Тема 08. Определение линейного пространства. Линейная зависимость элементов линейного пространства. Базис. Размерность. Существование и единственность разложения по базису. Подпространство. Размерность суммы двух подпространств. Линейная оболочка набора элементов. Ее свойства и размерность. Гиперплоскость. Координатное представление элементов и операций с ними в конечномерном линейном пространстве. Формулы перехода.

Определение линейного пространства

Определение 08.1.	Множество Λ, состоящее из элементов $x, y, z, \ldots$, для которых определена операция сравнения[8], называется *линейным пространством*, если 1°. Каждой паре элементов x, y этого множества поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их «*суммой*» и обозначаемый $x + y$, таким образом, что выполнены аксиомы а) $x + y = y + x$; б) $x + (y + z) = (x + y) + z$; в) существует *нулевой элемент* o, такой, что для любого $x \in \Lambda$ имеет место $x + o = x$; г) для каждого x существует *противоположный элемент* $-x$, такой, что $-x + x = o$.

[8] Эта операция дает возможность устанавливать факты «равенства x и y» $(x = y)$ или «неравенства x и y» $(x \neq y)$ для любой пары двух элементов принадлежащих множеству Λ.

2°. Для любого элемента x и любого числа λ существует такой принадлежащий Λ элемент, обозначаемый λx и называемый «*произведением числа на элемент*», что выполнены аксиомы:

а) $1x = x$;

б) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

3°. Для операций сложения элементов и умножения элемента на число выполнены аксиомы дистрибутивности:

а) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

б) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \Lambda$; и для любых чисел λ, μ.

Замечания: 1°. Под “числами” в аксиомах второй и третьей групп подразумеваются действительные или комплексные числа.

2°. Первая группа аксиом равносильна требованию, чтобы Λ являлось абелевой группой относительно операции сложения (см. § 5.6).

Пример 08.1. Линейным пространством является [9]:

1°. Множество всех векторов на плоскости.

2°. Множество всех векторов в пространстве.

3°. Множество всех n-компонентных столбцов.

4°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n.

5°. Множество всех матриц размера $m \times n$.

[9] Предполагается, что операции сложения и умножения на число выполняются в соответствии с ранее данными определениями.

6°. $C[\alpha,\beta]$ – множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$.

7°. Множество всех решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Задача 08.1. *Показать, что в общем случае множество радиусов-векторов точек, принадлежащих плоскости* $(\vec{n},\vec{r})=\delta$, *не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра* δ *данное множество будет линейным пространством.*

Задача 08.2. *Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.*

Задача 08.3. *Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел* R^+?

Решение. Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

1°. Пусть операции вводятся “естественным” образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует нулевой элемент.

2°. Если же операцию “сложения” определить как обычное произведение двух чисел, а “умножение числа λ на x” определить как возведение положительного числа x в степень $\lambda\in R$:

$$\text{«сложение } x+y\text{»} \quad := \quad x\cdot y;\ x>0, y>0\ ,$$
$$\text{«умножение } \lambda x\text{»} \quad := \quad x^{\lambda};\quad x>0,$$

то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число “1”.

Теорема 08.1. **Линейное пространство имеет единственный нулевой элемент.**

Доказательство.

Пусть существуют два различных нулевых элемента o_1 и o_2. Тогда, согласно аксиоме 1°(в) из определения 08.1 линейного пространства, будут справедливы равенства

$$o_1 + o_2 = o_1 \quad \text{и} \quad o_2 + o_1 = o_2 .$$

Откуда в силу аксиомы 1°а) − коммутативности операции сложения, получаем $o_1 = o_2$.

Теорема доказана.

Теорема 08.2. **Для каждого элемента x линейного пространства имеет место равенство $0x = o$.**

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (0+1)x = 0x + 1x = 0x + x.$$

Прибавляя к обеим частям равенства $x = 0x + x$ элемент $-x$, противоположный элементу x, получаем, что $0x = o$.

Теорема доказана.

Теорема 08.3. **Для каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.**

Доказательство.

