Тема 04. Скалярное произведение векторов. Координатное представление скалярного произведения. Векторное произведение векторов. Координатное представление векторного произведения. Смешанное произведение тройки векторов. Координатное представление смешанного произведения. Двойное векторное произведение.

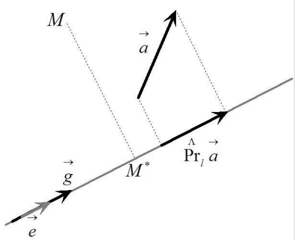

Рис. 04.1

Определение 04.1.	Прямую l с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{g}$ будем называть *осью*. Вектор $\vec{g}$ называется *направляющим* вектором оси l.
Определение 04.2.	Пусть дана точка M, не лежащая на оси l, тогда основание перпендикуляра, опущенного из M на ось l – точку M^*, будем называть *ортогональной проекцией* точки M на ось.

Примером оси может служить *ось координат* – прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

Определение 04.3.	Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется *вектор* $\overset{\wedge}{\text{Pr}}_l\,\vec{a}$, лежащий на оси l, начало которого есть ортогональная проекция начала вектора

	$\vec{a}$ на ось l, а конец – ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$.

Выполним нормировку направляющего вектора $\vec{g}$, то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{g}}{|\vec{g}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси l (рис. 04.1).

Определение 04.4.	*Численным значением* ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l называется координата вектора $\hat{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$[4].
Определение 04.5.	*Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал.

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l обозначим как $\text{Пр}_l\, \vec{a}$. Из рис. 04.2 очевидно, что

$$\text{Пр}_l\, \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi, \quad \text{где } \varphi \text{ есть угол между } \vec{a} \text{ и } \vec{e}.$$

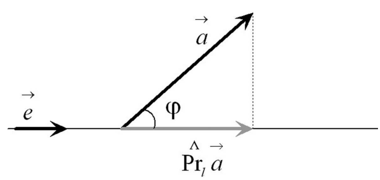

Рис. 04.2

[4] Верхний символ «∧» будет использоваться для обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

Свойства ортогональных проекций

1.1°. *Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов:*

$$\overset{\wedge}{\Pr}_l(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\overset{\wedge}{\Pr}_l\,\vec{a}_1+\overset{\wedge}{\Pr}_l\,\vec{a}_2\,.$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 04.3.

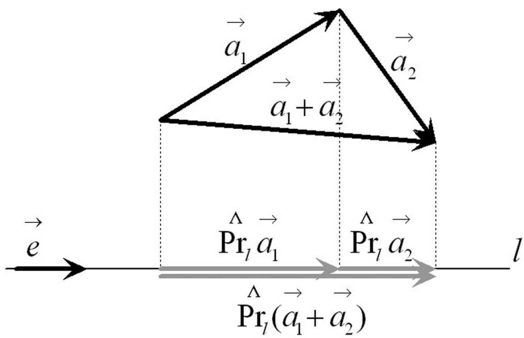

Рис. 04.3

1.2°. *Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число:*

$$\overset{\wedge}{\Pr}_l(\lambda\,\vec{a})=\lambda\,\overset{\wedge}{\Pr}_l\,\vec{a}\,.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций:

$$\overset{\wedge}{\Pr}_l(\lambda_1\,\vec{a}_1+\lambda_2\,\vec{a}_2)=\lambda_1\,\overset{\wedge}{\Pr}_l\,\vec{a}_1+\lambda_2\,\overset{\wedge}{\Pr}_l\,\vec{a}_2\,.$$

Справедливость свойств 1.1° и 1.2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Свойства численных значений ортогональных проекций

$$2.1^\circ.\ \text{Пр}_l(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\text{Пр}_l\,\vec{a}_1+\text{Пр}_l\,\vec{a}_2\ ;$$

$$2.2^\circ.\ \text{Пр}_l\,\lambda\vec{a}=\lambda\,\text{Пр}_l\,\vec{a}\,.$$

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\text{Пр}_l(\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2)=\lambda_1\,\text{Пр}_l\,\vec{a}_1+\lambda_2\,\text{Пр}_l\,\vec{a}_2\,.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 04.6.	*Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. Таким образом, для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}\,||\vec{b}|\cos\varphi\,,$$

где φ – угол между векторами-сомножителями. При этом согласно определению 04.5, $0\le\varphi\le\pi$.

Заметим также, что если $\vec{b}\ne\vec{o}$, то справедливо равенство

$$(\vec{a},\vec{b})=\left|\vec{b}\right|\ \text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,.$$

Свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a},\vec{b})=0$ при $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*.

