Тема 06. Произведение матриц и его свойства. Обращение квадратных матриц и его свойства. Детерминант квадратной матрицы *n*-го порядка и его свойства. Миноры, дополнительные миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителей по столбцу или строке. Формула для элементов обратной матрицы. Теорема Крамера.

Произведение матриц

Определение 06.1. Матрица $\|C\|$ размера $m\times n$ с элементами

$$\gamma_{ji} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m]$$

называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m\times l$ с элементами

$$\alpha_{jk}\ \forall j=[1,m],\ \forall k=[1,l]$$

на матрицу $\|B\|$ размера $l\times n$ с элементами $\beta_{ki}\ \forall k=[1,l],\ \ \forall i=[1,n]$, где

$$\gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\beta_{ki} \quad \forall i=[1,n],\ \forall j=[1,m].$$

Результат умножения матриц – матрица $\|C\|$ – есть матрица размера $m\times n$ при любом натуральном l, которая обозначается как $\|C\|=\|A\|\|B\|$. Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует рис. 06.1.

Пример 06.1. Приведем результаты умножения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1°. Пусть размер $\|A\|$ есть 2×2, а размер $\|B\|$ – 2×1, тогда размер $\|C\|$ будет 2×1.

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\| =$$
$$= \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \end{Vmatrix}.$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{jl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{ml} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{li} & \dots & \beta_{ln} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1i} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2i} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \dots & \boxed{\gamma_{ji}} & \dots & \gamma_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mi} & \dots & \gamma_{mn} \end{Vmatrix} \qquad \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk}\beta_{ki}$$

Рис. 06.1

2°. Если размер $\|A\|$ есть 2×2, а размер $\|B\|$ – 1×2, то размер $\|C\|$ будет 1×2.

$$\|C\| = \|B\|\,\|A\| = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} =$$
$$= \begin{Vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{12} & \alpha_{12}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{12} \end{Vmatrix}.$$

3°. Наконец, пусть размер $\|A\|$ и $\|B\|$ есть 2×2, тогда матрица $\|C\|$ будет иметь размер 2×2.

Замечания об умножении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|$,

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности* $\|A\|(\|B\|+\|C\|) = \|A\|\|B\|+\|A\|\|C\|$.

Отметим еще раз, что произведение двух матриц существует только тогда, когда *число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго*.

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы $\|A\|$ на подходящего размера единичную матрицу $\|E\|$ (см. § 1.1) дает в результате ту же самую матрицу $\|A\|$.

Определение 06.2. Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства

$$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|.$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к $\| A \|$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\| A \| \neq 0$[6].

Определение 06.3. Матрица $\| A \|$, для которой $\det\| A \| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\| A \| \neq 0$, – *невырожденной*.

Лемма 06.1. **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

Доказательство.

Предположим, что невырожденная матрица $\| A \|$ имеет две обратные: $\| A \|_1^{-1}$ и $\| A \|_2^{-1}$. Тогда из равенств

$$\| A \| \| A \|_1^{-1} = \| E \| \quad \text{и} \quad \| A \| \| A \|_2^{-1} = \| E \|$$

следует, что

$$\| A \| \| A \|_1^{-1} - \| A \| \| A \|_2^{-1} = \| E \| - \| E \| = \| O \|.$$

Умножая слева обе части данного равенства на $\| A \|_1^{-1}$, получаем

$$\| A \|_1^{-1} \| A \| (\| A \|_1^{-1} - \| A \|_2^{-1}) = \| A \|_1^{-1} \| O \| = \| O \|$$

и, учтя, что $\| A \|_1^{-1} \| A \| = \| E \|$, приходим к равенству

$$\| A \|_1^{-1} - \| A \|_2^{-1} = \| O \|.$$

Лемма доказана.

[6] Правило вычисления детерминанта квадратной матрицы порядка n приводится в определении 06.6.

