Тема 05. Способы задания прямой на плоскости. Условие совпадения прямых, задаваемых разными линейными уравнениями. Геометрические свойства линейных неравенств. Способы задания плоскости в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Формулы для расстояний: от точки до прямой на плоскости, от точки до плоскости в пространстве и от точки до прямой в пространстве.

Как было показано, использование системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства и множеством их радиусов-векторов. Это в свою очередь позволяет свести исследование свойств линий, поверхностей или тел к изучению множеств радиусов-векторов, соответствующих точкам, образующим исследуемые геометрические объекты.

Данная тема посвящена методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов – прямой и плоскости – средствами векторной алгебры. При этом будут использоваться стандартные обозначения: координаты по оси *абсцисс* через x, координаты по оси *ординат* через y и координаты по оси *аппликат* через z, равно как и другие общепринятые формы записи уравнений.

Прямая на плоскости

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, проходящая через точку $\vec{r}_0$, с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\vec{a}$.

Определение 05.1.	Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Теорема 05.1. **Множество радиусов-векторов точек прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где τ – произвольный вещественный параметр.**

Доказательство.

Пусть $\vec{r}$ – некоторая точка на прямой L. Ненулевой вектор $\vec{a}$ образует базис на прямой L, поэтому лежащий на этой прямой вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ (рис. 05.1) может быть для каждого $\vec{r}$ представлен единственным образом в виде $\vec{r} - \vec{r}_0 = \tau \vec{a}$. Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a} \qquad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Теорема доказана.

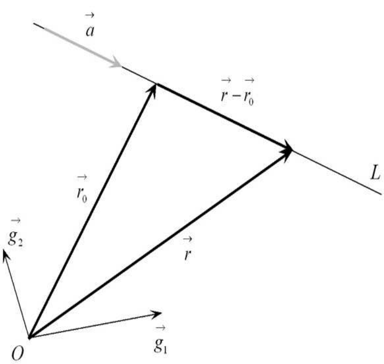

Рис. 05.1

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов всех точек прямой L. Пусть $\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$, $\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \vec{a} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} \right\|$, тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 05.2. **Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + C = 0\,, \quad |A| + |B| > 0\,.$$

Доказательство.

Условие коллинеарности ненулевых векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$ в координатной форме имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Откуда $a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0$, или же

$$Ax + By + C = 0\,, \quad |A| + |B| > 0\,,$$

где $A = a_y$; $B = -a_x$, $C = -a_y x_0 + a_x y_0$, и мы получили, что уравнение прямой есть алгебраическое уравнение первой степени. Заметим, что справедливость неравенства

$$|A| + |B| > 0$$

следует из условия $\vec{a} \neq \vec{o} \Leftrightarrow |a_x| + |a_y| > 0$.

Теорема доказана.

Теорема 05.3. **Всякое уравнение вида**

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0\,,$$

в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

Доказательство.

Пусть дано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0\,, \quad |A| + |B| > 0\,.$$

Подберем числа x_0 и y_0 так, чтобы $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

Вычитая почленно два эти равенства, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\,.$$

Возьмем точку $\left\|\vec{r}_0\right\|_g=\left\|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right\|$ и вектор $\left\|\vec{a}\right\|_g=\left\|\begin{matrix}-B\\A\end{matrix}\right\|$. По теореме 05.2 имеем, что прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ в направлении вектора $\vec{a}$, имеет уравнение вида

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\,.$$

Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

Замечание: из теорем 05.2–05.3 следует, что каждое линейное уравнение в декартовой системе координат на плоскости задает некоторую конкретную прямую, но, с другой стороны, конкретная прямая на плоскости может быть задана *бесчисленным множеством* линейных уравнений и естественно возникает вопрос: при каких условиях два разных линейных уравнения задают одну и ту же прямую?

Теорема 05.4. **Для того чтобы уравнения**

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad |A_1|+|B_1|>0 \text{ и}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,\quad |A_2|+|B_2|>0$$

были уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda\neq 0$, такое, что

$$A_1=\lambda A_2;\ B_1=\lambda B_2;\ C_1=\lambda C_2.$$

Доказательство достаточности.