Пусть для элемента x существуют два различных противоположных элемента y_1 и y_2. Тогда, согласно аксиоме 1°(г) линейного пространства, будут справедливы равенства $x + y_1 = o$ и $x + y_2 = o$. Прибавим к обеим частям первого равенства элемент y_2, получим

$$y_2 + (x + y_1) = y_2$$

в силу ассоциативности операции сложения и второго равенства. Но, с другой стороны,

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = o + y_1 = y_1,$$

то есть $y_2 = y_1$.

Теорема доказана.

Теорема 08.4. **Для каждого $x \in \Lambda$ противоположным элементом служит элемент $-x = (-1)x$.**

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства и в силу теорем 08.2–08.3 имеем

$$o = 0x = (1-1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x.$$

Это равенство и означает, что противоположный к x элемент имеет вид $-x = (-1)x$.

Теорема доказана.

Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве

Определение 08.2.

1°. Выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства Λ.

2°. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно зависимыми,* если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$.

3°. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = o$ следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Лемма 08.1.

Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 02.1, в котором слово “вектор” заменено словом “элемент”.

Лемма 08.2.

Если некоторое подмножество множества элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказательство.

Без ограничения общности можно предположить, что линейно зависимое подмножество состоит их первых $k < n$ элементов множества $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, такие, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = o$.

Но это равенство можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 x_i = o,$$

что и доказывает линейную зависимость элементов

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Лемма доказана.

Определение 08.3. *Базисом* в линейном пространстве Λ называется любой упорядоченный набор его n элементов, если

1) эти элементы линейно независимые;
2) любое подмножество в Λ, содержащее $n+1$ элемент, включая эти n элементов, линейно зависимое.

Определение 08.4. Линейное пространство Λ называется n*-мерным* и обозначается Λ^n, если в нем существует базис, состоящий из n элементов. Число n называется *размерностью* линейного пространства Λ^n и обозначается $\dim(\Lambda^n)$.

Теорема 08.5. **Для каждого элемента линейного пространства Λ^n существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных элементов.**

Доказательство.

Пусть в линейном пространстве Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и произвольный элемент x. Тогда по определению базиса система элементов $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, x\}$ линейно зависима, то есть существуют числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\lambda_0 x + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = o$, где число $\lambda_0 \neq 0$ в силу линейной независимости базисных элементов. Поэтому

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) g_i$$

и *существование* разложения, таким образом, доказано.

Покажем теперь *единственность* разложения. Допустим, что существуют две различные линейные комбинации

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \quad \text{и} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i .$$

Тогда, вычитая эти равенства почленно, получаем, что $\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)g_i = o$, но это означает, что в предположении $\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i - \eta_i\right| \neq 0$ система элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейно зависима, а это противоречит определению базиса.

Теорема доказана.

В общем случае линейное пространство может не иметь базиса. Таким свойством обладает, например, линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента. В таблице 08.1 приведены примеры базисов в линейных пространствах.

Таблица 08.1

Примеры базисов в линейных пространствах

Линейное пространство	**Размерность**	**Пример базиса**
Множество всех векторов на плоскости	2	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов на плоскости.
Множество всех векторов в пространстве	3	Упорядоченная тройка нормированных, попарно ортогональных векторов.
Множество всех n*-компонентных столбцов*	n	n столбцов вида $\left\|\begin{matrix}1\\0\\\ldots\\0\end{matrix}\right\|;\left\|\begin{matrix}0\\1\\\ldots\\0\end{matrix}\right\|;\ldots;\left\|\begin{matrix}0\\0\\\ldots\\1\end{matrix}\right\|..$

Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n	$n+1$	$n+1$ одночлен вида $P_1(\tau)=1$; $P_2(\tau)=\tau$; $P_3(\tau)=\tau^2$; $P_4(\tau)=\tau^3$; ... ; $P_n(\tau)=\tau^{n-1}$; $P_{n+1}(\tau)=\tau^n$.
Множество всех матриц размера $m\times n$	$n\cdot m$	$n\cdot m$ всевозможных различных матриц размера $m\times n$, все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1.
Множество всех функций, непрерывных на $[\alpha,\beta]$	∞	Базис не существует[10].
Множество решений однородной системы m *линейных уравнений с* n *неизвестными и рангом основной матрицы, равным* r	$n-r$	Нормальная фундаментальная система решений.

