Тема 07. Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о ранге матрицы и ее следствия. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Элементарные операции и их свойства. Метод Гаусса.

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\|A\|$ размера $m \times n$. Пусть число k такое, что $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Выберем в матрице $\|A\|$ некоторым способом k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную матрицу минора порядка k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k (см. следствие 06.6).

Определение 07.1.	Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\|A\|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rg}\|A\|$.
Определение 07.2.	Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.
Определение 07.3.	Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Далее рассмотрим n m-компонентных столбцов вида

$$\| a_1 \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{matrix} \right\|; \quad \| a_2 \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{matrix} \right\|; \dots ; \quad \| a_n \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|$$

и столбцы $\| b \| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\|; \quad \| o \| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|.$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец $\| b \|$ есть *линейная комбинация* столбцов

$$\| a_1 \|, \| a_2 \|, \dots, \| a_n \| ,$$

если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, такие, что

$$\| b \| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \| a_j \| .$$

Теорема 07.1 (о базисном миноре). **Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Пусть ранг матрицы равен r. Без ограничения общности можно считать, что матрица базисного минора расположена в левом верхнем углу матрицы $\| A \|$.

Окаймим матрицу базисного минора фрагментами i-й строки и j-го столбца и рассмотрим определитель построенной матрицы.

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ij} \end{array} \right\|,$$

который равен нулю как минор порядка $r+1$ в матрице ранга r.

2°. Разложив определитель Δ по последней строке, получим

$$\alpha_{i1}D_1 + \alpha_{i2}D_2 + \ldots + \alpha_{ir}D_r + \alpha_{ij}M = 0,$$

где $M \neq 0$ – базисный минор, а $D_1, \ldots, D_r$ – некоторые алгебраические дополнения, *не зависящие от* i. Следовательно, $\alpha_{ij} = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_r\alpha_{ir}$, где $\forall i$

$$\lambda_s = -\frac{D_s}{M}, \quad s = [1, r].$$

Теорема доказана.

Определение 07.4. Столбцы $\| a_1 \|, \| a_2 \|, \ldots, \| a_n \|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \| a_j \| = \| o \|, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} | \lambda_j | > 0 \right).$$

Лемма 07.1. **Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Доказательство. Совпадает с доказательством леммы 02.1.

Лемма 07.2. **Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.**

Доказательство.

Допустим, что линейно зависимыми являются первые k столбцов, то есть для них существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу:

$$\lambda_1 \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{Vmatrix} + \dots \quad + \lambda_k \begin{Vmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда очевидно, что нетривиальная линейная комбинация *всех* столбцов этой матрицы вида

$$\lambda_1 \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{Vmatrix} + \dots \quad + \lambda_k \begin{Vmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{Vmatrix} + 0 \begin{Vmatrix} \alpha_{1,k+1} \\ \alpha_{2,k+1} \\ \dots \\ \alpha_{m,k+1} \end{Vmatrix} + \dots \; + 0 \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{Vmatrix}$$

будет также равна нулевому столбцу.

Лемма доказана.

Теорема 07.2. **Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) его матрицы были линейно зависимыми.**

Доказательство необходимости.

Пусть определитель равен нулю, то есть единственный минор порядка n нулевой, тогда ранг матрицы меньше n. По теореме о базисном миноре всякий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов и тогда по лемме 07.1 столбцы матрицы линейно зависимы.

Доказательство достаточности.

Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. По лемме 07.1 один из столбцов есть линейная комбинация остальных.

Пусть этот столбец последний, то есть $\| a_n \| = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \| a_j \|$. Умножим последовательно (для $i = 1, 2, \ldots, n-1$) j-й столбец на число λ_j и сложим все их. Вычитание этой суммы из столбца $\| a_n \|$ не изменит величины определителя, но поскольку при этом мы получим нулевой столбец, то определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Теорема 07.3 (о ранге матрицы). **Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Если ранг матрицы нулевой, то все ее элементы нулевые и среди них нет линейно независимых.
Пусть ранг матрицы равен $r > 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из r базисных столбцов матрицы. Она имеет ненулевой минор r-го порядка и, следовательно, ее столбцы линейно независимы.

2°. Выберем $k > r$ столбцов матрицы и покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Построим из выбранных столбцов матрицу $\| A^* \|$. Ее ранг $R \leq r$, поскольку $\| A^* \|$ является частью матрицы $\| A \|$.

