Тема 03. Базис. Существование и единственность разложения вектора по базису. Координатное представление векторов. Действия с векторами в координатном представлении. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатном представлении. Общая декартова система координат. Зависимость координат от выбора базиса и начала координат. Матрица перехода и ее свойства.

Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 03.1.	*Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой. *Базисом на плоскости* называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости. *Базисом в пространстве* называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.
Определение 03.2.	Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).
Определение 03.3.	Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из произвольных, линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Теорема 03.1. **Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 ,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – некоторые числа.

Доказательство.

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ (рис. 03.1).

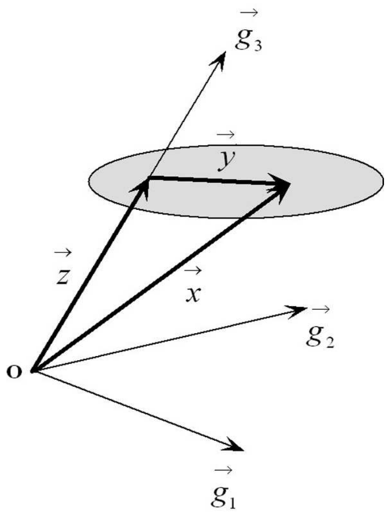

Рис. 03.1

Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда в силу коллинеарности векторов $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ имеем

$$\vec{z} = \xi_3 \vec{g}_3 .$$

Перенеся затем начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая как при доказательстве теоремы 02.4, получим

$$\vec{y} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$$

и, следовательно, $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$, что доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и допустим, что существует другая тройка чисел ξ_1', ξ_2', ξ_3', таких, что

$$\vec{x} = \xi_1' \vec{g}_1 + \xi_2' \vec{g}_2 + \xi_3' \vec{g}_3 .$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\xi_1 - \xi_1') \vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi_2') \vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi_3') \vec{g}_3 = \vec{o} ,$$

где в силу сделанного предположения о неединственности разложения

$$|\xi_1 - \xi_1'| + |\xi_2 - \xi_2'| + |\xi_3 - \xi_3'| > 0 .$$

Но полученное неравенство означает, что линейная комбинация

$$(\xi_1 - \xi_1') \vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi_2') \vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi_3') \vec{g}_3$$

нетривиальна, векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 03.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 03.4. Числа ξ_1, ξ_2, ξ_3 – коэффициенты в разложении $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ – называются *координа-*

тами (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для сокращенной записи координатного разложения вектора $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ используются формы:

1°. $\vec{x}(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, 2°. $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, 3°. $\left\| \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \right\|$,

4°. $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, 5°. $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$,

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю. В общем случае утверждение «*вектор* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *имеет координатное представление* $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ (или *координатный столбец*)» записывается как $\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, будем использовать и сокращенную запись вида $\vec{x} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$. Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости может быть представлен как $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$.

Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ каждый вектор полностью и однозначно описывается упорядоченной тройкой чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 – своим координатным представлением, то естественно возникает вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема 03.2. **В координатном представлении операции с векторами выполняются следующим образом:**

1°. ***Сравнение векторов*** **Два вектора**

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \quad \textbf{и}$$

$$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \vec{y} \right\|_g \quad \textbf{или} \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. ***Сложение векторов***

Координатное представление суммы двух векторов

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

и $$\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

3°. ***Умножение векторов на число***

Координатное представление произведения числа λ на вектор

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

равно произведению числа λ на координатное представление вектора $\vec{x}$:

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g .$$

Доказательство.

Поскольку рассуждения для всех трех пунктов аналогичны, рассмотрим лишь правило сложения векторов в координатной форме.

По свойствам операций сложения и умножения на вещественное число векторов (теорема 03.1) имеем

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) \right\|_g =$$

$$= \left\| (\xi_1 + \eta_1)\vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2)\vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3)\vec{g}_3 \right\|_g =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g .$$

Теорема доказана.

