

Тема 10. Инвариантные подпространства линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, их свойства. Отыскание собственных значений и собственных векторов в конечномерном случае. Инвариантность характеристического многочлена. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Размерность собственного подпространства линейного преобразования.

Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение 10.1. Подпространство Λ^* линейного пространства Λ называется *инвариантным подпространством линейного оператора $\hat{A}$* , если

$$\forall x \in \Lambda^* : \hat{A}x \in \Lambda^* .$$

Пример 10.1. 1°. Множество радиусов-векторов точек некоторой прямой на плоскости Oxy , проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора пово-

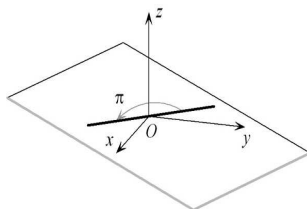


Рис. 10.1

рота на угол π этих радиусов-векторов вокруг оси Oz (см. рис. 10.1).

2°. Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на (α, β) производную любого порядка, n -мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида

$$\{e^{\lambda_1 \tau}, e^{\lambda_2 \tau}, \dots, e^{\lambda_n \tau}\},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – некоторые, попарно различные константы.

Теорема
10.1.

Матрица линейного оператора $\hat{A}$, заданного в линейном пространстве Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, тогда и только тогда имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|,$$

когда линейная оболочка подмножества базисных элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ есть инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.

Доказательство.

Докажем достаточность. Пусть матрица оператора $\hat{A}$ имеет указанный в формулировке теоремы вид. Тогда образ любой линейной комбинации элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ будет принадлежать их линейной оболочке, поскольку в силу определения 09.11 каждый столбец матрицы линейного оператора составлен из компонентов образа соответствующего базисного элемента.

Иначе говоря, если $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k \in \Lambda^*$, то и

$$\begin{aligned} \hat{A}(\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k) &= \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k (\hat{A}g_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i = \\ &= \sum_{i=1}^r (\sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \lambda_k) g_i = \sum_{i=1}^r \beta_i g_i \in \Lambda^*. \end{aligned}$$

Из теоремы 08.9 следует, что Λ^* – подпространство. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть Λ^* есть инвариантное подпространство линейного оператора $\hat{A}$, являющееся линейной оболочкой подмножества базисных векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$. Тогда образ любого, в том числе и базисного, элемента, принадлежащего Λ^* , также будет принадлежать Λ^* . Это в свою очередь означает, что

$$\hat{A}g_k = \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i + \sum_{i=r+1}^n 0g_i ; \quad k = [1, r]$$

и в сочетании с определением 09.16 доказывает необходимость.

Теорема доказана.

Задача 10.1. *Показать, что всякое инвариантное подпространство невырожденного линейного оператора $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством оператора $\hat{A}^{-1}$.*

Решение. Пусть $x \in \Lambda^*$, где Λ^* – инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$, тогда по условию задачи $y = \hat{A}x \in \Lambda^*$. Если оператор $\hat{A}$ невырожденный, то для него существует обратный $\hat{A}^{-1}$ и связь элементов $x, y \in \Lambda^*$ можно записать в виде $x = \hat{A}^{-1}y$, что и означает инвариантность подпространства Λ^* относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

В приложениях важную роль играют так называемые задачи "поиска собственных векторов и собственных значений", основой которых служит понятие *одномерного инвариантного подпространства*.

Определение 10.2. *Ненулевой элемент $f \in \Lambda$ называется собственным вектором линейного преобразования $\hat{A}$, если существует число λ , такое, что $\hat{A}f = \lambda f$. Число λ называется собственным значением $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору f .*

Заметим, что, согласно данному определению, f является ненулевым элементом ядра линейного преобразования $\hat{A} - \lambda \hat{E}$, то есть

$$f \in \ker(\hat{A} - \lambda \hat{E}).$$

Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного преобразования $\hat{A}$, заданного в Λ^n , удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1; \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2; \quad \dots; \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n.$$

Если принять набор элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ за базис, то данные соотношения можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов:

$$\hat{A}g_k = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \dots + \lambda_k g_k + \dots + 0 \cdot g_n; \quad \forall k = [1, n].$$

Поскольку, согласно теореме 08.5, эти разложения *единственны*, то, исходя из определения 09.11, можно утверждать, что матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в этом базисе будет иметь *диагональный* вид:

$$\|\hat{A}\|_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

благодаря чему исследование свойств $\hat{A}$ существенно упрощается.

Задача 10.2. *Показать, что если линейное преобразование $\hat{A}$ имеет собственный вектор f с соответствующим ему собственным значением λ , то элемент f будет также являться собственным вектором линейного преобразования*

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$$

с собственным значением λ^2 .

Согласно определению 10.2 собственный вектор f должен быть *ненулевым*. Покажем, что этого можно добиться путем подбора специальных значений параметра λ .