2°. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (коммутативность) следует из определений скалярного произведения и угла между векторами.

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b})$ (дистрибутивность).

Доказательство.

Если $\vec{b}=\vec{o}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{b}\neq\vec{o}$, тогда

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=$$

$$=|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}_1+|\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}_2=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b}).$$

Свойство доказано.

4°. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$.

5°. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\geq 0\ \ \forall\vec{a}\,;\quad |\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$

(заметим также, что условия $(\vec{a},\vec{a})=0$ и $\vec{a}=\vec{o}$ равносильны).

6°. При $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, где φ – угол меду векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть задан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные разложения которых в этом базисе имеют вид

$$\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 .$$

По свойствам 3° и 4° скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \; , \; \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) =$$

$$= \xi_1\eta_1(\vec{g}_1, \vec{g}_1) + \xi_1\eta_2(\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \xi_1\eta_3(\vec{g}_1, \vec{g}_3) +$$

$$+ \xi_2\eta_1(\vec{g}_2, \vec{g}_1) + \xi_2\eta_2(\vec{g}_2, \vec{g}_2) + \xi_2\eta_3(\vec{g}_2, \vec{g}_3) +$$

$$+ \xi_3\eta_1(\vec{g}_3, \vec{g}_1) + \xi_3\eta_2(\vec{g}_3, \vec{g}_2) + \xi_3\eta_3(\vec{g}_3, \vec{g}_3) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (\xi_j\eta_1(\vec{g}_j, \vec{g}_1) + \xi_j\eta_2(\vec{g}_j, \vec{g}_2) + \xi_j\eta_3(\vec{g}_j, \vec{g}_3)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \xi_j \eta_i (\vec{g}_j, \vec{g}_i).$$

В случае *ортонормированного* базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j, \\ 0, i \neq j \; , \end{cases}$$

где δ_{ij} – так называемый *символ Кронекера*. Откуда для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 ,$$

из которой следуют полезные соотношения:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$$

и для $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$

$$\cos\varphi = \frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2}}\,.$$

Отметим, что последнее равенство в сочетании с условием $|\cos\varphi| \leq 1$ приводит к *неравенству Коши–Буняковского*:

$$\forall \xi_i;\eta_i\ ,\ i=[1,3]$$

$$\left|\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3\right| \leq \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\,\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2}\,.$$

Задача 04.1. *Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны радиусы-векторы этих точек.*

Решение. Пусть задана ортонормированная система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ и радиусы-векторы точек $\vec{OM}_2 = \begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}$ и $\vec{OM}_1 = \begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}$ в ней. Тогда, используя решение задачи 03.1, из равенства

$$\vec{M_1M}_2 = (\xi_1-\eta_1)\vec{e}_1+(\xi_2-\eta_2)\vec{e}_2+(\xi_3-\eta_3)\vec{e}_3$$

и свойств скалярного произведения получаем

$$|\vec{M_1M}_2| = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2}\,.$$

Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 04.7. Упорядоченная тройка *некомпланарных* векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *левой*.

Определение 04.8. *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, такой, что

1) $|\vec{x}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{x}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным *нулевому* вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения 04.8 следует, что

1) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

Свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность, следует из определения 04.5 и нечетности функции $\sin\varphi$).

2°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{a},\vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda\neq 0$).

3°. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (дистрибутивность).

Для доказательства дистрибутивности векторного произведения воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

Лемма 04.1. **Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых находятся в общей точке на оси с базисом $\vec{l}$. Тогда результат поворота суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на угол φ вокруг оси $\vec{l}$ равен сумме результатов поворота каждого из этих векторов вокруг оси $\vec{l}$ на угол φ.**

Утверждение леммы 04.1 будем обозначать как

$$\hat{\text{Пов}}_{\varphi,\vec{l}}(\vec{a}+\vec{b})=\hat{\text{Пов}}_{\varphi,\vec{l}}(\vec{a})+\hat{\text{Пов}}_{\varphi,\vec{l}}(\vec{b}).$$

Справедливость этого утверждения ясна из рис. 04.4.

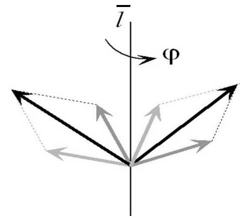

Рис. 04.4

Лемма 04.2. **Если $\left|\vec{e}\right|=1$ и $\vec{p}\neq\vec{o}$, то вектор $[\vec{p},\vec{e}]$ равен результату поворота *проекции вектора* $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$, вокруг вектора $\vec{e}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.**

Доказательство.