В частном случае, когда $\| A \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|$ и если $\det \| A \| \neq 0$, матрица $\| A \|^{-1}$ имеет вид

$$\| A \|^{-1} = \frac{1}{\det \| A \|} \cdot \left\| \begin{matrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{matrix} \right\|. \qquad (06.1)$$

Для квадратных матриц порядка n справедливы[7] следующие равенства:

$$\det (\| A \| \| B \|) = \det (\| A \|) \det (\| B \|) ;$$

$$\det \| A \|^{-1} = \frac{1}{\det \| A \|}, \text{ если } \det \| A \| \neq 0 .$$

Пример 06.2. Используя матричные операции, систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

можно записать в виде $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где

$$\| x \| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| ; \quad \| b \| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| ; \quad \| A \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|,$$

а ее решение (если существует $\| A \|^{-1}$) – в виде $\| x \| = \| A \|^{-1} \| b \|$.

Пример 06.3. Формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой (03.2) с помощью матричных операций могут быть записаны в виде

---

[7] Для $n = 2$ эти соотношения проверяются непосредственно, случай произвольного n рассматривается ниже (см. теорему 06.8).

$$\left\| \begin{matrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{matrix} \right\| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\| \quad ; \quad \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \| S \| \left\| \begin{matrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \right\| ,$$

где $\| S \|$ – матрица перехода.

Теорема 06.1. **Имеет место соотношение**

$$(\| A \| \| B \|)^{\mathrm{T}} = \| B \|^{\mathrm{T}} \| A \|^{\mathrm{T}} .$$

Доказательство.

Будем предполагать, что размеры матриц $\| A \|$ и $\| B \|$ таковы, что произведения матриц, указанные в формулировке теоремы, существуют.

Пусть числа α_{ik} , β_{kj} , γ_{ij} суть элементы матриц $\| A \|$, $\| B \|$ и $\| C \| = \| A \| \| B \|$ соответственно. Тогда, согласно определению 06.1,

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \beta_{kj} .$$

Но, с другой стороны, по определению 01.8 операции транспонирования

$$\gamma^{\mathrm{T}}_{ij} = \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} \beta_{ki} = \sum_{k=1}^{l} \alpha^{\mathrm{T}}_{kj} \beta^{\mathrm{T}}_{ik} = \sum_{k=1}^{l} \beta^{\mathrm{T}}_{ik} \alpha^{\mathrm{T}}_{kj} ,$$

откуда, учитывая определение 06.1, делаем заключение о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что согласно правилу транспонирования произведения матриц равенство $\left\| \begin{matrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{matrix} \right\| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\|$ может быть записано в виде

$$\left\| \begin{matrix} \vec{g}'_1 & \vec{g}'_2 & \vec{g}'_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 & \vec{g}_2 & \vec{g}_3 \end{matrix} \right\| \| S \| .$$

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 06.2. **Пусть произведение квадратной матрицы $\| Q \|$ на произвольный n-компонентный столбец $\| x \|$ есть нулевой n-компонентный столбец, тогда матрица $\| Q \|$ нулевая.**

Доказательство.

Пусть $\| Q \| = \left\| \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{matrix} \right\|$. Выберем в качестве $\| x \|$ столбец вида $\left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$, где единица стоит в строке с номером i.

Тогда $\left\| Q \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{1i} \\ \dots \\ \omega_{ii} \\ \dots \\ \omega_{ni} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и в силу произвольности i приходим к заключению о справедливости утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 06.2. **Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ справедливо соотношение**

$$(\|A\|\|B\|)^{-1} = \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}.$$

Доказательство.

1°. Пусть произведение матрицы $(\|A\|\|B\|)^{-1}$ на некоторый n-компонентный столбец $\|x\|$ есть столбец $\|c\|$. Тогда $(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\|$ или, что то же самое, $\|x\| = \|A\|\|B\|\|c\|$ (см. определения 06.1 и 06.2).

2°. С другой стороны, из последнего равенства получаем, что

$$\|A\|^{-1}\|x\| = \|B\|\|c\|$$

и аналогично $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$.

