Тема 09. Линейные отображения и преобразования в линейном пространстве. Координатное представление линейных отображений, инъективность и сюръективность. Правило изменения матрицы линейного отображения при замене базисов.

Линейные операторы: отображения и преобразования

Определение 09.1.	Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^*. Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^*, действие которого обозначается как $y = \hat{A}x$. При этом элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x – *прообразом элемента* y.

Как и в § 5.2, операторы подразделяются на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subset \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$. В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что из контекста ясно, идет ли речь об отображении или о преобразовании.

Определение 09.2.	Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства 1°. $\hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2$ и 2°. $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x$.

Пример 09.1.

1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix},$$

связывающее вектор-прообраз $x = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ с вектором-образом $y = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix}$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве непрерывных функций $f(\tau)$ линейным оператором является операция умножения непрерывной функции на независимую переменную τ.

Задача 09.1. *Доказать, что операторы в примерах* 1°, 2° *и* 3° *являются линейными.*

Задача 09.2. *Является ли линейным оператор* $\hat{A}$, *ставящий каждому элементу* $x \in \Lambda$ *в соответствие фиксированный элемент* $a \in \Lambda$?

Решение. Если элемент $a = o$, то $\hat{A}$ – линейный оператор. Действительно, если $\hat{A}$ линейный, то, с одной стороны,

$$\hat{A}(\lambda a + \mu a) = \lambda \hat{A} a + \mu \hat{A} a = \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu) a,$$

но, с другой,

$$\forall \lambda, \mu : \hat{A}(\lambda a + \mu a) = a \quad \Rightarrow \quad a = (\lambda + \mu) a \quad \Rightarrow \quad a = o.$$

Действия с линейными операторами

Определение 09.3. Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными* (что обозначается как $\hat{A}=\hat{B}$), если

$$\forall x \in \Lambda: \quad \hat{A}x=\hat{B}x .$$

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A}+\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x+\hat{B}x$.

Лемма 09.1. **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Доказательство.

Пусть $x, y \in \Lambda$ и λ; μ – числа, а $\hat{C}=\hat{A}+\hat{B}$, тогда

$$\begin{aligned}\hat{C}(\lambda x+\mu y) &= A(\lambda x+\mu y)+\hat{B}(\lambda x+\mu y)= \\ &=\lambda\hat{A}x+\mu\hat{A}y+\lambda\hat{B}x+\mu\hat{B}y= \\ &=\lambda(\hat{A}x+\hat{B}x)+\mu(\hat{A}y+\hat{B}y)= \\ &=\lambda(\hat{A}+\hat{B})x+\mu(\hat{A}+\hat{B})y=\lambda\hat{C}x+\mu\hat{C}y.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 09.4. *Нулевым* оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение 09.5. *Оператором, противоположным оператору $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, ставящий каждому x элементу линейного пространства Λ в соответствие элемент $-(\hat{A}x)$.*

Из решения задачи 09.2 следует, что нулевой оператор линейный. Покажите самостоятельно, что оператор противоположный любому линейному оператору также линейный.

Лемма 09.2. **Для любых линейных операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ выполняются соотношения**

$$\hat{A}+\hat{B}=\hat{B}+\hat{A};$$
$$(\hat{A}+\hat{B})+\hat{C}=\hat{A}+(\hat{B}+\hat{C});$$
$$\hat{A}+\hat{O}=\hat{A};\ \hat{A}+(-\hat{A})=\hat{O}.$$

Доказательство.

Справедливость утверждения леммы непосредственно вытекает из определений 09.3 − 09.5 и аксиоматики линейного пространства.

Определение 09.6. *Произведением* числа λ на линейный оператор $\hat{A}$ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма 09.3. **Произведение числа на линейный оператор является линейным оператором, для которого выполняются соотношения**

$$\alpha(\beta\hat{A})=(\alpha\beta)\hat{A};\qquad 1\hat{A}=\hat{A};$$
$$(\alpha+\beta)\hat{A}=\alpha\hat{A}+\beta\hat{A};$$
$$\alpha(\hat{A}+\hat{B})=\alpha\hat{A}+\alpha\hat{B}.$$

Доказательство.