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны и имеет место равенство $A_2x+B_2y+C_2=0$. Тогда

$$A_2x+B_2y+C_2=\frac{1}{\lambda}A_1x+\frac{1}{\lambda}B_1y+\frac{1}{\lambda}C_1=$$

$$=\frac{1}{\lambda}(A_1x+B_1y+C_1)=0,$$

но поскольку $\lambda\neq 0$, то $A_1x+B_1y+C_1=0$.

Аналогично из равенства $A_1x+B_1y+C_1=0$ следует, что и $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Доказательство необходимости.

Пусть уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

суть уравнения одной и той же прямой в некоторой декартовой системе координат. Тогда их направляющие векторы коллинеарны (по теореме 05.2) и существует $\lambda\neq 0$, такое, что

$$A_1=\lambda A_2;\ B_1=\lambda B_2.$$

С другой стороны, из равносильности уравнений

$$\lambda A_2x+\lambda B_2y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

следует, также, что и $C_1=\lambda C_2$.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в *полярной системе координат* оно может иметь вид

$$\rho=P\sec(\varphi+\varphi_0).$$

Способы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки $\vec{r}_1 = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\|$ и $\vec{r}_2 = \left\|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right\|$

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{matrix}\right\|$, то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или

$$\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 .$$

Соответственно в координатах, исключив параметр τ, получим одну из следующих формул:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0;$$

$$y = y_1 \ \forall x, \text{ если } y_2 = y_1;$$

$$x = x_1 \ \forall y, \text{ если } x_2 = x_1.$$

Проверьте самостоятельно, что эти три случая могут быть описаны одним условием:

$$\det\left\|\begin{matrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{matrix}\right\| = 0 .$$

Следствие 05.1. **Для того чтобы три точки $\vec{r}_1 = \left\|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right\|$, $\vec{r}_2 = \left\|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right\|$ и $\vec{r}_3 = \left\|\begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix}\right\|$ лежали на одной прямой, необходимо и**

достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли уравнению

$$\det\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{Vmatrix} = 0 .$$

2°. Векторное уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через данную точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n} = \begin{Vmatrix} n_x \\ n_y \end{Vmatrix}$)

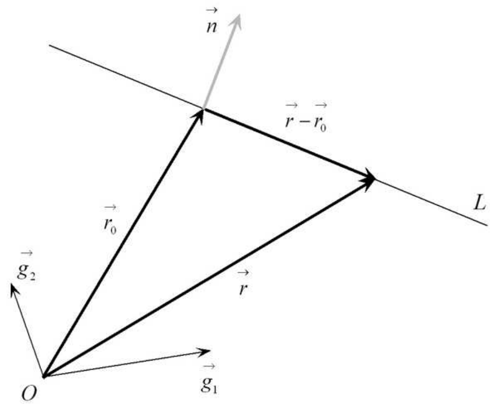

Рис. 05.2

Если в качестве направляющего вектора данной прямой взять $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Vmatrix}$ (где $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$ − радиус-вектор некоторой ее точки) (рис. 05.2), то в силу ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ получим

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 ,$$

или же

$$(\vec{n}, \vec{r}) = d , \quad \text{где } d = (\vec{n}, \vec{r}_0) .$$

При обратном переходе от записи уравнения прямой в виде $(\vec{n},\vec{r}) = d$ к $(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$ в качестве $\vec{r}_0$ можно взять (проверьте это самостоятельно!) $\vec{r}_0 = \dfrac{d}{(\vec{n},\vec{n})}\vec{n}$.

В $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ – ортонормированной системе координат уравнение $(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$ приобретает вид

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0,$$

или

$$n_x x + n_y y = d\text{, где } d = n_x x_0 + n_y y_0 .$$

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой $Ax+By+C=0$, приходим к заключению, что в *ортонормированной* системе координат вектор $\vec{n}$, для которого $\left\|\vec{n}\right\|_g = \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|$, будет ортогонален этой прямой.

Определение 05.2.	Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой L.

3°. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим скалярное уравнение прямой в *ортонормированной* системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$

$$Ax+By+C=0,\ |A|+|B|>0$$

и преобразуем его, разделив обе части на $\sqrt{A^2+B^2}$. Подставляя обозначения

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\ ,$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho = 0\,.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ ясен из рис. 05.3.