Следовательно, $R \le r < k$ и в матрице $\| A^* \|$ есть, по крайней мере, один небазисный столбец, и тогда столбцы матрицы $\| A \|$ линейно зависимы по лемме 07.2.

Теорема доказана.

Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m, \end{cases} \qquad (07.1)$$

которая в неразвернутой форме записывается как

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j \ , \quad j = [1, m] \ ,$$

или же в матричной форме $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где матрица $\| A \|$ размера $m \times n$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\| x \|$ и $\| b \|$ соответственно компоненты ξ_i, $i = [1, n]$, и β_j, $j = [1, m]$.

Определение 07.5.	Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (07.1), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства.

Частное решение системы линейных уравнений также может быть записано в виде столбца $\left\| x^0 \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{matrix} \right\|$. Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (07.1) назовем *общим решением* системы (07.1).

Определение 07.6.

Если система (07.1) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной* системой уравнений.

Определение 07.7.

Матрица $\left\| A \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\|$ называется *основной* матрицей системы (07.1), а матрица

$$\left\| A \mid b \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{matrix} \right\|$$

– *расширенной* матрицей этой системы.

Определение 07.8.

Система (07.1) называется *однородной*, если

$$\beta_j = 0 \ \forall j = [1, m],$$

в противном случае – *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 07.4 (Кронекера–Капелли). **Для того чтобы система (07.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.**

Доказательство необходимости.

Пусть существует решение системы (07.1) $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, тогда эту систему можно представить в виде следующего равенства:

$$\xi_1 \| a_1 \| + \xi_2 \| a_2 \| + ... + \xi_n \| a_n \| = \| b \| ,$$

где $\| a_j \| = \| \alpha_{1j} \quad \alpha_{2j} \quad \cdots \quad \alpha_{mj} \|^{\mathrm{T}}, \ j = [1, n]$.

Поскольку в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов, образующих основную матрицу, то число линейно независимых столбцов основной и расширенной матриц будет одинаковым. Следовательно, по теореме 07.3 (*о ранге матрицы*) $\operatorname{rg} \| A \| = \operatorname{rg} \| A | b \|$.

Доказательство достаточности.

Пусть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен r. Без ограничения общности предположим, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы, но тогда по теореме 07.1 (*о базисном миноре*) имеет место равенство $\| b \| = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j \| a_j \|$, которое можно переписать в виде

$$\| b \| = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \| a_j \| + \sum_{j=r+1}^{n} 0 \| a_j \| .$$

Однако последнее означает, что система (07.1) имеет решение $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r, 0, ..., 0\}$, то есть она совместна.

Теорема доказана.

Задача 07.1. *Докажите справедливость следующего утверждения.*

Для того чтобы прямые

$$A_i x + B_i y + C_i = 0 \,, \quad i = [1, n]$$

пересекались в одной и той же точке плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg}\left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \dots & \dots \\ A_n & B_n \end{matrix} \right\| = \operatorname{rg}\left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{matrix} \right\| .$$

Фундаментальная система решений

Выше было показано, что факт совместности или несовместности системы (07.1) можно установить, сравнив ранги ее основной и расширенной матриц. Рассмотрим теперь случай, когда система (07.1) совместна и найдем все ее решения.

При построении общего решения системы (07.1) воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

Лемма 07.3. **Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (07.1) также является ее частным решением.**

Доказательство.

Пусть $\left\| x^i \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \dots \\ \xi_n^i \end{matrix} \right\| , \quad i = [1, k]$ – частные решения однородной системы, то есть $\left\| A \right\| \left\| x^i \right\| = \left\| o \right\| , \ \forall i = [1, k]$.

Рассмотрим столбец $\| y \| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \| x^i \|$. По правилам действий с матрицами для него справедливы равенства

$$\| A \| \| y \| = \| A \| \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x^i \| \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\| A \| \| x^i \|) = \| o \| .$$

Лемма доказана.

Лемма 07.4. **Сумма некоторого частного решения однородной системы (07.1) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (07.1).**

Доказательство.