Утверждение леммы проверяется непосредственно. Например, для третьего равенства имеем

$$\forall x\in\Lambda:\ (\alpha+\beta)\hat{A}x=$$
$$=\hat{A}((\alpha+\beta)x)=\hat{A}(\alpha x+\beta x)=\alpha\hat{A}x+\beta\hat{A}x.$$

Теорема 09.1. **Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является линейным пространством.**

Доказательство.

Следует из определений 08.1, 09.3–09.6 и лемм 09.1, 09.2.

Определение 09.7. *Произведением* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема 09.2. **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}\ ; \quad \hat{A}(\hat{B}+\hat{C}) = \hat{A}\hat{B}+\hat{A}\hat{C};$$

$$(\hat{A}+\hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{C}.$$

Доказательство.

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов. Действительно, $\forall x, y \in \Lambda$ и любых чисел α, β

$$\hat{A}\hat{B}\,(\alpha x+\beta y) = \hat{A}(\hat{B}(\alpha x+\beta y)) = \hat{A}(\alpha \hat{B}x+\beta \hat{B}y) =$$

$$= \alpha \hat{A}(\hat{B}x)+\beta \hat{A}(\hat{B}y) = \alpha(\hat{A}\hat{B})x+\beta(\hat{A}\hat{B})y.$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$(\hat{A}(\hat{B}\hat{C}))x = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

но, с другой стороны,

$$((\hat{A}\hat{B})\hat{C})x = \hat{A}\hat{B}(\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание: в общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть

$$\hat{A}\,\hat{B} \neq \hat{B}\,\hat{A}.$$

Определение 09.8. Оператор $\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть *нулевой* оператор.

Задача 09.3. *В линейном пространстве алгебраических многочленов* $P_n(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ *найти коммутатор для операторов*: $\hat{A}$, *ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и* $\hat{B}$ *– оператора умножения многочлена на независимую переменную.*

Решение. Построим оператор $\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\Big) = \sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k\tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau) = \tau\,\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k\Big) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau)) = \tau\Big(\sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k\tau^{k-1}\Big) = \sum_{k=1}^{n} k\,\alpha_k\tau^k = \sum_{k=0}^{n} k\,\alpha_k\tau$$

$$A(\hat{B}P_n(\tau)) = \frac{d}{d\tau}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}\Big) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k,$$

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau)=(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k)-(\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=P_n(\tau).$$

Следовательно, данные линейные операторы не коммутируют.

В рассмотренной выше задаче 09.3 оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

Определение 09.9. Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть

$$\hat{E}x=x \quad \forall x\in\Lambda .$$

Докажите самостоятельно справедливость соотношений: $\hat{A}\hat{E}=\hat{E}\hat{A}=\hat{A}\ \forall\hat{A}$, а также линейность и единственность $\hat{E}$.

Определение 09.10. Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* для линейного оператора $\hat{A}$ (обозначается $\hat{A}^{-1}$), если

$$\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}=\hat{E} \quad .$$

Пример 09.2. В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha,\beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha)=0$; $k=0,1,2,\ldots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f=\dfrac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f=\int\limits_{\alpha}^{\tau}f(\sigma)d\sigma$ − оператор

интегрирования с переменным верхним пределом являются взаимно обратными.
Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau}\int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}f = \int_{\alpha}^{\tau}\frac{df}{d\sigma}d\sigma = f(\tau) - f(a) = f(\tau) = \hat{E}f \ .$$

Замечания. 1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{B}$ имеет место

$$(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o \quad \forall x \in \Lambda \, ,$$

и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{B}$.

2°. Обратный оператор, если существует, то только единственный. (Покажите это самостоятельно, использовав как аналог доказательство леммы 06.1.)