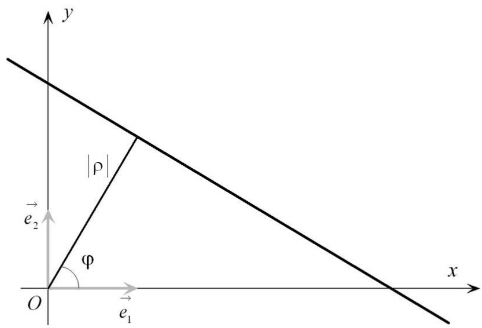

Рис. 05.3

Геометрические свойства линейных неравенств

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство

$$Ax + By + C > 0\ ,\ \left|\,A\,\right| + \left|\,B\,\right| > 0$$

определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой

$$Ax + By + C = 0\,,\quad \left|\,A\,\right| + \left|\,B\,\right| > 0\,.$$

Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая $L:\ (\vec{n},\vec{r}) = d$ делит плоскость P на две части, обозначаемые P_+ и P_- (см. рис. 05.4).

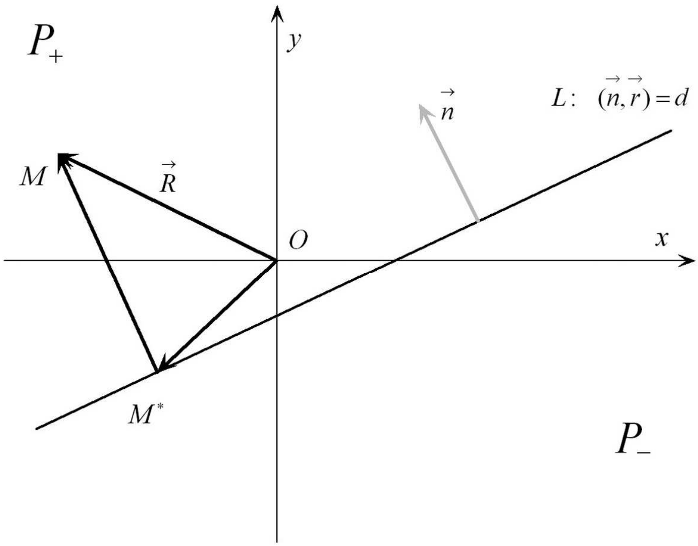

Рис. 05.4

Определение 05.3.	Будем говорить, что точка M с радиусом-вектором $\vec{R}$ принадлежит P_+ (или соответственно P_-), если существует $\lambda > 0$ (соответственно $\lambda < 0$), такое, что $\overrightarrow{M^*M} = \lambda \vec{n}$, где точка M^* есть ортогональная проекция M на прямую L.

Тогда справедлива

Теорема 05.5. **Для того чтобы $M \in P_+$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $(\vec{n}, \vec{R}) > d$.**

Доказательство необходимости.

Пусть $M \in P_+$, то есть существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\overrightarrow{M^*M} = \lambda \vec{n}.$$

Получим оценку величины $(\vec{n}, \vec{R})$. Поскольку $M^* \in L$, то $(\vec{n}, \overrightarrow{OM^*}) = d$, и

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \overrightarrow{OM^*} + \overrightarrow{M^*M}) = (\vec{n}, \overrightarrow{OM^*}) + (\vec{n}, \overrightarrow{M^*M}) =$$

$$= d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d$$

в силу положительности λ.

Доказательство достаточности.

Пусть $(\vec{n}, \vec{R}) > d$ и $\overrightarrow{M^*M} = \lambda \vec{n}$, тогда из $(\vec{n}, \overrightarrow{OM^*}) = d$ получаем

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \overrightarrow{OM^*} + \overrightarrow{M^*M}) =$$

$$= (\vec{n}, \overrightarrow{OM^*}) + (\vec{n}, \overrightarrow{M^*M}) = d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d \quad \Rightarrow \quad \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > 0.$$

А в силу $\vec{n} \neq \vec{o}$ следует, что $\lambda > 0$ и, значит, $M \in P_+$.

Теорема доказана.

Задача 05.1. *Дана система координат* $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ *на плоскости и прямая* L *с уравнением* $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. *Найти расстояние до этой прямой от точки, радиус-вектор которой*

$$\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}.$$

Решение 1°. Пусть $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{n}$ (рис. 05.5).

