

Тема 11. Билинейные функционалы и их координатное представление. Правило изменения матрицы билинейного функционала при замене базиса. Симметричные билинейные функционалы. Квадратичные функционалы. Отыскание базиса, в котором квадратичный функционал имеет канонический вид.

Билинейные функционалы

Определение 11.1. Пусть в линейном пространстве Λ каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие число $B(x, y)$ так, что

$$1) \quad B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y)$$

$$\forall x_1, x_2, y \in \Lambda; \forall \alpha, \beta,$$

$$2) \quad B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2)$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in \Lambda; \forall \alpha, \beta,$$

тогда говорят, что в Λ задан *билинейный функционал* (или *билинейная форма*).

Пример 11.1. 1°. Произведение двух линейных функционалов $F(x)$ и $G(y)$, определенных в Λ ,

$$B(x, y) = F(x)G(y)$$

есть билинейный функционал.

2°. Двойной интеграл

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \iint_{\Omega} K(\tau, \sigma) x(\tau) y(\sigma) d\sigma d\tau = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \left(\int_{\alpha}^{\beta} K(\tau, \sigma) y(\sigma) d\sigma \right) d\tau, \end{aligned}$$

где функция двух переменных $K(\tau, \sigma)$ непрерывна

на множестве $\Omega: \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \tau \leq \beta \\ \alpha \leq \sigma \leq \beta \end{array} \right\}$, есть билинейный

функционал в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

- 3°. Билинейным функционалом является скалярное произведение векторов на плоскости или в пространстве.

Билинейные функционалы в Λ^n .

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и билинейный функционал $B(x, y)$. Найдем формулу для выражения его значения через координаты аргументов.

Предположим, что в рассматриваемом базисе $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и

$y = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j$, тогда, согласно определению 11.1, справедливы равенства

венства

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i B(g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j B(g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j. \end{aligned}$$

Определение
11.2.

Числа $\beta_{ij} = B(g_i, g_j)$ называются *компонентами билинейного функционала* $B(x, y)$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, а матрица $\|B\|_g = \|\beta_{ij}\|$ – *матрицей билинейного функционала* в этом базисе.

В Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ билинейный функционал может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \xi_k \eta_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_k \beta_{ki} \eta_i = \sum_{k=1}^n \xi_k^T \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \eta_i = \\ &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| = \\ &= \|x\|_g^T B \|y\|_g, \end{aligned}$$

где столбцы $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные представления элементов x и y в данном базисе.

Матрица билинейного функционала зависит от выбора базиса. Правило изменения матрицы билинейного функционала при замене базиса дает

Теорема 11.1. Пусть $\|S\|$ – матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, тогда

$$\|B\|_{g'} = \|S\|^T \|B\|_g \|S\|.$$

Доказательство.

По определению матрицы перехода от одного базиса к другому в Λ^n (см. § 7.3) имеют место соотношения

$$g'_k = \sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, \quad k = [1, n],$$

но тогда

$$\begin{aligned}\beta'_{kl} &= B(g'_k, g'_l) = B\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, \sum_{j=1}^n \sigma_{jl} g_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} B(g_i, g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ki}^T \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sigma_{jl}\end{aligned}$$

для всех $k, l = [1, n]$.

Теорема доказана.

Следствие 11.1. $\det \|B\|_{g'} = \det \|B\|_g \det^2 \|S\|$.

Доказательство.

Следует из теоремы 11.1, а также свойств детерминанта (теоремы 06.5 и 06.8).

Отметим, что в силу невырожденности матрицы перехода знак определителя матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

Следствие 11.2. **Ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

Следует из теоремы 09.7 и невырожденности матрицы перехода $\|S\|$.

Определение 11.3. Билинейный функционал $B(x, y)$ называется *симметричным*, если для любой упорядоченной пары элементов x и y линейного пространства Λ имеет место равенство $B(x, y) = B(y, x)$.

Теорема 11.2. Для симметричности билинейного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы его матрица была симметрической.

Доказательство.

Необходимость следует из соотношений

$$\beta_{ij} = B(g_i, g_j) = B(g_j, g_i) = \beta_{ji}$$

$$\forall i, j = [1, n].$$

Докажем достаточность. Действительно, если

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \forall i, j = [1, n], \text{ то}$$

$$\begin{aligned} B(y, x) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \eta_j \xi_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \xi_i \eta_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j = B(x, y). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Квадратичные функционалы

Определение 11.4. Пусть в линейном пространстве Λ каждому элементу x поставлено в соответствие число

$$\Phi(x) = B(x, x),$$

где $B(x, y)$ – некоторый билинейный функционал в Λ , тогда говорят, что в Λ задан *квадратичный функционал* (или *квадратичная форма*).

В общем случае в вещественном линейном пространстве по заданному квадратичному функционалу нельзя восстановить порождающий его билинейный функционал, однако это можно сделать в случае *симметричного* билинейного функционала.

