Тема 02. Направленные отрезки. Операции с направленными отрезками: сравнение, сложение и умножение на число. Множество векторов. Свойства линейных операций с векторами. Коллинеарность и компланарность. Линейная зависимость и независимость векторов. Свойства линейно зависимых векторов.

Определение 02.1.	Отрезок прямой, концами которого служат точки A и B, называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является началом и какая – концом отрезка. Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым направленным отрезком*.

Будем записывать направленный отрезок в виде $\overline{AB},$ полагая, что точка A является началом отрезка, а точка B – его концом. Иногда направленный отрезок представляется просто как $\overline{a}$. Длина отрезка обозначается как $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{a}\right|$ соответственно.

Действия с направленными отрезками

Определение 02.2.	Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если их начала и их концы могут быть совмещены параллельным переносом одного из этих отрезков.

Заметим, что в силу данного определения параллельный перенос направленных отрезков не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Определение 02.3. Совместим начало отрезка $\overline{b}$ с концом $\overline{a}$ (то есть построим направленный отрезок $\overline{b'}$, равный $\overline{b}$, начало которого совпадает с концом отрезка $\overline{a}$), тогда направленный отрезок $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом $\overline{a}$ и конец с концом $\overline{b'}$, называется суммой направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ [1].

Это определение иногда называют *правилом треугольника* (рис. 02.1).

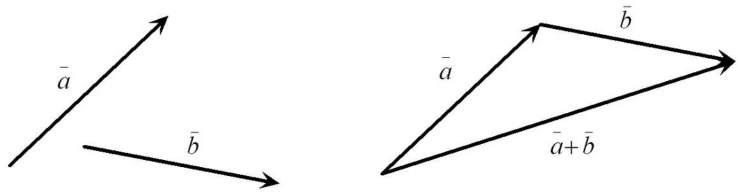

Рис. 02.1

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

1) обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название *правила замыкающей*, смысл которого ясен из рис. 02.2;
2) операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по правилу параллелограмма, равносильному определению 02.3 (см. рис. 02.3);

[1] Для операции замены направленного отрезка на равный, но не совпадающий с ним направленный отрезок будем употреблять термин *параллельный перенос направленного отрезка*.

3) разностью $\bar{a}-\bar{b}$ направленных отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется направленный отрезок $\bar{c}$, удовлетворяющий равенству

$$\bar{a}=\bar{b}+\bar{c};$$

4) любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

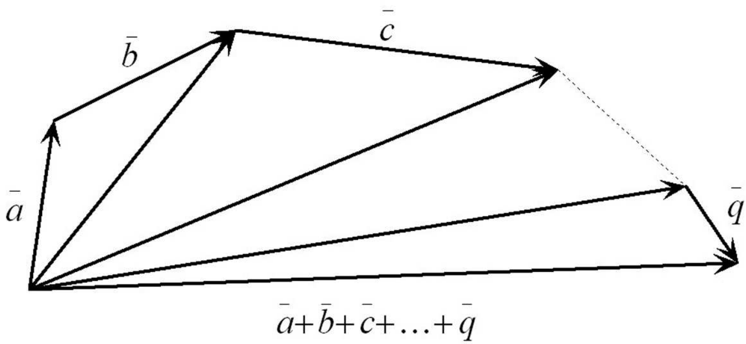

Рис. 02.2

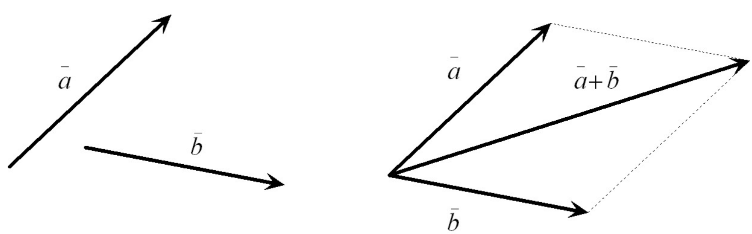

Рис. 02.3

Определение 02.4.	Под произведением $\lambda\overline{a}$ направленного отрезка $\overline{a}$ на число λ понимают: при $\lambda = 0$ нулевой направленный отрезок, при $\lambda \neq 0$ направленный отрезок, для которого длина равна $\lvert\lambda\rvert\lvert\overline{a}\rvert$; направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, направление противоположно направлению $\overline{a}$, если $\lambda < 0$.

Определение множества векторов

Определение 02.5.	Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены описанные выше операции: - сравнения (определение 02.2); - сложения (определение 02.3); - умножения на вещественное число (определение 02.4), называется *множеством векторов*. Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например, $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{o}$.

Теорема 02.1. **Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:**

1°. Коммутативности $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2º. Ассоциативности

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\,;$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}\,.$$

3º. Дистрибутивности

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\,;$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любых веществен-ных чисел λ и μ.

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем

Доказательство свойства коммутативности.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм $ABCD$ (рис. 02.4).