Следствие 03.1. **Координатное представление линейной комбинации $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ является той же линейной комбинацией координатных представлений векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:**

$$\left\| \begin{matrix} \lambda\xi_1 + \mu\eta_1 \\ \lambda\xi_2 + \mu\eta_2 \\ \lambda\xi_3 + \mu\eta_3 \end{matrix} \right\| = \lambda \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \mu \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| .$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема 03.3. **Для того чтобы два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координатные представления $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$**

и $\left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix} \right\|$ **удовлетворяли условию**

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно зависимы, тогда в силу леммы 02.1 имеет место равенство $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ или в координатной форме $\begin{cases} \xi_1 = \lambda\eta_1, \\ \xi_2 = \lambda\eta_2. \end{cases}$ Исключив λ из этих двух скалярных соотношений, получим $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0,$ но это и означает, что $\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0.$

Докажем достаточность. Пусть $\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{matrix} \right\| = 0,$ тогда имеем, что $\dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2}$ (при $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$), то есть соответствующие координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны, что и доказывает линейную зависимость этих векторов.

Случай $\eta_1\eta_2 = 0$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема 03.4. **Для того чтобы три вектора в пространстве $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ с координатными представлениями**

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \vec{y} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \vec{z} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{matrix} \right\|$$

были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли условию

$$\det \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Доказательство.

Пусть линейная комбинация векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ равна нулевому вектору, то есть $\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} = \vec{o}$, или в координатном представлении

$$\lambda_1 \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| + \lambda_3 \left\| \begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Это матричное равенство, очевидно, равносильно системе линейных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{cases} \xi_1\lambda_1 + \eta_1\lambda_2 + \kappa_1\lambda_3 = 0, \\ \xi_2\lambda_1 + \eta_2\lambda_2 + \kappa_2\lambda_3 = 0, \\ \xi_3\lambda_1 + \eta_3\lambda_2 + \kappa_3\lambda_3 = 0, \end{cases}$$

которая (согласно теореме Крамера, теорема 06.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы отличен от нуля.

Но, с другой стороны, очевидно, что данная система всегда имеет нулевое (тривиальное) решение. Значит, условие

$$\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{Vmatrix} \neq 0$$

равносильно системе равенств $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$ что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что альтернативная версия доказательства приводится в теме 04: см. замечанеи 1 (перед теоремой 04.2).

Теорема доказана.

Декартова система координат

Определение 03.5.	Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O, в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.
Определение 03.6.	Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало которого находится в точке O, а конец – в точке M.

Определение 03.7. Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 03.8. Координаты радиуса-вектора точки M называются *координатами точки* M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Проиллюстрируем особенности использования векторно-координатного описания геометрических объектов на примере решения следующих задач.

Задача 03.1. В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ заданы координаты радиусов-векторов точек M и N, которые являются началом и концом вектора $\vec{MN}$. Требуется найти координаты вектора $\vec{MN}$.

Решение. Решение очевидно из рис. 03.2 и свойств координат векторов.

Пусть $\vec{OM} = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\vec{ON} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$.

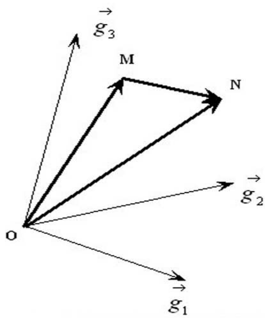

Рис. 03.2

Тогда имеем $\vec{OM}+\vec{MN}=\vec{ON}$ и $\vec{MN}=\vec{ON}-\vec{OM}$. Окончательно

$$\vec{MN}=\begin{Vmatrix}\eta_1-\xi_1\\ \eta_2-\xi_2\\ \eta_3-\xi_3\end{Vmatrix}.$$

Задача 03.2. В некоторой общей декартовой системе координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ заданы координаты несовпадающих точек M_1 и M_2, для которых соответственно

$$\vec{OM}_1=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{OM}_2=\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}.$$

Требуется найти точку M, такую, что $\vec{M_1M}=\lambda\vec{MM}_2$.