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из справедливости условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E},$ что имеет место, например, в пространстве многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$$

для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ ставит в соответствие многочлен $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1}$.

Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$ являющийся *отображением* в Λ^m с базисом $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$. Ранее было показано, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение по базису

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i \,, \quad \text{то есть} \quad \| x \|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| .$$

Аналогично в Λ^m существует единственное разложение для $y = \hat{A}x$, для которого в силу линейности $\hat{A}$ справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i .$$

Приняв во внимание возможность и единственность в Λ^m разложения $\hat{A} g_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_k \;\; \forall i = [1, n]$, с одной стороны, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i) f_k .$$

С другой стороны, если $\| y \|_f = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{Vmatrix}$ – координатное представление, то имеет место равенство $y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k f_k$. Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i \ ; k = [1, m].$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению прообраза. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ в паре конкретных базисов полностью и однозначно описывается матрицей размера $m \times n$ с элементами α_{ki}.

Определение 09.11. Матрица размера $m \times n$, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A} g_i$:

$$\| \hat{A} \|_{fg} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix},$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисах

$$\{ g_1, g_2, \dots, g_n \} \in \Lambda^n \text{ и } \{ f_1, f_2, \dots, f_m \} \in \Lambda^m .$$

В матричной форме соотношения $\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_i \ ; k = [1, m]$ имеют вид

$$\| y \|_f = \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g , \tag{09.1}$$

в чем легко убедиться, воспользовавшись их двухиндексной формой записи:

$$\eta_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_{i1} \ ; k = [1, m] .$$

Полученный результат формулируется как

Теорема 09.3. **Между множеством всех линейных операторов вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ и множеством всех матриц размера $m \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.**

Доказательство.

Выше было показано, что каждому линейному оператору для конкретной пары базисов $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ можно сопоставить по определению 09.11 матрицу размера $m \times n$.

С другой стороны, соотношение

$$\left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$$

может быть принято за определение некоторого оператора вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$, линейность которого следует из правил операций с матрицами.

Теорема доказана.

Пример 09.3.

1°. В трехмерном векторном пространстве с ортонормированным базисом рассмотрим линейный оператор, ортогонально проектирующий радиусы-векторы на плоскость Oxy. Поскольку в данном случае

$$\begin{aligned} \hat{A}\vec{g}_1 &= 1\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \\ \hat{A}\vec{g}_2 &= 0\vec{g}_1 + 1\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \\ \hat{A}\vec{g}_3 &= 0\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \end{aligned}, \text{ то } \left\| \hat{A} \right\|_g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Действия с линейными операторами в матричной форме

Будем рассматривать далее операторы вида $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^n$, то есть линейные *преобразования*, действующие в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, матрица которых квадратная, порядка n. Ранее введенные (см. тему 01) операции с матрицами позволяют описать для конкретного базиса действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. Сравнение операторов: $\hat{A} = \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g$.

Согласно определению 09.3 условие $\hat{A} = \hat{B}$ означает, что $\forall x \in \Lambda^n : \quad \hat{A}x = \hat{B}x$, или в координатной форме

$$\left\| \hat{A} \right\|_g \left\| x \right\|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g \left\| x \right\|_g \ \forall x \in \Lambda^n .$$

Но тогда по лемме 06.2 матрица $\left\| \hat{A} \right\|_g - \left\| \hat{B} \right\|_g$ нулевая и, следовательно, условие $\hat{A} = \hat{B}$ равносильно

$$\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g .$$

2°. Сложение операторов: $\| \hat{A}+\hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g + \| \hat{B} \|_g$.

Действительно, из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k$ и $\hat{B}g_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k$ следует, что

$$(\hat{A}+\hat{B})g_i = \hat{A}g_i + \hat{B}g_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ki} + \beta_{ki}) g_k .$$

3°. Умножение оператора на число: $\| \lambda \hat{A} \|_g = \lambda \| \hat{A} \|_g$.

