскольку матрица перехода $\| S \|$ невырожденная, то окончательно имеем $\| S \|^{-1} = \| S \|^{\mathrm{T}}$.

Теорема доказана.

В развернутой форме равенство $\| E \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| S \|$ очевидно принимает вид $\delta_{kl} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma^{\mathrm{T}}_{ki} \sigma_{il} \quad k, l = [1, n]$.

Теорема 13.6. **Собственные значения линейного оператора, имеющего в E^n ортогональную матрицу, равны по модулю единице.**

Доказательство.

Из равенства $\| \hat{A} \|_g \| f \|_g = \lambda \| f \|_g$ следует, что

$$\| f \|^{\mathrm{T}}_g \| \hat{A} \|^{\mathrm{T}}_g = \lambda \| f \|^{\mathrm{T}}_g .$$

Перемножив почленно эти равенства, получим соотношение

$$\| f \|_g^{\mathrm{T}} \| \hat{A} \|_g^{\mathrm{T}} \| \hat{A} \|_g \| f \|_g = \lambda^2 \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| f \|_g .$$

В силу ортогональности $\| \hat{A} \|_g$ имеем $\| \hat{A} \|_g^{\mathrm{T}} \| \hat{A} \|_g = \| \hat{E} \|$, а потому $\| f \|_g^{\mathrm{T}} \| f \|_g = \lambda^2 \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| f \|_g$, и, наконец, $\lambda^2 = 1$, поскольку собственные векторы f ненулевые.

Теорема доказана.