Действительно, пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ порожден симметричным билинейным функционалом $B(x, y)$, тогда для любых x и y имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= B(x+y, x+y) = \\ &= B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = \\ &= \Phi(x) + 2B(x, y) + \Phi(y),\end{aligned}$$

$$\text{откуда } B(x, y) = \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}.$$

Определение 11.5. В Λ^n симметрическая матрица билинейного функционала

$$\frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y))$$

называется

матрицей квадратичного функционала $\Phi(x)$.

Если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то квадратичный функционал может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \\ &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \\ &= \|x\|_g^T \Phi \|x\|_g,\end{aligned}$$

где $\|x\|_g$ – координатный столбец элемента $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ в данном базисе. Замена базиса, в свою очередь, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле $\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g S$, определяемой теоремой 11.1.

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичный функционал $\Phi(x)$ по порождающему билинейному функционалу, просимметрировав предварительно последний. Действительно, для любого $B(x, y)$ можно указать симметричный билинейный функционал вида $\frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$, который будет порождать *тот же самый* квадратичный функционал $\Phi(x)$, что и $B(x, y)$. В этом случае очевидно, что

$$\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2} = \frac{\beta_{ji} + \beta_{ij}}{2} = \varphi_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$

– элементы симметрической матрицы.

Пример 11.2. Пусть в Λ^3 задан билинейный функционал

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= \xi_1 \eta_1 + 3\xi_2 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 - \\ &\quad - 3\xi_1 \eta_2 + 2\xi_3 \eta_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \\ &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\|, \end{aligned}$$

имеющий матрицу $\left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$ и в силу теоремы

11.2 не являющийся симметрическим. Порождаемый им в Λ^3 квадратичный функционал будет иметь вид

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3.$$

В то же время симметричный билинейный функционал

$$\begin{aligned}
 B_2(x, y) &= \xi_1 \eta_1 + 3\xi_2 \eta_2 - 2\xi_1 \eta_2 - 2\xi_2 \eta_1 + \\
 &\quad + \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \\
 &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\|,
 \end{aligned}$$

имеющий матрицу $\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$, будет порождать

в Λ^3 квадратичный функционал вида

$$\Phi_2(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3,$$

который совпадает с $\Phi_1(x)$ и имеет матрицу

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

В ряде важных прикладных задач оказывается необходимым отыскание базисов, в которых квадратичный функционал имеет наиболее простой и удобный для исследования вид.

Определение 11.6. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет *диагональный вид* в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \Lambda^n$, если он в этом базисе представим как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2,$$

где $\lambda_i \forall i = [1, n]$ – некоторые числа.

Если, кроме того, числа $\lambda_i, i = [1, n]$ принимают лишь значения 0 или ± 1 , то говорят, что квадратичный функционал в данном базисе имеет *канонический вид*.

Теорема
11.3
(Метод
Лагранжа).

Для каждого квадратичного функционала в Λ^n существует базис, в котором функционал имеет канонический вид.

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

1°. При $n = 1$ в любом базисе $\Phi(x) = \varphi_{11} \xi_1^2$. Если $\varphi_{11} = 0$, то мы уже имеем канонический вид, если же $\varphi_{11} \neq 0$, то, выполняя невырожденную замену переменных $\xi'_1 = \sqrt{|\varphi_{11}|} \xi_1$, приходим к каноническому виду.

2°. Предположим, что утверждение теоремы верно для квадратичных функционалов, зависящих от $n - 1$ переменных, и рассмотрим случай n переменных.

Будем считать, что $\varphi_{11} \neq 0$. Этого можно добиться изменением нумерации переменных в случае, когда хотя бы одно из чисел $\varphi_{ii}, i = [2, n]$ не равно нулю. Если же все $\varphi_{ii}, i = [1, n]$ равны нулю одновременно, то без ограничения общности можно считать, что $\varphi_{12} \neq 0$. Тогда, выполняя невырожденную замену переменных

$$\xi_1 = \xi'_1 + \xi'_2, \xi_2 = \xi'_1 - \xi'_2, \xi_3 = \xi'_3, \dots, \xi_n = \xi'_n,$$

получаем запись квадратичного функционала с ненулевым диагональным элементом

$$\Phi(x) = 2\varphi_{12}\xi_1'^2 - 2\varphi_{21}\xi_2'^2 + F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n'),$$

где $F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n')$ не содержит квадратов от ξ_1' и ξ_2' .