Проведем две плоскости, одна из которых проходит через точку O – общее начало векторов $\vec{p}$ и $\vec{e}$, перпендикулярно $\vec{e}$, а вторая проходит через векторы $\vec{p}$ и $\vec{e}$.

Ортогональная проекция вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{e}$, будет лежать на линии пересечения построенных плоскостей, и тогда из определения векторного произведения следует (рис. 04.5):

$$\left| [\vec{p}, \vec{e}\,] \right| = \left|\vec{p}\right| \left|\vec{e}\right| \left|\sin\alpha\right| = \left|\vec{p}\right| \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right|,$$

поскольку $\left|\vec{e}\right| = 1.$ Следовательно, в рассматриваемом случае $[\vec{p}, \vec{e}\,] = \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2}, \vec{e}}(\hat{\text{Pr}}_{\perp \vec{e}}\, \vec{p})$, где $\hat{\text{Pr}}_{\perp \vec{e}}(\vec{p})$ обозначает ортогональное проектирование вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$.

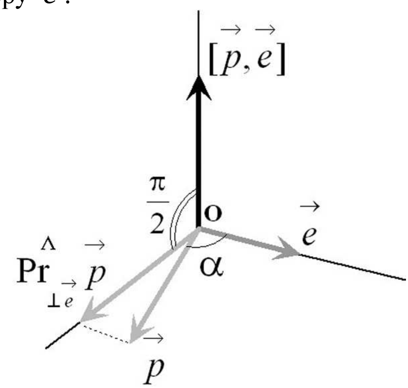

Рис. 04.5

Лемма доказана.

Докажем теперь дистрибутивность векторного произведения.

Доказательство свойства 3°.

Если $\vec{c} = \vec{o}$, то свойство 3° очевидно. Пусть $\vec{c} \neq \vec{o}$, тогда в силу утверждений лемм 04.1, 04.2 и свойства 1.1° следует

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=|\vec{c}|[\vec{a}+\vec{b},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}]=|\vec{c}|\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})\right)=$$

$$=|\vec{c}|\,\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{a}+\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{b}\right)=$$

$$=|\vec{c}|\left(\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{a}\right)+\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\left(\hat{\text{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{b}\right)\right)=$$

$$=|\vec{c}|([\,\vec{a},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}]+[\vec{b},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\,])=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}].$$

Свойство доказано.

Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ (то есть такой, что векторы $\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3$ образуют *правую тройку*) и пусть в этом базисе векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координатные разложения

$$\vec{a}=\xi_1\,\vec{g}_1+\xi_2\,\vec{g}_2+\xi_3\,\vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{b}=\eta_1\,\vec{g}_1+\eta_2\,\vec{g}_2+\eta_3\,\vec{g}_3\,.$$

По свойствам 2° и 3° векторного произведения

$$[\vec{a},\vec{b}]=[\xi_1\,\vec{g}_1+\xi_2\,\vec{g}_2+\xi_3\,\vec{g}_3\;,\;\eta_1\,\vec{g}_1+\eta_2\,\vec{g}_2+\eta_3\,\vec{g}_3]=$$

$$=\xi_1\eta_1[\vec{g}_1,\vec{g}_1]+\xi_1\eta_2[\vec{g}_1,\vec{g}_2]+\xi_1\eta_3[\vec{g}_1,\vec{g}_3]+$$

$$+\xi_2\eta_1[\vec{g}_2,\vec{g}_1]+\xi_2\eta_2[\vec{g}_2,\vec{g}_2]+\xi_2\eta_3[\vec{g}_2,\vec{g}_3]+$$

$$+\xi_3\eta_1[\vec{g}_3,\vec{g}_1]+\xi_3\eta_2[\vec{g}_3,\vec{g}_2]+\xi_3\eta_3[\vec{g}_3,\vec{g}_3]=$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\xi_j\eta_i[\vec{g}_j,\vec{g}_i].$$

Обозначим через $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ попарные векторные произведения базисных векторов $[\vec{g}_i,\vec{g}_j]$ следующим образом:

$$\vec{f}_1=[\vec{g}_2,\vec{g}_3];\ \vec{f}_2=[\vec{g}_3,\vec{g}_1];\ \vec{f}_3=[\vec{g}_1,\vec{g}_2].$$