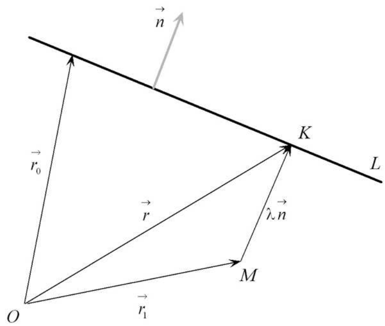

Рис. 05.5

2°. Точка K принадлежит данной прямой, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n}, \vec{r}_1 + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$. Откуда

$$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}.$$

3°. Подставив λ в выражение для $\vec{MK}$, получим

$$|\vec{MK}| = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|})|.$$

4°. Пусть система координат *ортонормированная*. Для уравнения $Ax + By + C = 0,\ |A| + |B| > 0$, как было показано, вектор $\vec{n} = \left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\|$ перпендикулярен прямой. Поэтому

$$|\vec{MK}| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Принимая во внимание, что точка $\vec{r}_0$ лежит на прямой L и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, окончательный ответ можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Определение 05.4. *Пучком прямых* на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую заданную точку, именуемую *вершиной пучка.*

Теорема 05.6. **Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых**

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Тогда

1) **для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β, таких, что**
$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$
есть уравнение данной прямой,

2) **при любых, не равных нулю одновременно α и β, уравнение**
$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ **есть уравнение некоторой прямой данного пучка.**

Доказательство.

1°. Возьмем некоторую точку $\vec{r}^{\,*}=\left\|\begin{matrix}x^*\\ y^*\end{matrix}\right\|$, не совпадающую с вершиной пучка, и примем в качестве параметров

$$\alpha=A_2x^*+B_2y^*+C_2\text{, и }\beta=-(A_1x^*+B_1y^*+C_1).$$

Заметим при этом, что $|\alpha|+|\beta|>0$, поскольку точка $\vec{r}^{\,*}$ не принадлежит данным прямым одновременно. Кроме того, прямая

$$(A_2x^*+B_2y^*+C_2)(A_1x+B_1y+C_1)-$$
$$-(A_1x^*+B_1y^*+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

проходит как через точку $\vec{r}^{\,*}$, так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2°. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

При этом уравнение

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

является уравнением прямой, поскольку из

$$|A_1| + |B_1| > 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0 \text{ и } |\alpha| + |\beta| > 0$$

следует, что $|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0$.

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0, \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0. \end{cases} \qquad (05.1)$$

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ по построению имеют, по крайней мер, одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 05.4 они совпадают тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$, для которого $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$. А последние два равенства по теореме 03.3 равносильны условию $\det\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{Vmatrix} = 0.$

В рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому

$$\det\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{Vmatrix} \neq 0$$

и в силу теоремы Крамера система линейных уравнений 05.1 может иметь лишь единственное решение. С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение $\alpha = \beta = 0$, что в совокупности противоречит неравенству

$$|\alpha| + |\beta| > 0.$$

Следовательно,

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0.$$

Теорема доказана.

Определение 05.5. Уравнение

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$$

где $|\alpha| + |\beta| > 0$, называется уравнением *пучка прямых* на плоскости.

Плоскость в пространстве

Пусть даны система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ в пространстве и плоскость S, проходящая через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0$ и лежащими на S неколлинеарными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Определение 05.6. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ называются *направляющими векторами* плоскости S.

Теорема 05.7. **Множество радиусов-векторов точек плоскости S представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$, где φ и θ – произвольные вещественные параметры.**

Доказательство.

Пусть $\vec{r}$ – некоторая точка плоскости S. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ образуют базис на S, и лежащий на этой плоскости (рис. 05.6) вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ может быть единственным образом представлен как линейная комбинация векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ вида:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\varphi\,\vec{p}+\theta\,\vec{q},$$

и, следовательно, уравнение плоскости будет иметь вид

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\,\vec{p}+\theta\,\vec{q},$$

где $\varphi\in(-\infty,+\infty)$ и $\theta\in(-\infty,+\infty)$.