3°. В записи квадратичного функционала сгруппируем слагаемые, содержащие переменную ξ_1 :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k = \\ &= \varphi_{11}(\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k,\end{aligned}$$

и выделим полный квадрат, воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_k \alpha_i &= (\sum_{k=1}^n \alpha_k)(\sum_{i=1}^n \alpha_i) = (\sum_{k=1}^n \alpha_k)^2 = \\ &= (\alpha_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k)^2 = \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + (\sum_{k=2}^n \alpha_k)^2 = \\ &= \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^n \alpha_k \alpha_i.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \varphi_{11}(\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}^2} \xi_i \xi_k) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k\end{aligned}$$

и окончательно

$$\Phi(x) = \varphi_{11}(\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_i)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k.$$

В последней формуле первое слагаемое есть полный квадрат, а второе – квадратичный функционал, не зависящий от ξ_1 и приводящийся, согласно предположению индукции, к каноническому виду некоторой невырожденной заменой переменных

$$\xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i, \quad k = [2, n].$$

4°. Выполним замену переменных квадратичного функционала $\Phi(x)$ по формулам

$$\begin{cases} \xi'_1 = \sqrt{|\varphi_{11}|} \left(\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_i \right), \\ \xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i; \quad k = [2, n], \end{cases} \quad (11.1)$$

которая приведет к представлению его в каноническом виде. Поскольку в силу $\varphi_{11} \neq 0$ матрица выполненной замены переменных

$$\|T\| = \begin{vmatrix} \sqrt{|\varphi_{11}|} & \sqrt{|\varphi_{11}|} \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}} & \dots & \sqrt{|\varphi_{11}|} \frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{11}} \\ 0 & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{vmatrix}$$

имеет определитель, не равный нулю, то замена (11.1) – невырожденная. Но тогда матрица $\|T\|$ имеет обратную:

$\|S\| = \|T\|^{-1}$, которая в свою очередь является матрицей перехода к искомому базису.

Теорема доказана.

Замечание: базис, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический или диагональный вид квадратичного функционала в Λ^n .

Метод Лагранжа не всегда оказывается наиболее простой (с точки зрения затрат вычислительных усилий) процедурой. Иногда приведение матрицы квадратичного функционала к диагональному (или каноническому) виду можно выполнить более эффективно путем использования некоторого набора элементарных преобразований.

Действительно, при переходе от исходного базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к новому $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ с матрицей перехода $\|S\|$ матрица квадратичного функционала меняется по правилу

$$\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g S.$$

Будем теперь рассматривать матрицу $\|S\|$ как матрицу некоторого элементарного преобразования матрицы $\|\Phi\|_g$ (см. тему 07: элементарные преобразования).

Пусть матрица $\|S\|$ такова, что умножение на нее справа $\|\Phi\|_g$ приводит последнюю к нижнему треугольному виду, тогда в силу теоремы 09.9 матрица $\|\Phi\|_{g'}$ оказывается диагональной. С другой стороны, матрица $\|S\|$ представима как произведение матриц элементарных преобразований, последовательно примененных к столбцам единичной матрицы.

Поэтому, выполнив диагонализацию $\|\Phi\|_g$ некоторым набором элементарных преобразований (выполняемых на каждом шаге процедуры как с ее строками, так и с ее столбцами) и применив тот же самый набор элементарных преобразований к столбцам единичной матрицы, мы получим одновременно как диагональный вид матрицы

квадратичного функционала $\|\Phi\|_{g'}$, так и $\|x\|_g = \|S\| \|x\|_{g'}$ – формулы перехода от исходного базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, в котором матрица квадратичного функционала оказывается диагональной. Применение данного алгоритм иллюстрирует следующий пример.

Задача 11.1. *Привести в Λ^3 к диагональному виду квадратичный функционал*

$$\Phi(x) = -2\xi_1^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 8\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3.$$

Решение. В исходном базисе функционал $\Phi(x)$ имеет матрицу

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{vmatrix}.$$

1°. На первом шаге процедуры выполним следующие элементарные операции:

- заменим вторую строку исходной матрицы разностью второй и третьей ее строк;
- в полученной матрице заменим второй столбец разностью второго и третьего столбца,

в результате чего получаем матрицу вида

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, заменив в единичной матрице

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{второй столбец разностью второго и}$$

третьего, получим $\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right\|.$

- 2°. На втором шаге заменяем вначале первую строку утроенной первой, сложенную со второй, взятой с коэффициентом 5. Соответственно такое же преобразование выполняется со столбцами. Получаем следующие две матрицы:

$$\left\| \begin{array}{ccc} -93 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{array} \right\|.$$

- 3°. На третьем шаге заменяем третью строку первой, сложенную с третьей, взятой с коэффициентом 31. Выполнив такие же преобразования со столбцами, соответственно получаем матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} -93 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3751 \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & 26 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, перейдя к базису

$$\left\| \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ -5 \end{array} \right\| ; \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| ; \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 26 \end{array} \right\|$$

и выполнив замену координат по формулам перехода

$$\begin{cases} \xi_1 = 3\xi'_1 + 3\xi'_3, \\ \xi_2 = 5\xi'_1 + \xi'_2 + 5\xi'_3, \\ \xi_3 = -5\xi'_1 - \xi'_2 + 26\xi'_3, \end{cases}$$

мы получим следующий диагональный вид исходного квадратичного функционала:

$$\Phi(x) = -93\xi_1'^2 + 3\xi_2'^2 - 3751\xi_3'^2.$$