Подставив эти обозначения в выражение для $[\vec{a},\vec{b}]$ и использовав формулу, связывающую определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков (см. теорему 01.1), получим

$$[\vec{a},\vec{b}]=(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)\vec{f}_1-(\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1)\vec{f}_2+(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\vec{f}_3=$$
$$=\vec{f}_1\det\left\|\begin{matrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{matrix}\right\|-\vec{f}_2\det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{matrix}\right\|+\vec{f}_3\det\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{matrix}\right\|=$$
$$=\det\left\|\begin{matrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{matrix}\right\|.$$

Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ ортонормированный, образующий *правую тройку* векторов, тогда по определению 04.5

$$\vec{f}_1=\vec{e}_1,\quad \vec{f}_2=\vec{e}_2,\quad \vec{f}_3=\vec{e}_3.$$

Тогда формула для векторного произведения векторов в правом ортонормированном базисе упростится:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \det\begin{Vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix}.$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия.

Следствие 04.1. **Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в *любом базисе***

$$\det\begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} = 0,$$

или же $\dfrac{\xi_1}{\eta_1} = \dfrac{\xi_2}{\eta_2} = \dfrac{\xi_3}{\eta_3}$.

Следствие 04.2. **В *ортонормированном базисе* площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле**

$$S = \sqrt{\det^2\begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \det^2\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \det^2\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix}},$$

причем для случая базиса на плоскости

$$S = \left|\det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix}\right|.$$

Смешанное произведение

Определение 04.9. *Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, называется число $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Теорема 04.1. **Абсолютная величина смешанного произведения векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. При этом если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарная и правая, то их смешанное произведение положительно, а если тройка левая, то – отрицательно.**

Доказательство.

Если $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$, тогда по определению скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \, \text{Пр}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c},$$

где $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а

$$|\text{Пр}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}| = |\vec{c}| |\cos \alpha|$$

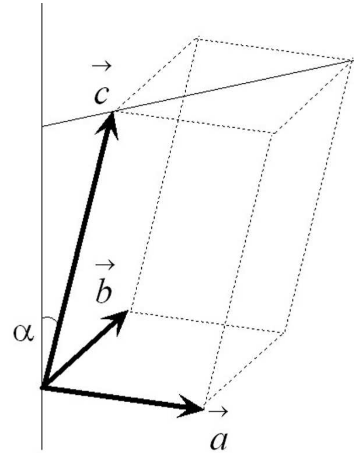

Рис. 04.6

– высота параллелепипеда с основанием S, откуда (см. рис. 04.6)

$$V = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|.$$

Наконец,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$$

$$= |[\vec{a}, \vec{b}]| \; |\vec{c}| \; \cos\alpha,$$

что и позволяет сделать заключение о знаке смешанного произведения.

Теорема доказана.

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) =$

$$= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b});$$

2°. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$

3°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}),$

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 04.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных.

Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, координатные разложения которых в этом базисе имеют вид

$$\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \quad \vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$$

и соответственно $\vec{c} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$.

По свойствам векторного произведения имеем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} \vec{f}_3 ,$$

где векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ определены были ранее.

Из равенств $\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]$; $\vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]$; $\vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]$ следует, что

$$(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \begin{cases} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

и для $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ получаем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \left(\kappa_1 \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} - \kappa_2 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \kappa_3 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} \right) (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) = \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3),$$

поскольку выражение, стоящее в больших круглых скобках, является разложением определителя 3-го порядка по последней строке. (См. теорему 01.1.)

Замечания. 1°. Из последней формулы и теоремы 04.1 следует справедливость теоремы 03.4.

2°. В случае *ортонормированного правого* базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$, поэтому в таком базисе

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix}.$$

3°. Для векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ справедлива

Теорема 04.2. **Тройка векторов $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ образует базис (называемый *взаимным* для базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$).**

Доказательство.

Для доказательства достаточно показать, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ линейно независимы.

Пусть существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такие, что

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{o}.$$

Умножив последовательно обе части этого равенства скалярно на $\vec{g}_j, \quad j = [1,3]$, получим

$$\lambda_1(\vec{f}_1, \vec{g}_j) + \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{g}_j) + \lambda_3(\vec{f}_3, \vec{g}_j) = 0, \quad j = [1,3]. \tag{04.1}$$

Для девяти выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$, $i = [1,3]$, $j = [1,3]$ имеем $(\vec{f}_i, \vec{g}_j) = \begin{cases} \alpha, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases}$, где $\alpha \neq 0$. Действительно, выражения $(\vec{f}_i, \vec{g}_i)$, $i = [1,3]$ суть смешанные произведения некомпланарных векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и потому отличны от нуля. Остальные шесть выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$, $i \neq j$ будут равны нулю как смешанные произведения векторов, среди которых имеется пара равных.