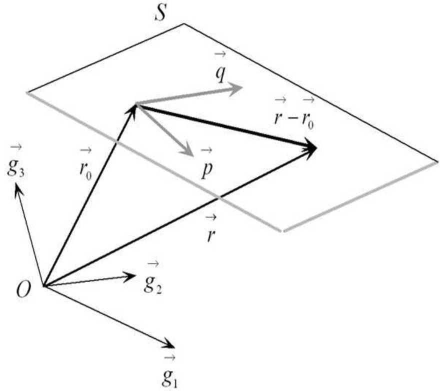

Рис. 05.6

Теорема доказана.

Иными словами, каждая пара чисел φ и θ определяет некоторую точку плоскости S, а радиус-вектор каждой ее точки представим как

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\,\vec{p}+\theta\,\vec{q}\,.$$

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов всех точек плоскости S. Пусть $\left\|\vec{r}\right\|_g=\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}$, $\left\|\vec{p}\right\|_g=\begin{Vmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{Vmatrix}$ и $\left\|\vec{q}\right\|_g=\begin{Vmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{Vmatrix}$, тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 05.8. **Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax+By+Cz+D=0\,,\quad |A|+|B|+|C|>0\,.$$

Доказательство.

Условие компланарности векторов $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в координатной форме имеет (согласно теореме 03.4) вид

$$\det\begin{Vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{Vmatrix} = 0.$$

Откуда $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, или окончательно $Ax+By+Cz+D=0$, где числа A, B и C находятся по теореме 01.1 и равны соответственно

$$A=\det\begin{Vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{Vmatrix};\ B=-\det\begin{Vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{Vmatrix};$$
$$C=\det\begin{Vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{Vmatrix},$$

а $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, и, таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени. Условие невозможности одновременного равенства нулю чисел A, B и C вытекает из неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и следствия 04.1.

Теорема доказана.

Теорема 05.9. **Всякое уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$, $|A|+|B|+|C|>0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости**.

Доказательство.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение
$$Ax+By+Cz+D=0,\quad |A|+|B|+|C|>0$$

при $C \neq 0$ может быть записано как

$$\det \left\| \begin{matrix} x + \dfrac{DA}{A^2 + B^2 + C^2} & y + \dfrac{DB}{A^2 + B^2 + C^2} & z + \dfrac{DC}{A^2 + B^2 + C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{matrix} \right\| = 0,$$

а при $C = 0$ в виде

$$\det \left\| \begin{matrix} x + \dfrac{DA}{A^2 + B^2} & y + \dfrac{DB}{A^2 + B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Тогда любой декартовой системе координат в качестве векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ можно брать

$$\left\| \vec{p} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -C \\ B \end{matrix} \right\| \text{ и } \left\| \vec{q} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} C \\ 0 \\ -A \end{matrix} \right\| \text{ при } C \neq 0,$$

или

$$\left\| \vec{p} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} -B \\ A \\ 0 \end{matrix} \right\| \text{ и } \left\| \vec{q} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \text{ если } C = 0,$$

поскольку оба эти уравнения будут определять плоскость, проходящую через некоторую заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

Отметим, что условие компланарности векторов $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в векторной форме может быть записано при помощи смешанного произведения в виде $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q})=0$, что также есть форма уравнения плоскости S, полезная при решении задач.

Задача 05.2. *В системе координат* $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, не лежащие на одной прямой точки*:

$$\vec{r}_1=\left\|\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\|;\ \vec{r}_2=\left\|\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\|;\ \vec{r}_3=\left\|\begin{matrix}x_3\\y_3\\z_3\end{matrix}\right\|.$$

Решение. Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ и $\vec{r}_3-\vec{r}_1$ параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиуса-вектора любой принадлежащей этой плоскости точки $\vec{r}$ вектор $\vec{r}-\vec{r}_1$ также будет ей параллелен.

Из условия компланарности тройки векторов

$$\{\vec{r}-\vec{r}_1,\ \vec{r}_2-\vec{r}_1 \text{ и } \vec{r}_3-\vec{r}_1\}$$

получаем уравнение искомой плоскости, которое будет иметь вид $(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0$,

или в координатной форме (согласно § 2.7)

$$\det\left\|\begin{matrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|=0.$$

Задача 05.3. *В системе координат* $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку*

$\vec{r}_0 = \| x_0 \quad y_0 \quad z_0 \|^{\mathrm{T}}$ *перпендикулярно ненулевому вектору* $\vec{n} = \| n_x \quad n_y \quad n_z \|^{\mathrm{T}}$.