3°. Вычитая почленно равенства

$$(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\| \quad \text{и} \quad \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|,$$

в силу дистрибутивности матричного произведения приходим к соотношению

$$((\| A \| \| B \|)^{-1} - \| B \|^{-1} \| A \|^{-1}) \| x \| = \| o \| ,$$

которое по лемме 06.2 ввиду произвольности столбца $\| x \|$ означает, что матрица

$$(\| A \| \| B \|)^{-1} - \| B \|^{-1} \| A \|^{-1}$$

нулевая.

Теорема доказана.

Задача 06.1. *Проверить тождество* $(\| A \|^{-1})^{\mathrm{T}} = (\| A \|^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Определение 06.4. Невырожденная квадратная матрица $\| Q \|$, для которой $\| Q \|^{-1} = \| Q \|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 06.3. **Для ортогональной матрицы $\| Q \|$ справедливо равенство $\det \| Q \| = \pm 1$.**

Доказательство.

Умножая равенство $\| Q \|^{-1} = \| Q \|^{\mathrm{T}}$ последовательно справа и слева на $\| Q \|$, в силу определения 06.2 приходим к соотношению $\| Q \|^{\mathrm{T}} \| Q \| = \| Q \| \| Q \|^{\mathrm{T}} = \| E \|$. Откуда находим, что $\det^2 \| Q \| = 1$, поскольку

- определитель произведения квадратных матриц одинакового размера равен произведению определителей сомножителей;
- определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
- $\det\|E\| = 1$.

Теорема доказана.

Покажите самостоятельно, что справедливы утверждения:

Теорема 06.4. **Каждая ортогональная матрица второго порядка $\|Q\|$ может быть представлена в виде $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{Vmatrix}$, где φ – некоторое число.**

Следствие 06.1. **Матрица перехода от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому ортогональная.**

Доказательство.

Из формул (03.3) и (03.4) вытекает, что $\|S\|$ – матрица перехода *от одной ортонормированной системы координат на плоскости к другой* − может иметь один из двух следующих видов:

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix},$$

где φ – угол между первыми базисными векторами. Но тогда матрица перехода $\|S\|$ ортогональная в силу теоремы 06.4.

Следствие доказано.

Определители квадратных матриц

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную запись этих чисел в некотором порядке без пропусков и повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 06.5. Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка*, или *инверсию*), если при $i < j$ имеет место $k_i > k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ будем обозначать $\text{Б}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Например, $\text{Б}(3, 1, 4, 2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\| = \|\alpha_{ij}\|;\ i, j = [1, n].$$

Определение 06.6. *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\|A\|$ размера $n \times n$ называется число $\det\|A\|$, получаемое по формуле

$$\det\|A\| = \sum_{\{k_1,k_2,k_3,...,k_n\}} (-1)^{Б(k_1,k_2,k_3,...,k_n)} \alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}...\alpha_{nk_n},$$

где $\{k_1, k_2, k_3, ..., k_n\}$ – *всевозможные различные* перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы $\|A\|$.

Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.

Из определения 06.6 также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Задача 06.2. *Проверить совпадение определения* 06.6 *и определения детерминантов матриц второго и третьего порядков.*

Свойства определителей

Теорема 06.5. **При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.**

Доказательство.

Каждое слагаемое в формуле определителя транспонированной матрицы $\|B\| = \|A\|^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$(-1)^{Б(m_1,m_2,...,m_n)} \beta_{1m_1}\beta_{2m_2}...\beta_{nm_n},$$

но, учитывая, что $\beta_{k\, m_k} = \alpha_{m_k k}$, получим

$$\det \| A \|^{\mathrm{T}} = \sum_{\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}} (-1)^{\text{Б}(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \alpha_{m_1 1} \alpha_{m_2 2} \ldots \alpha_{m_n n} .$$