Из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k$ для любого числа λ находим, что

$$(\lambda \hat{A}) g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_{ki}) g_k .$$

4°. Произведение операторов: $\| \hat{A}\hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g \| \hat{B} \|_g$.

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$(\hat{A}\hat{B})g_i = \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A}(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \hat{A} g_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} g_j = \sum_{j=1}^{n} \kappa_{ji} g_j ,$$

где $\kappa_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \beta_{ki}$, что совпадает с определением произведения матриц 06.5.

5°. Обращение операторов: $\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g^{-1}.$

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 09.10 следует, что

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\,\hat{A}^{-1} = \hat{E}\,,$$

принимая во внимание результат пункта 4°, получаем, что искомое матричное представление $\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g$ оператора $\hat{A}^{-1}$ должно удовлетворять соотношениям

$$\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g \left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g = \left\| \hat{E} \right\|_g,$$

то есть являться обратной матрицей к матрице $\left\| \hat{A} \right\|_g$.

Следствие 09.1. **Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\Lambda^n \to \Lambda^m$ равна $m \times n$.**

Доказательство.

Следует из того факта, что размерность линейного пространства всех матриц размера $m \times n$ равна mn.

Следствие доказано.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется $\left\| \hat{A} \right\|_{fg}$ – матрица линейного отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ при замене базисов.

Пусть в Λ^n даны два базиса

$$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \quad \text{и} \quad \{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\},$$

связанные матрицей перехода $\| G \|$, а в Λ^m – два базиса

$$\{ f_1, f_2,..., f_m\} \quad \text{и} \quad \{ f'_1, f'_2,..., f'_m\}$$

с матрицей перехода $\| F \|$. Найдем соотношение, связывающее $\| \hat{A} \|_{fg}$ и $\| \hat{A} \|_{f'g'}$.

В этом случае справедлива

Теорема 09.4. **Матрица линейного оператора $\| \hat{A} \|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2,..., g'_n\}$ и $\{ f'_1, f'_2,..., f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\| \hat{A} \|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2,..., g_n\}$ и $\{ f_1, f_2,..., f_m\}$ соотношением**

$$\| \hat{A} \|_{f'g'} = \| F \|^{-1} \| \hat{A} \|_{fg} \| G \|.$$

Доказательство.

По теореме 08.6 при переходе от базиса $\{g_1, g_2,..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2,..., g'_n\}$ компоненты элементов x – прообраза, и y – образа при действии оператора $\hat{A}$, в этих базисах связаны равенствами $\| x \|_g = \| G \| \| x \|_{g'}$ и $\| y \|_f = \| F \| \| y \|_{f'}$, где

$$\| x \|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{Vmatrix}; \quad \| x' \|_{g'} = \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ ... \\ \xi'_n \end{Vmatrix},$$

$$\text{а} \quad \| y \|_f = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_m \end{Vmatrix} ; \quad \| y \|_{f'} = \begin{Vmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \ldots \\ \eta'_m \end{Vmatrix} .$$

При этом в рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотношениями

$$\| y \|_f = \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g \quad \text{и} \quad \| y \|_{f'} = \| \hat{A} \|_{f'g'} \| x \|_{g'} ,$$

но поскольку матрица перехода имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\| y \|_{f'} = \| F \|^{-1} \| y \|_f = \| F \|^{-1} \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g =$$

$$= \| F \|^{-1} \| \hat{A} \|_{fg} \| G \| \| x \|_{g'} .$$

Наконец, приходим к равенству

$$(\| \hat{A} \|_{f'g'} - \| F \|^{-1} \| \hat{A} \|_{fg} \| G \|) \| x \|_{g'} = \| o \| ,$$

из которого в силу произвольности столбца $\| x \|_{g'}$ и леммы 06.2 следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 09.2. **Матрица линейного преобразования при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ в Λ^n изменяется по правилу**

$$\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| .$$

Следствие 09.3. **Определитель матрицы линейного *преобразования* не зависит от выбора базиса в Λ^n.**

Доказательство.