Решение. По условию задачи для радиуса-вектора $\vec{r}$ любой точки, принадлежащей этой плоскости, векторы $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ будут ортогональны, т.е. $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

В *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ это условие принимает вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

или, обозначив $A = n_x$; $B = n_y$; $C = n_z$ и соответственно $D = -n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0$, получим

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Следствие 05.2. **Если плоскость задана в *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ уравнением**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } |A| + |B| + |C| > 0,$$

то вектор $\vec{n} = \| A \quad B \quad C \|^{\mathrm{T}}$ ортогонален этой плоскости.

Определение 05.7. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$.

Определение 05.8. Вектор $\| A \quad B \quad C \|^{\mathrm{T}}$ называется *главным вектором* плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ |A| + |B| + |C| > 0.$$

В ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором.

Задача 05.4. *В* $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *– ортонормированной системе координат, найти расстояние от точки* M *с радиусом-вектором* $\vec{r}^{\,*}=\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Vmatrix}$ *до плоскости* $(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0)=0$.

Решение. 1°. Пусть K есть ортогональная проекция точки M на данную плоскость, тогда $\vec{MK}=\lambda\vec{n}$ и $\vec{\rho}=\vec{r}^{\,*}+\lambda\vec{n}$. (рис. 05.7.)

2°. Точка K принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n},\vec{r}^{\,*}+\lambda\,\vec{n}-\vec{r}_0)=0$, и, следовательно,

$$\lambda=-\frac{(\vec{n},\vec{r}^{\,*}-\vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2},$$

тогда для искомого расстояния получим

$$|\vec{MK}|=$$

$$=\left|\left(\vec{r}^{\,*}-\vec{r}_0,\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right)\right|.$$

Рассмотрим теперь ортонормированную систему координат.

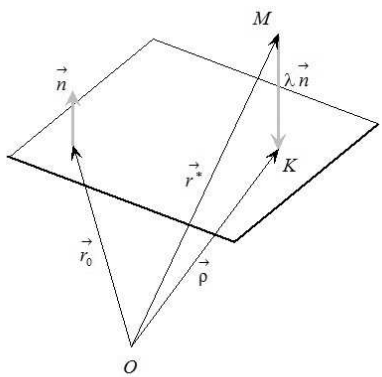

Рис. 05.7

В этом случае вектор $\vec{n} = \| A \quad B \quad C \|^{\mathrm{T}}$ будет нормальным вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Поэтому

$$|\vec{MK}| = \frac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Точка $\vec{r}_0$ принадлежит данной плоскости, значит

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

а, поскольку $|A| + |B| + |C| > 0$, то ответ задачи можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема 05.10. **Пусть $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$ и $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$, в этом случае плоскости**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

будут параллельны тогда и только тогда, когда их главные векторы коллинеарны.

Доказательство.

Докажем достаточность. Если главные векторы коллинеарны, то существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_1 = \lambda A_2;\ B_1 = \lambda B_2;\ C_1 = \lambda C_2,$$

и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть переписана в виде

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + \lambda D_2 = 0. \end{cases}$$

При $D_1 \neq \lambda D_2$ на этих плоскостях нет общих точек, а при $D_1 = \lambda D_2$ – все точки общие, что и означает параллельность плоскостей.

Докажем необходимость. Пусть плоскости

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{и}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

параллельны. Тогда они должны пересекать одни и те же координатные плоскости по параллельным прямым.
Пусть для определенности этими координатными плоскостями являются плоскости, для которых $x = 0$ и $z = 0$. Линии пересечения, соответствующие первой из координатных плоскостей, будут определяться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Параллельность этих прямых означает существование $\lambda \neq 0$ такого, что $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Рассматривая случай $z = 0$, получаем аналогичную систему соотношений

$$\begin{cases} z = 0, \\ A_1 x + B_1 y + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ A_2 x + B_2 y + D_2 = 0, \end{cases}$$

но из условия $B_1 = \lambda B_2$ и параллельности этой пары прямых вытекает, что $A_1 = \lambda A_2$.