Упорядочим сомножители каждого слагаемого по номерам строк, то есть приведем их к виду

$$(-1)^{\text{Б}(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n} ,$$

где $1, 2, 3, \ldots, n$ – номера строк, а $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ – номера соответствующих столбцов. Отметим, что для введенных обозначений имеет место очевидное равенство: $k_{m_i} = i \quad \forall i$ и при выполненном изменении порядка сомножителей для каждого слагаемого в формуле определителя имеет место равенство

$$\text{Б}(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \text{Б}(k_1, k_2, \ldots, k_n) .$$

Действительно, пусть m_i и m_j дают беспорядок, то есть

$$m_i > m_j \text{ при } i < j ,$$

тогда дают беспорядок и числа k_{m_i} и k_{m_j}, поскольку

$$\forall i: \; k_{m_i} = i ,$$

и, значит, будет справедливо неравенство $k_{m_i} = i < j = k_{m_j}$ при $m_i > m_j$. Заметим, что верно и обратное утверждение.

Окончательно получаем

$$\det \| A \|^{\mathrm{T}} = \sum_{\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n} = \det \| A \| .$$

Теорема доказана.

Замечание Утверждение теоремы 06.5 допускает следующую наглядную интерпретацию.

Выделим в матрице $\| A \|$ элементы, входящие в некоторое слагаемое определения 06.6, и соединим их отрезками прямых, как показано на рис. 06.2.

Заметим, что пара элементов α_{ik_i} и α_{jk_j} дает беспорядок, если соединяющий их отрезок имеет “положительный” наклон, то есть правый конец отрезка расположен выше левого.

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

Рис. 06.2

Очевидно, что при транспонировании квадратной матрицы число отрезков с “положительным” наклоном не меняется, поэтому не меняется и знак каждого слагаемого в определении 06.6, и, следовательно, значение определителя сохраняется.

Следствие 06.2. **Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, справедливо для ее строк, и наоборот.**

Теорема 06.6. **При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.**

Доказательство.

Рассмотрим вначале случай, когда переставляются *соседние* столбцы. Поскольку общий вид слагаемых в выражении для определителя дается формулой

$$\sum_{\{k_1,k_2,\dots,k_n\}} (-1)^{Б(k_1,k_2,\dots,k_n)} \alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\dots\alpha_{nk_n} \ ,$$

то достаточно показать, что число беспорядков изменится при перестановке соседних столбцов на единицу.

Рассмотрим перестановку чисел

$$\{k_1, ..., k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, k_{i+2} ..., k_n\}.$$

Если в ней поменять местами числа k_i и k_{i+1}, то число беспорядков, образуемых числами $\{k_1, k_2, ...k_{i-1}, k_{i+2}, ..., k_n\}$, останется прежним, а за счет изменения порядка следования чисел k_i и k_{i+1} общее число беспорядков изменится на единицу. Это означает, что знак каждого слагаемого в формуле определителя изменится на противоположный и, следовательно, изменит знак и весь определитель.

Наконец, если требуется поменять местами столбцы, между которыми находится l столбцов, то для этого потребуется $l + l + 1 = 2l + 1$ перестановок соседних столбцов, и, поскольку $(-1)^{2l+1} = -1$, знак определителя опять-таки изменится на противоположный.

Теорема доказана.

Следствие 06.3. **Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Доказательство.

При перестановке одинаковых столбцов значение определителя, с одной стороны, не меняется, но, с другой стороны, это значение должно изменить знак. Поэтому данный определитель может равняться только нулю.

Следствие доказано.

Теорема 06.7 (линейное свойство определителя). **Если k-й столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц, k-ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из исходной линейной комбинации.**

Доказательство.

