Тема 15. Ортогональные преобразования и их свойства. Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду при помощи ортогонального преобразования базиса.

Ортогональные операторы

Определение 15.1. Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве E, называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из определения 15.1 следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними. Имеем

$$\left| \hat{Q}x \right| = \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = | x | ;$$

$$\cos\psi = \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{\left| \hat{Q}x \right| \left| \hat{Q}y \right|} = \frac{(x, y)}{| x || y |} = \cos\varphi ; \quad x, y \in E,$$

где φ – величина угла между ненулевыми элементами x и y, а ψ – величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$.

Теорема 15.1. **Если ортогональный оператор $\hat{Q}$ имеет сопряженный оператор, то он имеет и обратный оператор, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$.**

Доказательство.

По определению 15.1 $\forall x, y \in E \quad (\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$, откуда следует, что

$$(x, \hat{Q}^{+}\hat{Q}y) = (x, y) \quad \text{или} \quad (x, (\hat{Q}^{+}\hat{Q} - \hat{E})y) = 0 .$$

Откуда, по лемме 14.1 получаем, что $\hat{Q}^{+}\hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}$.

Из равенства $\hat{Q}^{+}\hat{Q}-\hat{E}=\hat{O}$ вытекает, что $\hat{Q}^{+}\hat{Q}=\hat{E}$. Тогда $\hat{Q}^{+}\hat{Q}\hat{Q}^{+}=\hat{E}\hat{Q}^{+}$, а в силу того, что единичный оператор коммутирует с любым другим, получаем $\hat{Q}^{+}\hat{Q}\hat{Q}^{+}=\hat{Q}^{+}\hat{E}$ или $\hat{Q}\hat{Q}^{+}=\hat{E}$. Наконец, по определению 09.10 приходим к

$$\hat{Q}^{-1}=\hat{Q}^{+}.$$

Теорема доказана.

Следствие 15.1. **Операторы $\hat{Q}^{+}$ и $\hat{Q}^{-1}$ также ортогональные.**

Теорема 15.2. **Матрица ортогонального оператора в E^{n} в каждом ортонормированном базисе ортогональная.**

Доказательство.

Пусть оператор $\hat{Q}$ ортогональный. Тогда из соотношения $\hat{Q}^{-1}=\hat{Q}^{+}$ (по теореме 15.1 и правилу обращения операторов) в ортонормированном базисе справедливы равенства

$$\left\|\hat{Q}\right\|_{e}^{-1}=\left\|\hat{Q}^{-1}\right\|_{e}=\left\|\hat{Q}^{+}\right\|_{e}=\left\|\hat{Q}\right\|_{e}^{\mathrm{T}}.$$

Но тогда $\left\|\hat{Q}\right\|_{e}^{-1}=\left\|\hat{Q}\right\|_{e}^{\mathrm{T}}$, что и означает, согласно определению 06.4, ортогональность матрицы $\left\|\hat{Q}\right\|_{e}$.

Теорема доказана.

Признак ортогональности линейного оператора в E^{n} дает

Теорема 15.3. **Для того чтобы линейный оператор в E^{n} был ортогональным, достаточно, чтобы его матрица была ортогональной в некотором ортонормированном базисе.**

Доказательство.

1°. Пусть у линейного оператора $\hat{Q}$ в некотором ортонормированном базисе $\| \hat{Q} \|_e^{-1} = \| \hat{Q} \|_e^{\mathrm{T}}$. Тогда $\forall x, y \in E^n$

$$(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = \| \hat{Q}x \|_e^{\mathrm{T}} \| \hat{Q}y \|_e = (\| \hat{Q} \|_e \| x \|_e)^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e \| y \|_e =$$

$$= \| x \|_e^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e \| y \|_e = \| x \|_e^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e^{-1} \| \hat{Q} \|_e \| y \|_e =$$

$$= \| x \|_e^{\mathrm{T}} \| y \|_e = (x, y),$$

то есть условие ортогональности образов выполнено в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

2°. Перейдем теперь к $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ − некоторому другому ортонормированному базису и убедимся, что условие ортогональности при этом переходе не нарушится. Действительно, в силу *ортогональности* матрицы перехода $\| S \|$, связывающей два ортонормированных базиса, имеем

$$\| \hat{Q} \|_{e'}^{-1} = (\| S \|^{-1} \| \hat{Q} \|_e \| S \|)^{-1} =$$

$$= \| S \|^{-1} \| \hat{Q} \|_e^{-1} \| S \| = \| S \|^{-1} \| \hat{Q} \|_e^{\mathrm{T}} \| S \| =$$

$$= \| S \|^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e^{\mathrm{T}} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e^{\mathrm{T}} (\| S \|^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} =$$

$$= (\| S \|^{\mathrm{T}} \| \hat{Q} \|_e \| S \|)^{\mathrm{T}} = (\| S \|^{-1} \| \hat{Q} \|_e \| S \|)^{\mathrm{T}} = \| \hat{Q} \|_{e'}^{\mathrm{T}} .$$

Теорема доказана.