Пусть $\| x \|$ – частное решение однородной системы, а $\| y \|$ – некоторое частное решение неоднородной, то есть

$$\| A \| \| x \| = \| o \| \ , \quad \| A \| \| y \| = \| b \| .$$

Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\| A \| (\| x \| + \| y \|) = \| A \| \| x \| + \| A \| \| y \| = \| o \| + \| b \| = \| b \| .$$

Лемма доказана.

Лемма 07.5. **Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (07.1) является частным решением однородной системы (07.1).**

Доказательство.

Пусть $\| x \|$ и $\| y \|$ – частные решения неоднородной системы, то есть $\| A \| \| x \| = \| b \|$, $\| A \| \| y \| = \| b \|$. Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\|A\|(\|x\| - \|y\|) = \|A\|\|x\| - \|A\|\|y\| = \|b\| - \|b\| = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Замечания 1°. Из лемм 07.3–07.5 следует, что

общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,

и поэтому целесообразно вначале изучить вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

2°. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*.

3°. Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде столбцов, то, используя операции сравнения, сложения и умножения на число для столбцов, а также лемму 07.3, можно ввести понятие линейной зависимости решений *однородной* системы линейных уравнений аналогично определению 07.4.

Теорема 07.5. **Однородная система (07.1) имеет не менее $n-\operatorname{rg}\|A\|$ линейно независимых частных решений.**

Доказательство.

1°. Рассмотрим вначале совместную неоднородную систему (07.1)

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n=\beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2+\ldots+\alpha_{2n}\xi_n=\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1+\alpha_{m2}\xi_2+\ldots+\alpha_{mn}\xi_n=\beta_m \end{cases}$$

и предположим, что матрица базисного минора расширенной матрицы $\|A|b\|$, ранга $r\le\min\{m,n+1\}$, расположена в левом верхнем углу последней.

По теореме 07.1 (*о базисном миноре*) последние $m-r$ уравнений являются линейными комбинациями первых r уравнений, и, следовательно, их можно отбросить, поскольку они будут тождественно удовлетворяться решениями первых r уравнений.

В оставшихся уравнениях перенесем в правые части слагаемые, содержащие неизвестные $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$, и получим *упрощенный вид* системы линейных уравнений (07.1)

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r = \beta_1 - \alpha_{1r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}\xi_n, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2r}\xi_r = \beta_2 - \alpha_{2r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}\xi_1 + \alpha_{r2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{r,n}\xi_n. \end{cases}$$

Неизвестные $\xi_1, \ldots, \xi_r$ называются *основными* (*главными, зависимыми, базисными*), а неизвестные $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ – *свободными* (*параметрическими, независимыми, небазисными*).

Присвоим свободным неизвестным некоторые конкретные значения $\xi_{r+1} = \mu_1, \ldots, \xi_n = \mu_{n-r}$ и рассчитаем по правилу Крамера (теорема 06.11) соответствующие им значения основных неизвестных:

$$\xi_j = \frac{1}{M}\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j\text{-й столбец} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \ldots & \beta_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-r}\alpha_{1,r+k}\mu_k & \ldots & \alpha_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \beta_r - \sum\limits_{k=1}^{n-r}\alpha_{r,r+k}\mu_k & \ldots & \alpha_{rr} \end{array} \right\| \end{array}, \qquad (07.2)$$

где $j = [1, r]$, а M – базисный минор.

Заметим, что из соотношений (07.2), положив

$$\mu_k = 0;\; k = [1, n-r],$$

можно найти частное решение *неоднородной* системы (07.1).

2°. Теперь рассмотрим *однородную* систему, положив в (07.1) все $\beta_i;\; i = [1, m]$ равными нулю. По линейному свойству определителей (теорема 06.7) получаем выражения для значений неизвестных:

$$\begin{aligned} &\xi_j = \sum_{k=1}^{n-r} \kappa_{jk} \mu_k\,, \quad j = [1, r]; \\ &\xi_{r+i} = \mu_i\,, \quad i = [1, n-r], \end{aligned} \qquad (07.3)$$

где

$$\kappa_{jk} = \frac{1}{M} \det \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \ldots & -\alpha_{1,r+k} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1} & \ldots & -\alpha_{r,r+k} & \ldots & \alpha_{rr} \end{matrix} \right\|,$$

$$j = [1, r]\,,\; k = [1, n-r].$$

$$\uparrow$$

j-й столбец

Наконец, в матричной форме соотношения (07.3) могут быть записаны в виде

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_r \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{r,n-r} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| \qquad (07.4)$$