Пусть в матрице $\|A\|_\alpha$ k-й столбец состоит из элементов $\alpha_{ik} = \lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&(-1)^{Б(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{ik}\ldots\alpha_{nk_n} = \\
&= (-1)^{Б(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots(\lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik})\ldots\alpha_{nk_n} = \\
&= (-1)^{Б(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\lambda\beta_{ik}\ldots\alpha_{nk_n} + \\
&\quad + (-1)^{Б(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\mu\gamma_{ik}\ldots\alpha_{nk_n}.
\end{aligned}$$

А поскольку каждое из $n!$ слагаемых в формуле для $\det\|A\|_\alpha$ содержит точно по одному элементу из k-го столбца, то $\det\|A\|_\alpha = \lambda\cdot\det\|A\|_\beta + \mu\cdot\det\|A\|_\gamma$, где k-ые столбцы матриц $\|A\|_\beta$ и $\|A\|_\gamma$ соответственно состоят из элементов β_{ik} и γ_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема доказана.

Следствие 06.4. **При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.**

Следствие 06.5. **Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.**

Доказательство.

Действительно, определитель, получившийся в результате данной операции с матрицей, можно (по теореме 06.7) представить в виде линейной комбинации исходного определителя и линейной комбинации определителей матриц, имеющих одинаковые столбцы. Последние равны нулю по следствию 06.3.

Следствие доказано.

Теорема 06.8. **Определитель произведения матриц размера $n \times n$ равен произведению их определителей, то есть**

$$\det(\|A\|\|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\|.$$

Доказательство.

1°. Обозначим $\|C\| = \|A\|\|B\|$. Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|C\|$ имеют соответственно элементы α_{ij}, β_{kl} и γ_{pq}. Тогда по определению 06.1 $\gamma_{pq} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{pj}\beta_{jq}$, и потому

$$\det\|C\| =$$

$$= \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \ldots & \alpha_{11}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \ldots & \alpha_{21}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\beta_{11} + \alpha_{n2}\beta_{21} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{n1} & \ldots & \alpha_{n1}\beta_{1n} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение специальный тип перестановок натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, в которых допускаются повторения одинаковых чисел. Такие перестановки условимся обозначать как $[i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n]$.

По линейному свойству определителя (теорема 06.7)

$$\det\|C\| =$$

$$= \sum_{[i_1, i_2, \ldots, i_n]} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} \det\begin{Vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \ldots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \ldots & \alpha_{2i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \ldots & \alpha_{ni_n} \end{Vmatrix} =$$

$$= \sum_{[i_1, i_2, \ldots, i_n]} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} \det\|A^*\|_{[i_1, i_2, \ldots, i_n]}.$$

Поскольку перестановки $[i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n]$ (в отличие от $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$) могут содержать одинаковые числа, то общее число слагаемых в полученной сумме равно n^n, но ненулевых среди этих слагаемых в силу следствия 06.3 только $n!$.

2°. Заметим, что поскольку матрицы $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$ составлены из тех же столбцов, что и $\| A \|$, но записанных в разном порядке, то их определители могут отличаться в силу теоремы 06.6 только знаком.

Перестроим каждую из матриц $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$, переставив ее столбцы так, чтобы каждый столбец с индексом i_k ; $k = [1, n]$ был расположен слева от столбцов с большими индексами. В итоге этой операции столбцы будут полностью упорядочены, для чего потребуется число перестановок столбцов, равное числу беспорядков в перестановке $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, и, следовательно, для каждой матрицы $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}}$ будет справедливо соотношение

$$\det \| A^* \|_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}} = (-1)^{\text{Б}(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \det \| A \| .$$

3°. Подставляя это соотношение в выражение для $\det \| C \|$, получаем

$$\det \| C \| = \det \| A \| \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}} (-1)^{\text{Б}(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} \ldots \beta_{i_n n} =$$

$$= \det \| A \| \cdot \det \| B \|^{\text{T}} ,$$

что в силу теоремы 06.5 означает

$$\det(\| A \| \| B \|) = \det \| A \| \cdot \det \| B \|.$$

Теорема доказана.

Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице n-го порядка $\| A \|$ строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, где $1 \le k \le n$.