Теорема доказана.

Следствие 05.3.

Для того чтобы уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$$ **и**

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$$

были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \neq 0$, **такое, что**

$$A_1 = \lambda A_2;\ B_1 = \lambda B_2;\ C_1 = \lambda C_2;\ D_1 = \lambda D_2.$$

Определение 05.9.

Пучком плоскостей в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 05.10.

Уравнением пучка плоскостей, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

называется уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +$$
$$+\beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$
$$|\alpha| + |\beta| > 0.$$

Определение 05.11.

Связкой плоскостей в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Определение 05.12. Если точка P, принадлежащая одновременно трем плоскостям

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad |A_1|+|B_1|+|C_1|>0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad |A_2|+|B_2|+|C_2|>0$$

и

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\quad |A_3|+|B_3|+|C_3|>0,$$

единственная, то уравнение вида

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$
$$+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,$$
$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0$$

называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку P.

Для пучка и связки плоскостей в пространстве справедливы теоремы, аналогичные теореме 05.5 для пучка прямых на плоскости.

Способы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в декартовой системе координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$.

1°. Уравнение прямой в параметрической форме

Пусть точка с радиусом-вектором

$$\vec{r}=\|\,x\quad y\quad z\,\|^{\mathrm{T}}$$

лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор

$\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ и проходящей через точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$.

2°. Уравнение прямой в канонической форме

Если исключить параметр τ из скалярной записи уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \\ z = z_0 + \tau a_z, \end{cases}$$

то получается так называемое *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о системе уравнений.

Случай $a_x a_y a_z = 0$ рассмотрите самостоятельно.

3°. Уравнение прямой, проходящей через две

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a}$ коллинеарен вектору

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Vmatrix},$$

две несовпадающие точки $\vec{r}_1 = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{matrix} \right\|$ и $\vec{r}_2 = \left\| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{matrix} \right\|$

то уравнение прямой в векторной форме можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \forall\tau$$

или

$$\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \quad \forall\tau .$$

Соответственно в координатах после исключения параметра τ получаем соотношения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} ,$$

если только

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \neq 0 .$$

4°. Уравнение прямой в 1-ой векторной форме

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \qquad \text{и} \qquad (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 ,$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – неколлинеарные, нормальные векторы этих плоскостей, а d_1 и d_2 – некоторые числа.

Или же, если известна точка $\vec{r}_0$, через которую проходит данная прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$$

Или в координатной форме

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

5°. Уравнение прямой во 2-ой векторной форме

Прямая в пространстве может быть задана при помощи иного условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r}-\vec{r}_0$, в виде уравнения

$$[\vec{a},\vec{r}-\vec{r}_0]=\vec{o}$$

или же

$$[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}\,,\ \text{где}\ \ \vec{b}=[\vec{a},\vec{r}_0]\,.$$

Наконец, в ортонормированной системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ данное уравнение прямой в пространстве принимает вид

$$\det\begin{Vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{Vmatrix}=\vec{b}\quad\text{или}\quad\begin{cases}a_y z-a_z y=b_x,\\ a_z x-a_x z=b_y,\\ a_x y-a_y x=b_z.\end{cases}$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимые, то есть любое из этих уравнений является следствием двух других.

Действительно, умножив первое уравнение на a_x, второе на a_y и третье на a_z и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида $0=0$, поскольку числа a_x, a_y и a_z не равны нулю одновременно, а

$$\begin{cases}b_x=a_y z_0-a_z y_0,\\ b_y=a_z x_0-a_x z_0,\\ b_z=a_x y_0-a_y x_0.\end{cases}$$

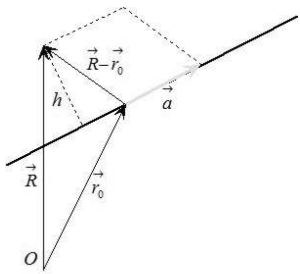

Рис. 05.8

Наконец, расстояние h в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\vec{a}$ можно найти, воспользовавшись свойством, что S – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. Из рис. 05.8 получаем

$$h=\frac{S}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{\left|[\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a}]\right|}{\left|\vec{a}\right|}.$$