Подставляя значения выражений в систему равенств (04.1), получим, что все $\lambda_i = 0$, $i = [1,3]$, что доказывает линейную зависимость векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Теорема доказана.

Двойное векторное произведение

Определение 04.10.	*Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$.

Для решения ряда задач оказывается полезной

Теорема 04.3. **Имеет место равенство**

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}) \quad \forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}.$$

Доказательство.

Заметим, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно ортогональны, то доказываемое равенство очевидно, поэтому далее будем предполагать, что числа $(\vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{a}, \vec{c})$ не равны нулю одновременно.

Обозначим $\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$. По определению векторного произведения вектор $\vec{x}$ ортогонален как вектору $[\vec{b}, \vec{c}]$, так и $\vec{a}$.

1°. По свойствам смешанного произведения условие $(\vec{x}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ означает, что тройка векторов $\{\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}\}$ компланарная и в силу леммы 02.1

$$\vec{x} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c},$$

где λ и μ − некоторые числа.

2°. Из условия $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ следует, что

$$(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}, \vec{a}) = 0 \text{ или } \lambda(\vec{b}, \vec{a}) + \mu(\vec{c}, \vec{a}) = 0.$$

3°. Рассмотрим теперь вектор $\vec{r}$, удовлетворяющий следующему набору условий:

а) $\vec{r}$ (так же как и вектор $\vec{x}$) принадлежит плоскости, проходящей через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

б) $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$ и $(\vec{r}, \vec{c}) > 0$. (См. рис. 04.7.)

Найдем теперь выражение для смешанного произведения вида $(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, [\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]])$. С одной стороны, по свойствам смешанного произведения и в силу $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$ имеем

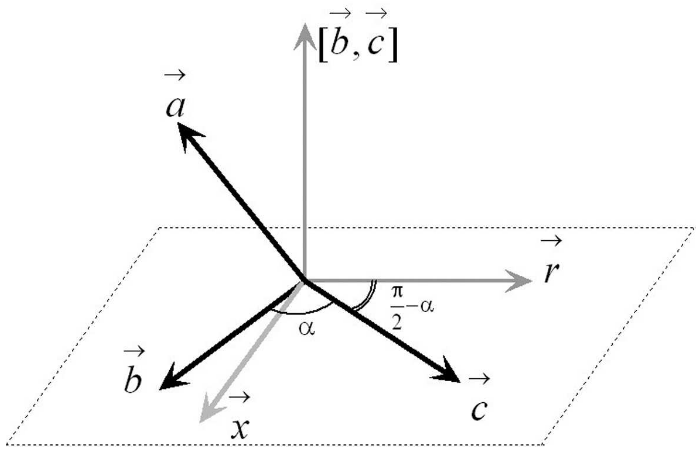

Рис. 04.7

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = -(\vec{r}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = -(\vec{r}, [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]) = -(\vec{r}, \vec{x}) =$$

$$= -(\vec{r}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = -\lambda(\vec{r}, \vec{b}) - \mu(\vec{r}, \vec{c}) = -\mu(\vec{r}, \vec{c}).$$

С другой стороны, вектор $[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ сонаправлен с $\vec{b}$, то есть $\exists \kappa > 0$ такое, что $[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \kappa\vec{b}$. Поэтому

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \kappa(\vec{a}, \vec{b}) \ .$$

Значение κ найдем из соотношений

$$\kappa\left|\vec{b}\right| = \left|[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]]\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\alpha\sin(\angle\{\vec{r}; [\vec{b}, \vec{c}]\}) =$$

$$= \left|\vec{r}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = (\vec{r}, \vec{c})\left|\vec{b}\right| \quad \Rightarrow \quad \kappa = (\vec{r}, \vec{c}) \ ,$$

поскольку угол между $\vec{r}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ прямой. Значит,

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{r}, \vec{c}).$$

Приравнивая выражения для $(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}])$, получаем

$$-\mu(\vec{r}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{r}, \vec{c}) \quad \text{или} \quad \mu = -(\vec{a}, \vec{b}) .$$

Наконец, из соотношения, полученного в п. 2°, находим, что

$$\lambda = (\vec{a}, \vec{c}) .$$

Теорема доказана.