[10] В этом линейном пространстве (вопреки определению 08.3) для любого натурального n можно построить линейно независимый набор, состоящий из $n+1$ элемента. Например, множество функций вида

$$\{1,\ \tau,\ \tau^2,\ \dots,\ \tau^n\}.$$

Подпространство

Определение 08.5. Непустое множество Ω, образованное из элементов линейного пространства Λ, называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ

1) $x + y \in \Omega$,

2) $\lambda x \in \Omega$.

Замечание: из определения 08.5 следует, что множество Ω само является линейным пространством, поскольку для него, очевидно, выполняются все аксиомы операций в линейном пространстве.

Пример 08.2.

1°. Множество радиусов-векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиусов-векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.

2°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n, есть подпространство в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

3°. В пространстве n-мерных столбцов совокупность решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с основной матрицей ранга r образует подпространство размерности $n - r$.

4°. Подпространством любого линейного пространства будет:

а) само линейное пространство;

б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

Определение 08.6. Пусть даны два подпространства Ω_1 и Ω_2 линейного пространства Λ. Тогда

1°. *Объединением* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, таких, что $x \in \Omega_1$ либо $x \in \Omega_2$. Объединение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

2°. *Пересечением* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, принадлежащих Ω_1 и Ω_2 одновременно. Пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

3°. *Суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 + \Omega_2$.

4°. *Прямой суммой* подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$ при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{o\}$. Прямая сумма обозначается $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Покажите самостоятельно, что справедлива

Теорема 08.6. **Как сумма, так и пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 в Λ суть также подпространства в Λ.**

Теорема 08.7. **Размерность *суммы* подпространств Ω_1 и Ω_2 равна**

$$\dim(\Omega_1+\Omega_2)= \\ =\dim(\Omega_1)+\dim(\Omega_2)-\dim(\Omega_1\cap\Omega_2).$$

Доказательство.

1°. Пусть подпространство $\Omega_1\cap\Omega_2$ имеет базис $\{g_1,g_2,...,g_k\}$ и соответственно размерность k. Дополним этот базис элементами $\{g'_1,g'_2,...,g'_l\}$ до базиса в Ω_1 и элементами $\{g''_1,g''_2,...,g''_m\}$ до базиса в Ω_2. В этом случае каждый элемент $x\in\Omega_1+\Omega_2$ может быть разложен по системе элементов

$$\{g_1,g_2,...,g_k,g'_1,g'_2,...,g'_l,g''_1,g''_2,...,g''_m\}.$$

2°. Покажем теперь, что набор элементов

$$\{g_1,g_2,...,g_k,g'_1,g'_2,...,g'_l,g''_1,g''_2,...,g''_m\}$$

линейно независим в Λ.

Рассмотрим некоторую, равную нулевому элементу, линейную комбинацию этих элементов:

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda'_i g'_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j+\sum_{p=1}^{m}\lambda''_p g''_p=o. \qquad (08.1)$$

Заметим, что по построению $\tilde{x}=\sum_{p=1}^{m}\lambda''_p g''_p\in\Omega_2$, но, с другой стороны, этот же элемент

$$\tilde{x} = \sum_{p=1}^{m} \lambda''_p g''_p = -(\sum_{i=1}^{l} \lambda'_i g'_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j) \in \Omega_1 .$$

Это означает, что $\tilde{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ и, следовательно, в равенстве (08.1) все

$$\lambda'_i = 0 , \; i = [1, l] \; ; \quad \lambda''_p = 0 \; , \; p = [1, m] .$$

А поскольку $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$ – базис в $\Omega_1 \cap \Omega_2$, то и все $\lambda_j = 0, \;\; j = [1, k]$, и линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (08.1), тривиальная. Следовательно,

$$\{g_1, g_2, ..., g_k, g'_1, g'_2, ..., g'_l, g''_1, g''_2, ..., g''_m\}$$

– линейно независимая система элементов.