или $$\left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_{n-r} \end{matrix} \right\|.$$

3°. Полагая $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$, получим решение
$$\{\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \xi_r^1, 1, 0, \ldots, 0\}.$$
Аналогично при $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1,\ \mu_3 = \ldots = \mu_{n-r} = 0$ найдем решение $\{\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_r^2, 0, 1, \ldots, 0\}$. И, продолжая этот процесс, получим на последнем шаге при
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-r-1} = 0,\ \mu_{n-r} = 1$$
решение $\{\xi_1^{n-r}, \xi_2^{n-r}, \ldots, \xi_r^{n-r}, 0, 0, \ \ldots\ , 1\}$.

Полученные решения будем называть *нормальными фундаментальными решениями.*

4°. Покажем теперь, что построенные $n-r$ частных решений однородной системы уравнений (07.1) являются линейно независимыми. Действительно, записав эти решения как строки, получим матрицу вида
$$\left\| \begin{matrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \ldots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \ldots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|. \qquad (07.5)$$

Заметим, что ее ранг, с одной стороны, не меньше, чем $n-r$, поскольку содержит ненулевой минор этого порядка, но, с другой стороны, не больше, чем число строк в этой матрице, равное $n-r$, и потому ранг в точности равен $n-r$, что доказывает линейную независимость построенных частных решений.

Теорема доказана.

Определение 07.9. *Фундаментальной системой решений* для системы линейных уравнений (07.1) называется совокупность любых $n-\mathrm{rg}\|A\|$ частных, линейно независимых решений однородной системы (07.1), где n – число неизвестных в системе (07.1), а $\|A\|$ – ее основная матрица. Матрица (07.5) называется *фундаментальной.*

Теорема 07.6. **Каждое частное решение однородной системы (07.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.**

Доказательство.

Пусть дано решение $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ однородной системы (07.1). Рассмотрим матрицу размера $(n-r+1)\times n$

$$\left\|\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & \xi_{r+1} & \xi_{r+2} & \dots & \xi_n \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right\|, \quad (07.6)$$

ранг которой, с одной стороны, очевидно, не меньше, чем $n-r$. С другой стороны, первые r столбцов этой матрицы являются линейными комбинациями (заданными соотношениями (07.4)) последних $n-r$ столбцов.

Действительно, эти соотношения, связывающие значения свободных и основных переменных, одни и те же для всех строк матрицы (07.6), и потому в этой матрице каждый из первых r столбцов есть линейная комбинация последних $n-r$. Значит, ранг матрицы не превосходит $n-r$, и, следовательно, равен в точности $n-r$.

Наконец, по теореме 07.1 − *о базисном миноре*, который располагается в последних r строках, первая строка матрицы (07.6) должна быть некоторой линейной комбинацией остальных, и, следовательно, общее решение однородной системы (07.1) может быть записано в виде

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \dots\\ \xi_r\\ \xi_{r+1}\\ \xi_{r+2}\\ \dots\\ \xi_n\end{matrix}\right\| = \lambda_1\left\|\begin{matrix}\xi_1^1\\ \xi_2^1\\ \dots\\ \xi_r^1\\ 1\\ 0\\ \dots\\ 0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}\xi_1^2\\ \xi_2^2\\ \dots\\ \xi_r^2\\ 0\\ 1\\ \dots\\ 0\end{matrix}\right\| + \dots + \lambda_{n-r}\left\|\begin{matrix}\xi_1^{n-r}\\ \xi_2^{n-r}\\ \dots\\ \xi_r^{n-r}\\ 0\\ 0\\ \dots\\ 1\end{matrix}\right\|,$$

где $\lambda_i \ \forall i=[1,n-r]$ – произвольные константы.

Теорема доказана.