Решение. Заметим, что λ может принимать любое значение, кроме -1, при котором точка M «уходит в бесконечность» (рис. 03.3). Найдем радиус-вектор точки M. Из соотношений в треугольниках OM_1M и OMM_2 получаем

$$\vec{OM}_1+\vec{M_1M}=\vec{OM};$$
$$\vec{OM}+\vec{MM}_2=\vec{OM}_2,$$

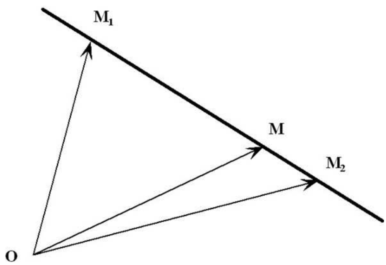

Рис. 03.3

но так как $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$, то

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM})$$

и окончательно

$$\overrightarrow{OM} = \\ = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}.$$

Откуда радиус-вектор точки M, согласно правилам действия с векторами в координатах (см. теорему 03.2), равен

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\dfrac{\xi_1+\lambda\eta_1}{1+\lambda}\\ \dfrac{\xi_2+\lambda\eta_2}{1+\lambda}\\ \dfrac{\xi_3+\lambda\eta_3}{1+\lambda}\end{Vmatrix}.$$

Замечание: к задаче 03.2 сводится задача отыскания центра масс системы материальных точек.

Изменение координат при замене базиса и начала координат

Поскольку выбор системы координат может быть сделан различными способами, вопрос об изменении координат при переходе от одного базиса к другому и замене начала координат представляет значительный практический интерес.

Найдем правила, выражающие зависимость координат произвольной точки пространства, заданных в одной системе координат, от координат этой же точки в другой декартовой системе координат.

Пусть даны две произвольные декартовы системы координат: “старая” $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и “новая” $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ (рис. 03.4). Выразим векторы “нового” базиса, а также вектор $\overrightarrow{OO'}$ через векторы “старого” базиса. В силу теоремы 03.1 это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned} \vec{g}'_1 &= \sigma_{11}\vec{g}_1 + \sigma_{21}\vec{g}_2 + \sigma_{31}\vec{g}_3, \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12}\vec{g}_1 + \sigma_{22}\vec{g}_2 + \sigma_{32}\vec{g}_3, \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13}\vec{g}_1 + \sigma_{23}\vec{g}_2 + \sigma_{33}\vec{g}_3, \\ \overrightarrow{OO'} &= \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \beta_3\vec{g}_3. \end{aligned} \qquad (03.1)$$

Тогда справедлива

Теорема 03.5. **Координаты произвольной точки в “старой” системе координат связаны с ее координатами в “новой” соотношениями**

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1, \\ \xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2, \\ \xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3. \end{aligned} \qquad (03.2)$$

Доказательство.

Пусть некоторая точка M в $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ – “старой” системе имеет координаты $\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\|$, а в “новой” – $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$, соответственно $\begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix}$.

Найдем связь между “старыми” и “новыми” координатами точки M. Имеют место соотношения

$$\vec{OM} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \text{ и}$$

$$\vec{O'M} = \xi'_1 \vec{g}'_1 + \xi'_2 \vec{g}'_2 + \xi'_3 \vec{g}'_3 =$$

$$= \xi'_1(\sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3) +$$

$$+ \xi'_2(\sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3) +$$

$$+ \xi'_3(\sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3) .$$

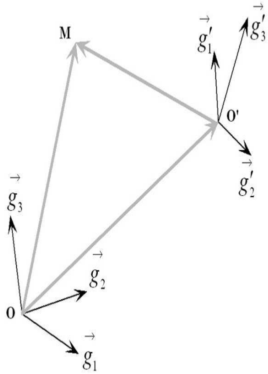

Рис. 03.4

Подставив выражения для векторов $\vec{OM}$, $\vec{O'M}$ и $\vec{OO'}$ в равенство

$$\vec{OM} = \vec{O'M} + \vec{OO'}$$

и перегруппировав слагаемые, получим соотношение вида

$$\lambda_1 \vec{g}_1 + \lambda_2 \vec{g}_2 + \lambda_3 \vec{g}_3 = \vec{o},$$

где

$$\lambda_1 = -\xi_1 + \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1,$$
$$\lambda_2 = -\xi_2 + \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2,$$
$$\lambda_3 = -\xi_3 + \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3.$$

Поскольку векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно независимые, то их линейная комбинация, равная $\vec{o}$, обязана быть тривиальной, и потому

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

или окончательно

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1, \\
\xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2, \\
\xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Определение 03.9. Формулы (03.2) называются *формулами перехода* от системы координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к системе координат $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

При использовании формул перехода следует обратить внимание на то, что «штрихованные» переменные в (03.1) и (03.2) находятся в *разных* частях этих равенств.