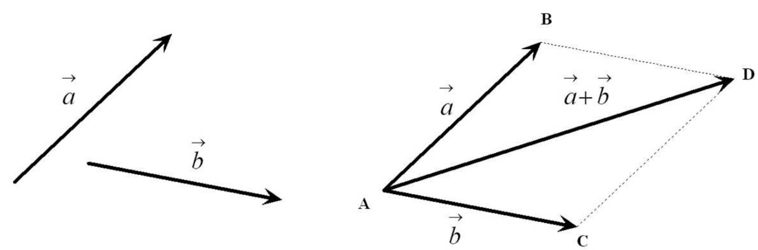

Рис. 02.4

Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то $\vec{CD} = \vec{a}\,;\ \vec{BD} = \vec{b},$ но тогда, по правилу треугольника, из треугольников ACD и ABD следует, что $\vec{AD} = \vec{b} + \vec{CD};\ \vec{AD} = \vec{a} + \vec{BD}$, то есть

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,.$$

Теорема доказана.

Замечания об определении векторов

1°. Иногда вектор определяют просто как объект, характеризуемый числовой величиной и направлением. Хотя формально такой подход и допустим, он может оказаться причиной некоторых проблем, суть которых иллюстрируется следующим примером.

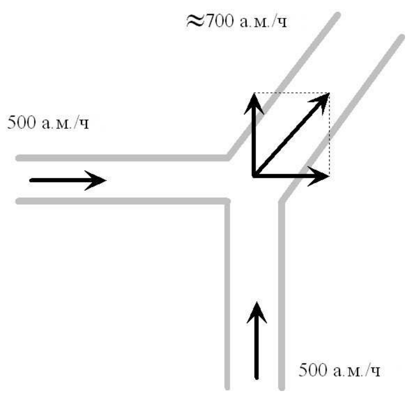

Рис. 02.5

Поток автомобилей (то есть количество автомобилей, проезжающих мимо наблюдателя за единицу времени) на конкретной дороге является объектом, для характеристики которого нужно указать как его величину (число проходящих за единицу времени автомашин), так и его направление.

Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 02.5), и рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рис. 02.5, на котором сливаются два потока автомобилей по 500 автомашин в час каждый.

Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 а-м/ч мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2} \approx 700$ а-м/ч. Отсюда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но тем не менее вектором (в смысле определения 02.5) не является.

2°. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что определение множества векторов 02.5 допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. Например, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы полярные и аксиальные. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым – векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на свободные, скользящие и закрепленные, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.

3°. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 02.5 и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка A, имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля. Положение этой точки в пространстве в момент времени τ_0 можно задать исходящим из точки наблюдения и направленным в A вектором $\vec{r}(\tau_0)$, а в момент времени τ – вектором $\vec{r}(\tau)$.

Поскольку перемещение $\vec{r}(\tau)-\vec{r}(\tau_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 02.5. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, сила тоже есть вектор.

Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Определение 02.6.	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение 02.7.	Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1+\lambda_2 \vec{a}_2+\ldots+\lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_i;\ i=[1,n]$ – некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю одновременно, что равносильно условию

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0,$$

то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отлично от нуля (то есть $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(k) + F(k+1) + \dots + F(n) = \sum_{i=k}^{n} F(i),$$

(читается: «сумма $F(i)$ по i от k до n»), где i – индекс суммирования, k – минимальное значение индекса суммирования, n – максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(i)$ – общий вид слагаемого.

Пример 02.1. По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 \quad =$$

$$= \quad \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \quad = \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \quad = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} \quad = \quad \frac{n-1}{n}.$$

Используя данное соглашение о суммировании, линейную комбинацию $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ можно записать в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$.

Приведем теперь определение важного понятия линейной зависимости системы векторов.

Определение 02.8.	Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их *нетривиальная* линейная комбинация *равная нулевому вектору*, то есть такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.
Определение 02.9.	Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$ следует *тривиальность* линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i$, то есть что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно независимы, то для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$ не нулевой вектор.

Лемма 02.1. **Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$. Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) \vec{a}_k ,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем теперь достаточность. Пусть для определенности $\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k$, тогда $(-1)\vec{a}_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$, причем

$$|-1| + |\lambda_2| + ... + |\lambda_n| > 0 .$$

То есть линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, равная нулевому вектору, нетривиальная.

Лемма доказана.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 02.2. **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

Теорема 02.3. **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

Теорема 02.4. **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теоремы 02.2 и 02.3 предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 02.4.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, таких, что

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{o}\,.$$

Тогда по лемме 02.1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ (рис. 02.6).

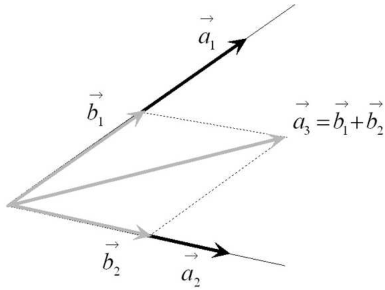

Рис. 02.6

Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, по лемме 02.1 и теореме 02.3 получаем, что

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 , \ \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 ,$$

но тогда

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 ,$$

и векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по лемме 02.1 линейно зависимы. Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Свойства линейно независимых векторов

1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.

2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

Теорема 02.5. **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}$.

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа λ_i, $i = [1, k]$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{o}.$$

Теорема доказана.

Следствие 02.1. **Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.**