Определение 06.7. Детерминант квадратной матрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором k-го порядка* и обозначается

$$M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}.$$

Определение 06.8. Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором, дополнительным к минору* $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$, и обозначается

$$\overline{M}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}.$$

Выберем в матрице $\| A \|$ i-ую строку и j-ый столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\| A \|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\| A^{+} \|$ размера $(n-1) \times (n-1)$.

Определение 06.9. Детерминант матрицы $\| A^{+} \|$ называется *дополнительным минором* $\overline{M}_i^j$ *элемента* α_{ij}.

Сгруппируем в определении 06.6 – детерминанта матрицы $\| A \|$ – все $(n-1)!$ слагаемых, содержащих элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим выражение вида

$$\det \| A \| = \alpha_{ij} D_{ij} + \ldots .$$

Определение 06.10. Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij}.

Заметим, что по определению 06.6 имеют место равенства

$$\det \| A \| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} D_{kj} \quad \forall j = [1, n],\ \forall i = [1, n], \qquad (06.2)$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц, находя значения алгебраических дополнений при помощи соотношений, которые устанавливает

Теорема 06.9. **Справедливы равенства** $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$ **.**

Доказательство.

1°. По определению детерминанта 06.6

$$\det \| A \| = \alpha_{11} \sum_{\{1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(1, k_2, k_3, \ldots, k_n)} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n} + \ldots ,$$

то есть $D_{11} = \sum_{\{k_2, \ldots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_2, \ldots, k_n)} \alpha_{2k_2} \alpha_{3k_3} \ldots \alpha_{nk_n}$, поскольку очевидно, что $\text{Б}(1, k_2, k_3, \ldots, k_n) = \text{Б}(k_2, k_3, \ldots, k_n)$, но тогда выражение для D_{11} совпадает с формулой определителя матрицы порядка $n-1$, получаемой из $\| A \|$ вычеркиванием первого столбца и первой строки. Следовательно, $D_{11} = \overline{M}_1^1$.

2°. Построим новую матрицу $\| A' \|$, переместив элемент α_{ij} матрицы $\| A \|$ в ее левый верхний угол, переставив i-ю строку на первое место, для чего потребуется $i-1$ перестановка, и переставим на первое место j-й столбец, что потребует выполнения $j-1$ перестановок. Тогда определитель перестроенной матрицы $\| A' \|$ равен

$$\det\| A' \| = (-1)^{i-1+j-1} \det\| A \| = (-1)^{i+j} \det\| A \|.$$

Согласно линейному свойству определителя (теорема 06.7) данное соотношение будет также выполняться и для каждого из его слагаемых, а значит, в силу формул (06.2) и для каждого алгебраического дополнения D_{ij}. Поэтому справедливо равенство $D_{ij} = (-1)^{i+j} D'_{11}$.

3°. Наконец, очевидно, что значение дополнительного к α_{ij} минора не зависит от положения α_{ij} в матрице $\|A'\|$, и потому $\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1$.

4°. Учитывая полученные соотношения

$$\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1 = D'_{11} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

приходим к равенству $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$.

Теорема доказана.

Следствие 06.6. **Разложение определителя по i-му столбцу имеет вид**

$$\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}\alpha_{ki}\overline{M}_{k}^{i}$$

или

$$\det\|A\| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}M_{k}^{i}\overline{M}_{k}^{i}.$$

Для практических приложений особо полезной является

Теорема 06.10. **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ имеет место равенство**

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}D_{is} = \delta_{js}\cdot\Delta,$$

где $\Delta = \det\|A\|$ **и** $\delta_{js} = \begin{cases}1\ ,\ j=s,\\ 0\ ,\ j\neq s\end{cases}$ **– символ Кронекера.**

Доказательство.

По определению 06.10 алгебраического дополнения имеем $\det\|A\| = \alpha_{1j}D_{1j} + \alpha_{2j}D_{2j} + \ldots + \alpha_{nj}D_{nj}$, то есть утверждение теоремы для случая $j=s$ справедливо.