Согласно следствию 09.2

$$\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) ,$$

но поскольку

$$\det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = (\det \| S \|^{-1})(\det \| \hat{A} \|_g)(\det \| S \|)$$

$$\text{и } \det \| S \|^{-1} = \frac{1}{\det \| S \|} \text{, где } \det \| S \| \neq 0 ,$$

то окончательно получаем, что

$$\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det \| \hat{A} \|_g .$$

Следствие доказано.

Отметим, наконец, что в силу теоремы 09.4 в любом базисе нулевой оператор будет иметь нулевую матрицу, а единичный оператор – единичную.

Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора* $\hat{A}$ будем понимать множество образов *всех* элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ.

Ответ на вопрос: “*Что представляет собой область значений линейного оператора*?” дает

Теорема 09.5. **Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ. Тогда**

1°. Множество элементов $\hat{A}x \ \forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ.

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом
$$\{g_1, g_2, ..., g_n\},$$
то размерность этого подпространства равна $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_g$.

Доказательство.

Пусть Λ^* есть множество элементов вида $\hat{A}x$ и пусть $y_1, y_2 \in \Lambda^*$. Тогда существуют $x_1 \in \Lambda$ и $x_2 \in \Lambda$, такие, что $\hat{A}x_1 = y_1$ и $\hat{A}x_2 = y_2$. По свойству линейности оператора $\hat{A}$ имеем

$$y_1 + y_2 = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 = \hat{A}(x_1 + x_2) \in \Lambda^* .$$

Аналогично $\lambda y = \lambda \hat{A}x = \hat{A}(\lambda x) \in \Lambda^*$ и потому Λ^* есть подпространство Λ.

Пусть теперь $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Поскольку каждый элемент $x \in \Lambda$ есть линейная комбинация базисных элементов, то соответственно в силу линейности каждый элемент из области значений $\hat{A}$ есть *та же* линейная комбинация элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n$, то есть Λ^* – линейная оболочка множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n\}$.

Выделим из множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n\}$ максимальное подмножество линейно независимых элементов, и пусть число их оказалось равным k.

Тогда, применяя теорему 08.9, приходим к заключению, что размерность Λ^* есть k, а из теоремы 07.3 (о ранге матрицы) следует, что и $\mathrm{rg}\| \hat{A} \|_g = k$.

Теорема доказана.

Определение 09.12. *Рангом* линейного оператора $\hat{A}$ в Λ^n называется размерность его области значений.

Ранг линейного оператора $\hat{A}$ обозначается как $\mathrm{rg}\,\hat{A}$.

Следствие 09.4. $\mathrm{rg}\,\hat{A} = \mathrm{rg}\| \hat{A} \|_g \le n$ **и не зависит от выбора базиса.**

Следствие 09.5. **Размерность области значений линейного оператора $\hat{A}$, действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.**

Доказательство.

Поскольку подпространство Λ^* является линейным пространством, то к нему применима теорема 09.5.

Следствие доказано.

Теорема 09.6. **Ранг произведения линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не превосходит ранга каждого из этих операторов.**

Доказательство.

Рассмотрим область значений линейного оператора $\hat{A}\hat{B}$. По следствию 09.5 это подпространство имеет размерность не большую, чем размерность области значений оператора $\hat{B}$.

С другой стороны, область значений оператора $\hat{A}\hat{B}$ содержится в области значений оператора $\hat{A}$, и, следовательно, размерность области значений $\hat{A}\hat{B}$ не превосходит размерности области значений $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Теорема 09.7. **Если квадратная матрица $\|A\|$ невырожденная, то для любой квадратной матрицы $\|B\|$ того же размера**

$$\operatorname{rg}(\|A\|\|B\|) = \operatorname{rg}(\|B\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|B\|.$$

Доказательство.

Будем рассматривать матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ как координатные представления линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в некотором базисе.