3°. Из пункта 2° следует, что набор элементов

$$\{g_1, g_2, ..., g_k, g'_1, g'_2, ..., g'_l, g''_1, g''_2, ..., g''_m\}$$

является базисом в $\Omega_1 + \Omega_2$. Размерность подпространства $\Omega_1 + \Omega_2$ при этом равна

$$\dim(\Omega_1 + \Omega_2) = l + k + m = (k + l) + (k + m) - k =$$
$$= \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Теорема доказана.

Следствие 08.1. В случае прямой суммы подпространств

$$\dim(\Omega_1 \oplus \Omega_2) = \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2)$$

и каждый элемент $x \in (\Omega_1 \oplus \Omega_2)$ представим в виде $x_1 + x_2$ так, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$, *единственным* образом, поскольку набор элементов

$$\{g'_1, g'_2, ..., g'_l, g''_1, g''_2, ..., g''_m\}$$

является базисом в $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Линейная оболочка системы элементов

Определение 08.7. Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ линейного пространства Λ называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается

$$L\{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

Пример 08.3. Множество многочленов степени не выше, чем n, является линейной оболочкой набора одночленов $\{1, \tau, \tau^2, ..., \tau^n\}$ в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

Пусть задан набор элементов $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \in \Lambda$, порождающих линейную оболочку $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ и справедлива

Теорема 08.8. **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке $L\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, является в Λ подпространством размерности m, где m – максимальное число линейно независимых элементов в наборе**

$$\{x_1, x_2, ..., x_k\}.$$

Доказательство.

1°. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для совокупности элементов вида $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ (в предположении, что λ_i − произвольные числа) справедливы все аксиомы из определения 08.1, то есть рассматриваемая линейная оболочка является линейным пространством.

2°. Пусть максимальное число линейно независимых элементов в наборе $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ равно $m \le k$. Без ограничения общности можно считать, что этими элементами являются $x_1, x_2, ..., x_m$. Тогда

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji} x_i \ ; \quad j = [m+1, k]$$

и любой элемент линейной оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

3°. Покажем теперь, что любой набор из l ($l > m$) элементов данной линейной оболочки будет линейно зависимым. Для этого выберем l элементов $y_1, y_2, ..., y_l$, принадлежащих линейной оболочке, и выразим их через элементы $x_1, x_2, ..., x_m$, получим

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ji} x_i \ ; \quad j = [1, l].$$

Приравняем нулевому элементу произвольную линейную комбинацию выбранного набора $y_1, y_2, \ldots, y_l$:

$$\sum_{j=1}^{l} \mu_j y_j = \sum_{j=1}^{l} \mu_j \sum_{i=1}^{m} \beta_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{l} \beta_{ji} \mu_j) x_i = o.$$

Поскольку элементы $x_1, x_2, ..., x_m$ линейно независимы, то коэффициенты μ_i должны удовлетворять следующей однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{l} \beta_{ji} \mu_j = 0 \ , \quad i = [1, m].$$

Пусть ранг ее основной матрицы равен r.

Поскольку $r \le m$, то эта система имеет (по теореме 07.5)

$$l - r \ge l - m > 0$$

линейно независимых, и следовательно, *ненулевых* решений. Принимая во внимание, что l и m − не равные друг другу натуральные числа, получаем

$$l - m \ge 1,$$

то есть существует нетривиальная линейная комбинация элементов $y_1, y_2, \ldots, y_l$, равная o.

Теорема доказана.

Гиперплоскость

Определение 08.8. Множество Γ, образованное из элементов вида $x + x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ, а x – любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ.

Замечания.

1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.

2°. Если $\dim(\Omega) = k$, то говорят о k-мерной гиперплоскости.