Пусть теперь $j\neq s$. Тогда выражение

$$\alpha_{1j}D_{1s} + \alpha_{2j}D_{2s} + \ldots + \alpha_{nj}D_{ns}$$

можно рассматривать как разложение по s-му столбцу определителя матрицы, у которой s-й столбец совпадает с j-м столбцом. Но такой определитель равен нулю по следствию 06.3.

Теорема доказана.

Следствие 06.7. **Если квадратная матрица $\| A \|$ невырожденна, то элементами ее обратной матрицы $\| A \|^{-1}$ являются числа $\beta_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \overline{M}^{\,i}_{j}}{\Delta}$; $i, j = [1, n]$.**

Доказательство.

Найдем произведение матриц $\| A \|$ и $\| B \|$, элементы которых $\alpha_{i\,j}$ и $\beta_{i\,j}$; $i, j = [1, n]$. Пусть γ_{pq} – элемент произведения $\| A \|$ и $\| B \|$, тогда, согласно определению 06.1 и теореме 06.10,

$$\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} \beta_{jq} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} \frac{(-1)^{j+q} \overline{M}^{\,j}_{q}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} D_{qj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \delta_{pq} = \delta_{pq} \; ; \quad i, j = [1, n].$$

Аналогичное соотношение получается и для произведения $\| B \| \, \| A \|$ и по определению 01.4

$$\| A \| \| B \| = \| B \| \| A \| = \| E \|,$$

но тогда, согласно определению 06.2 и лемме 06.1,

$$\| B \| = \| A \|^{-1}.$$

Следствие доказано.

Проверьте самостоятельно справедливость формулы (06.1).

Правило Крамера

Будем рассматривать систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases} \qquad (06.3)$$

в неразвернутом виде $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j$; $j = [1, n]$ или же в матричной форме $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где квадратная матрица $\| A \|$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\| x \|$ и $\| b \|$ – соответственно ξ_i и β_j.

Определение 06.11. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ будем называть *частным решением* (или, просто, *решением*) *системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема 06.11 (правило Крамера). **Для того чтобы система линейных уравнений (06.3) *имела единственное* решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = \det \| A \| \neq 0$, и в этом случае решение данной системы будет иметь вид**

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы $\| A \|$ заменой ее i-го столбца на столбец $\| b \|$ – правых частей системы уравнений (06.3):

$$\begin{array}{c} \Delta_i = \det \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \beta_1 & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \beta_2 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \beta_n & \ldots & \alpha_{nn} \end{array} \right\| . \\ \uparrow \\ i\text{-й столбец} \end{array}$$

Доказательство.

1°. Проверим вначале утверждение теоремы в предположении, что система (06.3) *имеет единственное решение*

$$\| x \| = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{array} \right\| ,$$

то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j \ ; \ j = [1, n] .$$

Умножив последовательно для всех $j = [1, n]$ обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{jk} и просуммировав по j результаты умножения, получим

$$\sum_{j=1}^{n} D_{jk} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} \quad \forall k = [1, n].$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} D_{jk}) \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} .$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{ik}$ (по теореме 06.10), поэтому, учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} = \Delta_k \quad \text{и} \quad \Delta \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} \xi_i = \xi_k \Delta_k \,,$$

получаем $\xi_k \Delta = \Delta_k$, $k = [1, n]$.

Поскольку уравнения вида $\Delta \cdot \xi_k = \Delta_k$, $k = [1, n]$ имеют единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, то необходимость доказана. При этом также очевидно, что

$$\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \,, \ \forall k = [1, n] \,. \tag{06.4}$$

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы набор чисел

$$\{ \, \xi_i = \frac{\Delta_k}{\Delta} \,, \ i = [1, n] \, \}$$

есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения ξ_i в левые части исходной системы линейных уравнений (06.3):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k D_{ki} \Big) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D_{ki} \Big) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j \,, \ j = [1, n].$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 06.10.

Теорема доказана.