Если $\det\|A\| \neq 0$, то существует $\|A\|^{-1}$ и в силу теоремы 09.6 имеем, с одной стороны, $\operatorname{rg}(\|A\|\|B\|) \leq \operatorname{rg}\|B\|$, но с другой – $\operatorname{rg}\|B\| = \operatorname{rg}(\|A\|^{-1}\|A\|\|B\|) \leq \operatorname{rg}(\|A\|\|B\|)$.

Поэтому $\operatorname{rg}(\|A\|\|B\|) = \operatorname{rg}(\|B\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|B\|$.

Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если матрица $\|B\|$ не квадратная, но существует одно из произведений $\|A\|\|B\|$ или $\|B\|\|A\|$, то при $\det\|A\|\neq 0$ также верны равенства $\operatorname{rg}(\|A\|\|B\|)=\operatorname{rg}\|B\|$ или соответственно

$$\operatorname{rg}(\|B\|\|A\|)=\operatorname{rg}\|B\|.$$

В этом можно убедиться, заменив матрицу $\|B\|$ матрицей $\|B\|^*$, являющейся дополнением нулевыми столбцами или нулевыми строками $\|B\|$ до квадратной так, чтобы существовали $\|A\|\|B\|^*$ или $\|B\|^*\|A\|$, ибо очевидно, что

$$\operatorname{rg}\|B\|^*=\operatorname{rg}\|B\|.$$

2°. Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например:

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ, называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker\hat{A}$.

Определение 09.13. *Ядро* линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x\in\Lambda$, таких, что $\hat{A}x=o$.

Теорема 09.8. **Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\mathrm{rg}\hat{A} = r$, то $\ker \hat{A}$ есть подпространство и $\dim(\ker \hat{A}) = n - r$.**

Доказательство.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для $\ker \hat{A}$ выполняются условия определения 08.9.

Пусть в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{ij}\|$. По следствию 09.4 $\mathrm{rg}\|\hat{A}\|_g = r$ для любого базиса. Тогда в координатной форме условие принадлежности некоторого элемента $x \in \Lambda^n$ с $\|x\|_g = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$ ядру оператора $\hat{A}$ имеет вид $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = 0;\ i = [1, n]$.

С другой стороны, поскольку каждое решение однородной системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j = 0;\ i = [1, n]$$

является элементом ядра оператора $\hat{A}$, то размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, которое, согласно теореме 07.5, равно $n - \mathrm{rg}\|\hat{A}\|_g = n - r$.

Теорема доказана.

Типы линейных отображений

Как уже было отмечено, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.

Ранее также было использовано понятие *взаимно однозначного отображения*, называемого иногда *биекцией*. Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение 09.14. Отображение $y=\hat{A}x$, $x\in\Omega$, $y\in\Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1=\hat{A}x_2$ вытекает

$$x_1=x_2\ , \quad x_1,x_2\in\Omega\ .$$

В случае инъекции множество всех значений оператора

$$y=\hat{A}x\ , \quad x\in\Omega,\ y\in\Theta$$

может не совпадать с Θ.

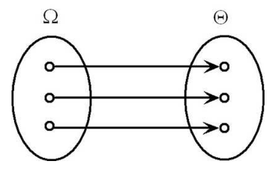
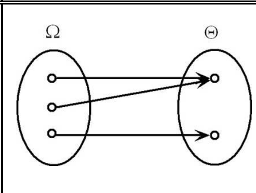
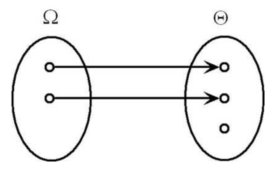
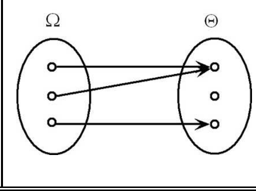
Определение 09.15. Отображение $y=\hat{A}x$, $x\in\Omega$, $y\in\Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω, но, вообще говоря, он не единственен. В таблице 09.1 для сравнения приведены примеры отображений различных типов.