Действительно, необходимым и достаточным условием существования *нетривиального* частного решения (то есть решения, для которого $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 > 0$) однородной системы линейных уравнений, согласно следствию 07.2, является *равенство нулю определителя ее основной матрицы*. Поэтому условие, которому должны удовлетворять искомые значения λ будет иметь вид

$$\det \|\alpha_{kj} - \lambda \delta_{kj}\| = 0 \quad (10.2)$$

или же

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение 10.3. Уравнение (10.2) называется *характеристическим уравнением*, а функция от λ , равная $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$ – *характеристическим многочленом* преобразования $\hat{A}$, действующего в Λ^n .

Теорема 10.2. **Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса в Λ^n .**

Доказательство.

Заметим, что преобразование $\hat{A} - \lambda \hat{E}$, очевидно, линейное в силу линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{E}$. Тогда, согласно следствию 09.3, определитель его матрицы не меняется при замене базиса. Поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$:

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_{g'} = \det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g.$$

Теорема доказана.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , что следует из определения определителя 06.6 и формулы (10.2).

Таким образом, мы получаем универсальный для Λ^n алгоритм вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов:

Решив характеристическое уравнение (10.2), из однородной системы уравнений (10.1) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы, найденным собственным значениям.

Примеры использования данного алгоритма в Λ^n иллюстрируют решения задач 10.3 и 10.4. В случае же линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее. Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования имеет бесконечно много собственных векторов вида $f(\tau) = \alpha e^{\lambda\tau}$ (где α – произвольная ненулевая константа) и соответствующих им собственных значений λ , удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\frac{df}{d\tau} = \lambda f.$$

Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 10.3. В комплексном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство.

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , то к нему применима *основная теорема высшей алгебры*¹¹, утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема доказана.

В случае вещественного линейного пространства теорема 10.3 неверна. Например, линейный оператор поворота в пространстве плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $\varphi \neq k\pi$ не имеет ни одного собственного вектора. Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид:

$$\det \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0,$$

то есть $\lambda = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Откуда следует, что при $\varphi \neq k\pi$ вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

Теорема 10.4. В вещественном линейном пространстве Λ^n всякое линейное преобразование имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство.

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (10.1) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, тогда, решив систему (10.1), получим соответствующий ему комплексный собственный вектор $f = u + wi$, где u и w – элементы Λ^n , представляемые вещественными n -компонентными столбцами.

¹¹ Доказывается, например, в курсе ТФКП.

Покажем теперь, что u и w линейно независимые. Допустим противное: $u = \kappa w$. Тогда из соотношения $\hat{A}f = \lambda f$ имеем, что $\hat{A}((\kappa + i)w) = \lambda(\kappa + i)w$, или $\hat{A}w = \lambda w$, откуда следует вещественность λ , что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

Подставим выражения для собственного значения и собственного вектора в их определение: $\hat{A}f = \lambda f$. Получаем

$$\hat{A}(u + wi) = (\alpha + \beta i)(u + wi),$$

или в силу линейности $\hat{A}$

$$(\hat{A}u) + (\hat{A}w)i = (\alpha u - \beta w) + (\beta u + \alpha w)i,$$

и из равенства действительных и мнимых частей находим, что

$$\begin{cases} \hat{A}u = \alpha u - \beta w, \\ \hat{A}w = \beta u + \alpha w. \end{cases}$$

Но это и означает, что $\hat{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с двумерной линейной оболочкой элементов u и w , поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi u + \eta w) &= \xi \hat{A}u + \eta \hat{A}w = \xi(\alpha u - \beta w) + \eta(\beta u + \alpha w) = \\ &= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)w. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача 10.3.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

- 1°. Рассмотрим сначала случай, когда $\hat{A}$ действует в комплексном линейном пространстве. Будем искать собственные значения по формулам (10.1) – (10.2). Воспользовавшись правилом разложения определителя по первой строке (см. теорему 01.1), получим

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= \\ &= -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 + 2(2\lambda-6+6) + 2(4-3-3\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Откуда следует, что из трех собственных значений одно $\lambda_1 = 1$ – вещественное и два $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$ – комплексно сопряженные.

- 2°. Найдем теперь собственные векторы. Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда, из системы линейных уравнений (10.1) имеем

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Преобразовав матрицу построенной системы линейных уравнений, получим компоненты собственных векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_3 из условий

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, собственный вектор f_1 , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

3°. Пусть теперь $\lambda = \lambda_2 = i$, тогда систему линейных уравнений (10.1)

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно упростить, разделив обе части первого уравнения на $1+i$.

Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить как линейно зависимое.

Наконец, заменив затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & -1+3i & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И наконец, после умножения обеих частей второго уравнения на $(-i)$ приходим к

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & 3+i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая значение свободного неизвестного $\xi_3 = 3+i$, находим второй собственный вектор:

$$f_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

- 4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = -i$, имеет вид

$$f_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

(Покажите самостоятельно, что комплексная сопряженность f_2 и f_3 не случайна, то есть если λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и собственные векторы f_2 и f_3 .)