В ряде приложений оказывается полезной, приводимая здесь без доказательства

Теорема 15.4 (о полярном разложении). **Любой линейный оператор $\hat{A}$ в E^n с $\det\|\hat{A}\| \neq 0$ может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ ортогональный, а оператор $\hat{R}$ – самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.**

Приведение к диагональному виду квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ евклидова пространства E^n задан некоторый квадратичный функционал $\Phi(x)$. Рассмотрим задачу отыскания в E^n ортонормированного базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Принципиальная разрешимость подобной задачи для произвольного, вообще говоря, неортонормированного базиса следует из теоремы 11.3. Очевидно, что такой базис не единственный, и потому представляется интересным исследование возможности построения в E^n ортонормированного базиса, в котором данный квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Напомним предварительно, что квадратичный функционал в Λ^n может быть задан формулой

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}\xi_k\xi_i = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g ,$$

в которой симметрическая матрица $\| \Phi \|_g$ преобразуется при переходе от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ по правилу

$$\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|.$$

При доказательстве теоремы 11.3 использовалась математическая индукция в сочетании с методом *выделения полных квадратов* (называемым иногда методом *Лагранжа*), применение которого на практике может потребовать значительных затрат вычислительных ресурсов. Существенно более эффективным оказывается алгоритм, основой которого является

Теорема 15.5. **Для всякого квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе, существует ортонормированный базис, в котором этот функционал имеет диагональный вид[14].**

Доказательство.

1°. Как было показано ранее, матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$ изменяется по правилу

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{e} \| S \|,$$

где $\| S \| = \| \sigma_{ij} \|$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, то есть

$$e'_k = \sum_{s=1}^{n} \sigma_{sk} e_s, \ k = [1, n],$$

а $\| \Phi \|_e$ – симметрическая матрица билинейного функционала, порождающего квадратичный функционал $\Phi(x)$.

2°. Поскольку матрица перехода $\| S \|$ от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная (§ 10.4), то для нее справедливо равенство $\| S \|^{-1} = \| S \|^{\mathrm{T}}$. Откуда вытекает, что в рассматриваемом нами случае

---

[14] Иногда задачу отыскания ортонормированного базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный вид, называют “приведением квадратичного функционала к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода”.

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{-1} \| \Phi \|_{e} \| S \|.$$

3°. Формально симметрическая матрица $\| \Phi \|_{e}$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ определяет самосопряженный оператор (лемма 14.2) $\hat{\Phi}$, матрица которого в базисе $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ находится по формуле (теорема 09.4)

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{-1} \| \Phi \|_{e} \| S \|.$$

4°. Совпадение формул изменения матриц квадратичного функционала и самосопряженного оператора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому позволяет использовать в качестве базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{\Phi}$.

Этот базис существует (см. теорему 14.6) и в нем матрица оператора $\hat{\Phi}$ (а значит, и матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$) имеет диагональный вид, причем на главной диагонали расположены собственные значения самосопряженного оператора $\hat{\Phi}$.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 15.5 согласуется с утверждением следствия 14.4.

Определение 15.2. Линейный самосопряженный оператор $\hat{\Phi}$ называется *присоединенным* к квадратичному функционалу $\Phi(x)$ в E^n .

При этом очевидно выполнение равенства

$$\Phi(x) = (x, \hat{\Phi} x) \; ; \; \forall x \in E^n .$$

Построение базиса, в котором два квадратичных функционала (один из которых знакоопределенный) имеют диагональный вид

Пусть в некотором базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ линейного пространства Λ^n задана пара квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первый из которых знакоопределенный (например, положительно). Рассмотрим задачу отыскания базиса $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет канонический, а функционал $\Psi(x)$ – диагональный вид.

Отметим, что условие знаковой определенности одного из приводимых квадратичных функционалов существенно, поскольку в общем случае два различных квадратичных функционала одним линейным преобразованием к диагональному виду не приводятся. Например, квадратичный функционал

$$\Phi(x) = A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2$$

в Λ^2 можно привести к диагональному виду при помощи линейного оператора, сводящегося к повороту плоскости радиусов-векторов на угол α.

Проверьте самостоятельно, что для этого необходимо, чтобы α удовлетворяло уравнению $(A-C)\sin 2\alpha = 2B\cos 2\alpha$.

Однако для пары квадратичных функционалов

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \xi_1\xi_2$$

угла α, удовлетворяющего системе условий

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha = 0, \\ 0 = \cos 2\alpha, \end{cases}$$

очевидно, не существует.

Опишем теперь алгоритм приведения в Λ^n пары квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, заданных в некотором исходном базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, первый из которых положительно определенный, соответственно к каноническому и диагональному виду.

1°. Поскольку квадратичный функционал $\Phi(x)$ положительно определенный, то для него в Λ^n найдется другой базис $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, в котором он имеет канонический вид, причем все его коэффициенты равны единице (см. теорему 11.3). Приведем этот функционал к данному виду каким-либо методом, например, выделив полные квадраты с последующей нормировкой элементов его матрицы. Одновременно *тем же самым* методом преобразуем также и квадратичный функционал $\Psi(x)$.

2°. Введем в Λ^n скалярное произведение по формуле
$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k \eta'_k \ ,$$
превратив тем самым данное линейное пространство в евклидово E^n. Отметим, что в этом случае базис
$$\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\} = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\} ,$$
в котором $\Phi(x)$ имеет канонический вид, ортонормированный.

3°. Построим теперь третий, также ортонормированный базис $\{e''_1, e''_2, ..., e''_n\}$, переход к которому выполняется при помощи матрицы $\| S \|$, приведя квадратичный функционал $\Psi(x)$ к диагональному виду по схеме, описанной в предыдущем разделе. При этом переходе квадратичный функционал $\Phi(x)$ не потеряет канонического вида, поскольку из условия $\| \Phi \|_e = \| E \|$ и ортогональности $\| S \|$ следует, что

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{e} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| E \| \| S \| =$$
$$= \| S \|^{\mathrm{T}} \| S \| = \| S \|^{-1} \| S \| = \| E \| .$$

Таким образом, построен базис, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет канонический вид, а функционал $\Psi(x)$ – диагональный.

В заключение отметим, что матрица перехода к искомому ортонормированному базису есть произведение матрицы перехода, при котором знакоопределенный квадратичный функционал приводится к каноническому виду, и ортогональной матрицы $\| S \|$.