Следствие 07.1. **Общее решение неоднородной системы (07.1) может быть дано формулой**

$$\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \dots\\ \xi_r\\ \xi_{r+1}\\ \xi_{r+2}\\ \dots\\ \xi_n\end{matrix}\right\| = \lambda_1\left\|\begin{matrix}\xi_1^1\\ \xi_2^1\\ \dots\\ \xi_r^1\\ 1\\ 0\\ \dots\\ 0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}\xi_1^2\\ \xi_2^2\\ \dots\\ \xi_r^2\\ 0\\ 1\\ \dots\\ 0\end{matrix}\right\| + \ \dots\ + \lambda_{n-r}\left\|\begin{matrix}\xi_1^{n-r}\\ \xi_2^{n-r}\\ \dots\\ \xi_r^{n-r}\\ 0\\ 0\\ \dots\\ 1\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\xi_1^0\\ \xi_2^0\\ \dots\\ \xi_r^0\\ \xi_{r+1}^0\\ \xi_{r+2}^0\\ \dots\\ \xi_n^0\end{matrix}\right\|,$$

где $\left\|\begin{matrix}\xi_1^0\\ \xi_2^0\\ \dots\\ \xi_r^0\\ \xi_{r+1}^0\\ \xi_{r+2}^0\\ \dots\\ \xi_n^0\end{matrix}\right\|$

является некоторым частным решением неоднородной системы (07.1), а числа $\lambda_i \ \forall i = [1, n-r]$ **– произвольные константы.**

Доказательство.

Пусть $\| x^0 \|$ – некоторое (найденное, например, подбором) частное решение неоднородной системы (07.1), а $\| x \|$ – ее произвольное решение. Тогда по лемме 07.5 произвольное решение однородной системы (07.1) $\| y \|$ представимо в виде $\| y \| = \| x \| - \| x^0 \|$. Откуда получаем $\| x \| = \| y \| + \| x^0 \|$.

Следствие доказано.

Из теорем 07.5 и 07.6 непосредственно вытекает

Следствие 07.2. **Для того чтобы однородная система (07.1) с $n<m$ имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы удовлетворял условию $\operatorname{rg}\|A\|<n$.**

В случае, когда основная матрица однородной системы (07.1) квадратная, условие существования нетривиального решения равносильно равенству $\det\|A\|=0$.

Иное, полезное для приложений условие совместности системы линейных уравнений, дает

Теорема 07.7 (Фредгольма). **Для того чтобы система (07.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы *каждое* решение $\|y\|=\|\eta_1 \quad \eta_2 \quad \ldots \quad \eta_m\|^{\mathrm{T}}$ *сопряженной* системы**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1+\alpha_{21}\eta_2+\ldots+\alpha_{m1}\eta_m=0, \\ \alpha_{12}\eta_1+\alpha_{22}\eta_2+\ldots+\alpha_{m2}\eta_m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\eta_1+\alpha_{2n}\eta_2+\ldots+\alpha_{mn}\eta_m=0 \end{cases}$$

(или в матричном виде $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\|=\|o\|$) удовлетворяло условию $\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i=0$ (или в матричном виде $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|=0$).

Доказательство необходимости.

Пусть система уравнений (07.1) совместна, то есть для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\|=\|A\|\|x\|$.

Тогда, вычисляя произведение $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \|$ в предположении, что $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$, получаем

$\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = (\| A \| \| x \|)^{\mathrm{T}} \| y \| = \| x \|^{\mathrm{T}} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| x \|^{\mathrm{T}} \| o \| = 0$.

Доказательство достаточности.

Пусть $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0$ для *любого* решения системы линейных уравнений $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений

$$\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \| \quad \text{и} \quad \begin{cases} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|, \\ \| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0 \end{cases}$$

совпадают, и для этих систем максимальное число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно теоремам 07.5 и 07.6,

$$m - \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = m - \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}} \quad \text{или} \quad \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}},$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\mathrm{rg} \| A \| = \mathrm{rg} \| A | b \|$, означающее в силу теоремы 07.4 (Кронекера-Капелли) совместность системы линейных уравнений $\| A \| \| x \| = \| b \|$.

Теорема доказана.

Альтернативное доказательство теоремы Фредгольма рассматривается в рамках темы 14 (см. теорему 14.5).

Элементарные преобразования. Метод Гаусса

Практическое применение теорем 07.6 и 07.7 затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Определение же рангов основной и расширенной матриц независимо от поиска решений оказывается весьма нерациональной (с точки зрения расходования вычислительных ресурсов) процедурой.

Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (07.1), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в приведении расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под "наиболее простым" видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным. Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n$ $(n > m)$, имеющей верхнюю треугольную форму

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);

- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ранг ее матрицы) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида. Например:

- перестановка *столбцов* с номерами i и j матрицы $\| A \|$ размера $m \times n$ осуществляется путем ее умножения *справа* на матрицу $\| S \|_1$ размера $n \times n$, которая в свою очередь получается из единичной матрицы n-го порядка $\| E \|$ путем перестановки в последней i-го и j-го столбцов;
- умножение i-й *строки* матрицы $\| A \|$ на некоторое число $\lambda \neq 0$ осуществляется путем умножения $\| A \|$ *слева* на матрицу $\| S \|_2$, которая получается из единичной размера $m \times m$ матрицы $\| E \|$ путем замены в последней i-го диагонального элемента (равного единице) на λ;

- сложение *строк* с номерами i и j матрицы $\| A \|$ осуществляется путем ее умножения *слева* на матрицу $\| S \|_3$ размера $m \times n$, которая получается из единичной матрицы порядка m $\| E \|$ путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в i-й строке и j-м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте i-й строки исходной матрицы $\| A \|$).

Покажите самостоятельно, что если матрица $\| S \|$ квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы $\| S \|$ на матрицу $\| A \|$, то справедливо равенство

$$\operatorname{rg}(\| S \| \| A \|) = \operatorname{rg} \| A \|.$$

Поскольку $\det \| S \|_1 = -1$, $\det \| S \|_2 = \lambda \neq 0$ и $\det \| S \|_3 = 1$, то ранг $\| A \|$ при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

Проверьте самостоятельно, что будут также справедливы следующие теоремы.

Теорема 07.8. **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся произведением матриц данных элементарных преобразований.**

Теорема 07.9. **Если умножение матрицы $\| A \|$ слева на квадратную матрицу $\| S \|$ реализует некоторое преобразование над строками $\| A \|$, то умножение $\| A \|$ справа на $\| S \|^{\mathrm{T}}$ реализует то же самое преобразование матрицы $\| A \|$, но выполненное над ее столбцами.**

Отмеченные свойства элементарных преобразований позволяют в ряде случаев упрощать вычислительные процедуры с матричными выражениями. Пусть, например, $\|S\|^*$ есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу $\|A\|$ в единичную. Тогда преобразование с матрицей $\|S\|^*$ переведет единичную матрицу $\|E\|$ в матрицу $\|A\|^{-1}$, поскольку в силу $\|E\|=\|S\|^*\|A\|$ и невырожденности $\|A\|$ справедливы равенства

$$\|E\|\|A\|^{-1}=\|S\|^*\|A\|\|A\|^{-1} \text{ или } \|A\|^{-1}=\|S\|^*\|E\|.$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц $\|A\|^{-1}\|B\|$ может быть сведено к последовательности элементарных преобразований матрицы $\|A|B\|$ (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы $\|B\|$ к матрице $\|A\|$), приводящих подматрицу $\|A\|$ к единичной. В результате искомое произведение оказывается на месте подматрицы $\|B\|$.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса на примере решения следующей системы линейных уравнений.

Задача 07.2. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7, \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12. \end{cases}$$

Решение.

1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right\|.$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого

а) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на (-3), и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами (-5) и 1 соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для верхнего треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right\|;$$

б) выполняем теперь операцию обнуления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую – разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|;$$

в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.

3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Потому заключаем, что

а) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме 07.4 Кронекера–Капелли);

б) однородная система уравнений будет иметь по теореме 07.5 $n - \operatorname{rg}\| A \| = 5 - 2 = 3$ линейно независимых решения.

4°. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое – за свободные:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \qquad \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5. \end{cases} \qquad (07.7)$$

Второе уравнение для удобства вычислений умножим на (-1), а третье и четвертое уравнения отбросим как удовлетворяющиеся тождественно.

Положив в системе (07.7) свободные неизвестные равными нулю, находим частное решение неоднородной системы $\left\| \begin{matrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$.

Значения основных неизвестных определяются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7, \\ \xi_2 = 23. \end{cases}$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 0 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим нормальную фундаментальную систему решений по схеме, использованной при доказательстве теоремы 07.5. Первое независимое решение $\left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$ находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1, \\ \xi_2 = -2. \end{cases}$$

Аналогично получаются $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$ – второе и третье решения.

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_3 \begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.$$

Замечание: поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.