Например, общее решение совместной *неоднородной* системы линейных уравнений с n неизвестными является гиперплоскостью в линейном пространстве n-компонентных столбцов.

Задача 08.4. *Показать, что если элементы x и y принадлежат некоторой гиперплоскости Γ, то ей будет принадлежать и элемент $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, где α – любое число.*

Операции с элементами линейного пространства в координатном представлении

Определение 08.9. Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ разложения по базису

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$$

называются *координатами* (или *компонентами*) элемента x линейного пространства Λ^n в базисе

$$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}.$$

Заметим, что в силу теоремы 08.5 элемент x линейного пространства Λ^n в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ однозначно представляется n-компонентным столбцом, называемым *координатным представлением элемента* x *в базисе* $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$:

$$\| x \|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| .$$

В Λ^n базис может быть выбран не единственным способом и потому необходимо установить правило изменения координат элемента линейного пространства Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса: “старый” $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и “новый” $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ с соответствующими координатными разложениями элемента x: $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $x = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i g'_i$.

Пусть, кроме того, известны разложения элементов “нового” базиса по элементам “старого”:

$$g'_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i ; \; j = [1, n]. \qquad (08.2)$$

Определение 08.10. Матрица $\| S \|$, j-й $(\forall j = [1, n])$ столбец которой состоит из коэффициентов σ_{ij} координатных разложений элементов “нового” базиса по элементам “старого”, называется *матрицей перехода* от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

Отметим, что это определение является обобщением определения 03.10 и что справедлива

Теорема 08.9. **Координаты $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ связаны соотношениями $\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n]$, называемыми *формулами перехода,* где коэффициенты σ_{ij} – элементы матрицы перехода $\| S \|$.**

Доказательство.

В силу соотношений (08.2) будут справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = x = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j g'_j = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j) g_i$$

или $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j) g_i = o$.

Но если линейная комбинация линейно независимых (в данном случае базисных) элементов равна нулевому элементу, то она тривиальная. Откуда получаем, что

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n].$$

Теорема доказана.

Заметим, что если столбец элементов “нового” базиса выражается через столбец элементов “старого” при помощи умножения слева на транспонированную матрицу перехода $\| S \|^{\mathrm{T}}$, то координатный столбец в “старом” базисе равен произведению матрицы перехода на координатный столбец в “новом” базисе.

Действительно, рассматривая столбцы $\| x \|_g$ и $\| x \|_{g'}$ в формулах перехода как *двухиндексные* матрицы, получаем

$$\xi_{i1} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \xi'_{j1} \quad \forall i = [1, n] \ ,$$

что равносильно равенству $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$ (см. § 5.1).

Используя аналогичный прием, также и соотношения (08.2) можно записать в матричном виде

$$\left\| \begin{matrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{matrix} \right\| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{matrix} \right\|$$

или $\| g'_1 \quad g'_2 \quad \dots \quad g'_n \| = \| g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n \| \| S \|$.

В заключение выясним, как операции с элементами линейного пространства выполняются в координатной форме.

Пусть в конкретном базисе $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i g_i$ и $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i g_i$, тогда в силу определения базиса и аксиом линейного пространства будут справедливы следующие соотношения:

1°. Для операции сравнения: два элемента в Λ^n равны тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{n}\xi_i g_i = x = y = \sum_{i=1}^{n}\eta_i g_i$,

или в координатной форме $x = y \quad \Leftrightarrow \quad \| x \|_g = \| y \|_g$.

2°. Для операции сложения: $x + y = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i + \eta_i) g_i$,

или в координатной форме $\| x + y \|_g = \| x \|_g + \| y \|_g$.

3°. Для операции умножения на число:

$$\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{n}\xi_i g_i = \sum_{i=1}^{n}(\lambda \xi_i) g_i ,$$

или в координатной форме $\| \lambda x \|_g = \lambda \| x \|_g$.

Откуда следует, что *элементы конечномерного линейного пространства не только могут представляться матрицами* (*столбцами*), *но и правила выполнения операций с этими элементами совпадают с определением соответствующих матричных операций.*