- 5°. Если оператор $\hat{A}$ действует в вещественном линейном пространстве, то согласно теореме 10.4 $\hat{A}$ имеет собственный вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ отвечающий собственному значению } \lambda_1 = 1,$$

и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболоч-

кой элементов $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть которое будет со-

стоять из элементов вида

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \forall \mu_1, \mu_2.$$

Заметим, что при необходимости искомое инвариантное подпространство может быть задано и в виде однородной системы линейных уравнений, которая в данном примере имеет вид

$$\xi_1 - \xi_2 = 0$$

(см., например, решение задачи 09.4).

Теорема 10.5. Совокупность собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного преобразования $\hat{A}$, дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ , является инвариантным подпространством $\hat{A}$.

Доказательство.

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых, не равных нулю одновременно чисел α и β :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \\ &= \alpha \hat{A}f_1 + \beta \hat{A}f_2 = \alpha \lambda f_1 + \beta \lambda f_2 = \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2), \end{aligned}$$

что и показывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Определение 10.6. Подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным* (или просто *собственным*) *подпространством* линейного преобразования $\hat{A}$.

Теорема 10.6. **Всякое инвариантное собственное подпространство линейного преобразования $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством линейного преобразования $\hat{B}$, если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.**

Доказательство.

Пусть Λ^* – инвариантное собственное подпространство $\hat{A}$, то есть $\hat{A}f = \lambda f \quad \forall f \in \Lambda^*$. Но тогда справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$, а в силу коммутативности и линейности $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будет верно и $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f)$ при $\forall f \in \Lambda^*$.

Последнее условие означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^*$ при $\forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* – инвариантное подпространство оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Теорема 10.7. **Собственные векторы линейного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.**

Доказательство.

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой. Пусть имеются m линейно независимых собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m$ линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающих различным собственным значениям.

Покажем, что в этом случае будут линейно независимы и $m+1$ собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$, если они также отвечают различным собственным значениям.

Предположим противное: существует нетривиальная и равная нулевому элементу линейная комбинация собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$:

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = 0, \quad (10.3)$$

причем без ограничения общности можно считать, что число $\kappa_{m+1} \neq 0$.

Подействуем $\hat{A}$ на обе части равенства (10.3):

$$\begin{aligned} \hat{A}(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}) &= \\ = \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \dots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (10.3) на λ_{m+1} и вычитая почленно результат этого умножения из равенства (10.4), получим

$$\begin{aligned} \kappa_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) f_1 + \kappa_2 (\lambda_2 - \lambda_{m+1}) f_2 + \dots \\ \dots + \kappa_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) f_m = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы $f_1, f_2, \dots, f_m$ линейно независимые, то

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_m = 0.$$

Но тогда из (10.3) следует $\kappa_{m+1} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов $f_1, f_2, \dots, f_m$ следует линейная независимость элементов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$.

Теорема доказана.

Следствие 10.1. Линейное преобразование $\hat{A}$ в Λ^n может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем n собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема 10.8. Если линейное преобразование $\hat{A}$, действующее в Λ^n , имеет n различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами $\hat{A}$, в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее диагонали расположены собственные числа оператора $\hat{A}$.

Доказательство.

Следует из теоремы 10.7 и сделанного выше замечания о важности собственных векторов.

Теорема 10.9. Пусть Λ^* – инвариантное собственное подпространство линейного преобразования $\hat{A}$, отвечающее некоторому собственному значению λ_0 кратности k . Тогда имеет место соотношение

$$1 \leq \dim(\Lambda^*) \leq k.$$

Доказательство.

Выберем в Λ^n базис $\{g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_n\}$ так, чтобы его первые $m = \dim(\Lambda^*)$ элементов принадлежали Λ^* .

В силу условия кратности собственного значения

$$\hat{A}g_i = \lambda_0 g_i; i = [1, m],$$

поэтому матрица $\|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\|_g$ в этом базисе, согласно замечанию о важности собственных векторов, будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = \\ & = \left\| \begin{array}{ccccccc} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{m+1,m+1} - \lambda & \dots & \alpha_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda).$$

Поскольку множители вида $(\lambda_0 - \lambda)$ могут содержаться также и в многочлене $P_{n-m}(\lambda)$, то $m \leq k$, где k – кратность корня λ_0 характеристического многочлена $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$.

Условие $1 \leq m$ очевидно, поскольку подпространство Λ^* ненулевое (содержит собственные векторы).

Теорема доказана.

Таким образом, размерность инвариантного собственного подпространства Λ^* , отвечающего собственному значению λ_0 кратности k , может оказаться меньше k , что иллюстрирует

Задача 10.4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, в пространстве двумерных

столбцов и заданного матрицей $\left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$.

Решение. Находим собственные значения:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

то есть $\lambda_{1,2} = 1$ и кратность собственного значения $k = 2$. Найдём теперь собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x = \mu \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

Таким образом, получаем, что данный линейный оператор имеет одномерное инвариантное собственное подпространство ($m = \dim(\Lambda^*) = 1$), соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ кратности 2.

На основании теорем 10.4, 10.7 и 10.8 приходим к выводу, что базис в конечномерном вещественном линейном пространстве, образованный из собственных векторов действующего в нём линейного преобразования, может не существовать из-за *невещественности* или *кратности* его собственных значений.