Заметим, что в частном случае, когда линейный оператор $\hat{A}$ отображает элементы Λ^n в элементы Λ^n с базисом $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$, то есть является преобразованием в Λ^n, оказывается возможным следующее дополнение к определению 09.11.

Таблица 09.1

Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюрьективное		
Несюрьективное		

Определение 09.16.

Квадратная матрица $\|\hat{A}\|_g$ порядка n, столбцы которой есть координатные представления элементов

$$\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \ldots, \hat{A}g_n$$

в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, называется *матрицей линейного преобразования* $\hat{A}$ в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность – условия $\ker \hat{A} = \{o\}$. Альтернативную форму условий инъективности и сюръективности в конечномерном случае дает

Теорема 09.9. **Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.**

Доказательство.

1°. Пусть в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ отображение $\hat{A}: \Lambda^n \to \Lambda^m$ имеет матрицу $\| \hat{A} \|_{fg}$, причем $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = m$. Тогда система линейных уравнений вида $\| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g = \| y \|_f$ по теореме 07.4 (Кронекера−Капелли) имеет решение $\forall \| y \|_f \in \Lambda^m$, поскольку для ее расширенной матрицы $\operatorname{rg} \left\| \hat{A} \middle| y \right\| = m$. Значит, для $\hat{A}$ каждый образ имеет хотя бы один прообраз и $\hat{A}$ − сюръективно.

2°. Пусть $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = n$. Тогда, по теореме 06.11 (Крамера), $\forall x_1, x_2 \in \Lambda^n$ система линейных уравнений вида $\| \hat{A} \|_{fg} (\| x_2 \|_g - \| x_1 \|_g) = \| o \|_f$ имеет единственное решение, которое очевидно тривиальное. Поэтому разные образы имеют разные прообразы, и, следовательно, $\hat{A}$ − инъективно.

Теорема доказана.

Иными словами, для $\hat{A}: \Lambda^n \to \Lambda^m$ инъективность равносильна выполнению равенств $\operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^n) = n$, а сюръективность − $\operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} \| \hat{A} \|_{fg} = \dim(\Lambda^m) = m$.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

Задача 09.4. Линейное отображение $\hat{A}: \Lambda^3 \to \Lambda^3$ в некотором базисе задано матрицей $\left\| \hat{A} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.

Решение. 1°. Пусть $\| x \| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\| y \| = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$ – координатные представления соответственно прообраза и образа оператора $y = \hat{A}x$. Тогда ядро – множество элементов x, таких, что $\hat{A}x = o$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений

$$\| \hat{A} \| \| x \| = \| o \| \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения $\hat{A}$ есть линейная оболочка элемента $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение *неинъективное*.

К этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{matrix}\right\| = \operatorname{rg}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\| = 2 < 3$$

– числа столбцов матрицы отображения.

2°. Область значений линейного отображения $\hat{A}$ состоит из элементов $y \in \Theta$, таких, что $y = \hat{A}x\ \forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y ко множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|,$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы 07.4 (*Кронекера–Капелли*), сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы. Затем из условия

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & \eta_1\\ 2 & 3 & 4 & \eta_2\\ 3 & 5 & 7 & \eta_3\end{array}\right\| =$$

$$= \operatorname{rg}\left\|\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & \eta_1\\ 0 & 1 & 2 & 2\eta_1 - \eta_2\\ 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3\end{array}\right\| = \operatorname{rg}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{matrix}\right\| = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1+\eta_2-\eta_3=0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения $\hat{A}$ состоит из элементов вида

$$\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\| = \lambda_1\left\|\begin{matrix}-1\\ 1\\ 0\end{matrix}\right\| + \lambda_2\left\|\begin{matrix}1\\ 0\\ 1\end{matrix}\right\| \quad \forall\lambda_1,\lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1+\eta_2-\eta_3=0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y\in\Theta=\Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega=\Lambda^3$, то данное отображение не является и *сюръективным*.