Заметим также, что коэффициенты уравнений в формулах (03.2), выражающих “старые” координаты через “новые”, образуют матрицу $\|S\|$, столбцы которой есть координаты “новых” базисных векторов в “старом” базисе, а столбец $\left\|\begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{matrix}\right\|$ содержит координаты “нового” начала координат в “старом” базисе.

Определение 03.10. Матрица $\| S \| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Теорема 03.6. **Для матрицы перехода**

$$\det \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство.

Столбцы матрицы $\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix}$ образованы коэффициентами разложения линейно независимых векторов базиса $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ по векторам базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Тогда из теоремы 03.3 следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

Задача 03.3. На параллелограмме построены две системы координат: “старая” $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и “новая” $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ (рис. 03.5).

Найти формулы перехода, выражающие “новые” координаты через “старые”, если

$$\vec{g}_1' = \overrightarrow{O'O} \quad \text{и} \quad \vec{g}_2' = -\frac{1}{2}\vec{g}_1 .$$

Решение.

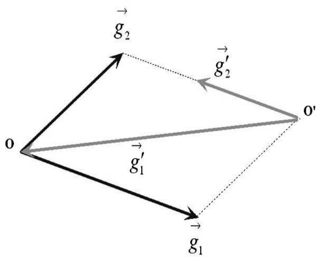

Рис. 03.5

Из свойств параллелограмма находим соотношения, выражающие векторы “старого” базиса через “новые”:

$$\vec{g}_1 = \qquad -2\vec{g}_2',$$
$$\vec{g}_2 = -\vec{g}_1' + 2\vec{g}_2'.$$

Тогда матрица перехода

$$\| S \| = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix} \right\|, \text{ а } \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| .$$

Следовательно, выражения “новых” координат через “старые” имеют вид $\begin{cases} \xi_1' = \qquad -\xi_2 + 1, \\ \xi_2' = -2\xi_1 + 2\xi_2. \end{cases}$

Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости

Рассмотрим две ортонормированные (прямоугольные) системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 03.6.

Из геометрически очевидных соотношений

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi \quad \text{и} \quad \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi$$

получаем матрицу перехода:

$$\| S \| = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\|, \text{ и если } \overrightarrow{OO'} = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|,$$

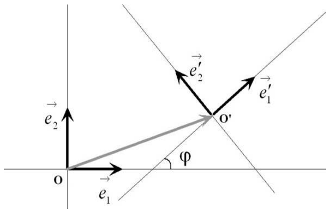

Рис. 03.6

то “старые” координаты будут связаны с “новыми” как

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1' \cos\varphi - \xi_2' \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi_1' \sin\varphi + \xi_2' \cos\varphi + \beta_2. \end{cases} \tag{03.3}$$

В рассмотренном случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса “старой” системы на вектор $\overrightarrow{OO'}$ и поворота на угол φ вокруг точки O'.

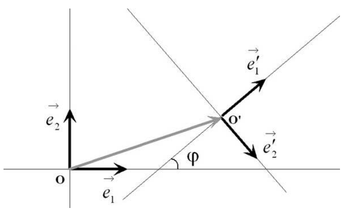

Рис. 03.7

Однако добиться такого совмещения, используя только параллельный перенос и поворот, вообще говоря, нельзя. Соответствующий случай показан на рис. 03.7.

Здесь, после совмещения векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}'_1$, еще потребуется отражение вектора $\vec{e}_2$ симметрично относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1' \cos\varphi + \xi_2' \sin\varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi_1' \sin\varphi - \xi_2' \cos\varphi + \beta_2. \end{cases} \tag{03.4}$$

Формально случаи, показанные на рис. 03.6 и рис. 03.7, можно различать, используя

Определение 03.11.	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости с совмещенными началами называется *правоориентированной*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ при совмещении их начал виден выполняющимся против часовой стрелки. В противном случае эта пара векторов называется *левоориентированной*.

Отметим, что для матрицы перехода $\| S \|$, связывающей два ортонормированных базиса, $\det\| S \| = \pm 1$, причем $\det\| S \| = 1$, если ориентация обеих пар базисных векторов одинаковая (то есть если отражения не требуется), и $\det\| S \| = -1$ для случая базисных пар различной ориентации.