Тема 12. Теорема инерции для квадратичного функционала. Знаковая определенность квадратичного функционала. Критерий Сильвестра. Экстремальные свойства квадратичных функционалов

Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность диагонального или канонического представления, квадратичные функционалы обладают рядом важных свойств, *инвариантных* относительно (то есть не зависящих от) выбора базиса в Λ^n. Одной из таких характеристик является *ранг квадратичного функционала*.

Определение 12.1. Максимальное число не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ называется его *рангом* и обозначается $\operatorname{rg}\Phi$.

Теорема 12.1. **Ранг квадратичного функционала в Λ^n не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

По следствию 11.2 ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса. Поэтому не будет зависеть от выбора базиса и ранг матрицы порождаемого им квадратичного функционала.
С другой стороны, в силу теорем 09.9 и 11.1 ранг матрицы квадратичного функционала равен числу ненулевых коэффициентов в его каноническом виде.

Теорема доказана.

При исследовании знака значений квадратичного функционала оказывается полезным использование следующих его характеристик.

Определение 12.2.

1°. Максимальное число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *положительным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_+ \Phi$.

2°. Максимальное число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n называется его *отрицательным индексом инерции* и обозначается $\mathrm{rg}_- \Phi$.

3°. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n и обозначается

$$\mathrm{sgn}\Phi = \mathrm{rg}_+ \Phi - \mathrm{rg}_- \Phi.$$

Теорема 12.2 (инерции квадратичных функционалов).

Значения положительного и отрицательного индексов инерции, а также сигнатуры квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n не зависят от выбора базиса, в котором этот функционал имеет диагональный (канонический) вид.

Доказательство.

1°. Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет в некотором базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ представление

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij} \xi_i \xi_j$$

и пусть существуют два различных базиса $\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$ и $\{g_1'', g_2'', \ldots, g_n''\}$, в которых $\Phi(x)$ имеет следующий вид:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \eta_i^2 \; ; \; m \le n \, , \; \lambda_i > 0 \quad \forall i = [1, m]$$

и соответственно

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^{q} \mu_i \kappa_i^2 \; ; \; q \le n \, , \; \mu_i > 0 \quad \forall i = [1, q] \, .$$

В силу сделанных предположений должны существовать невырожденные матрицы замены переменных $\| \omega_{ij} \|$ и $\| \theta_{ij} \|$ при переходах от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базисам

$$\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\} \text{ и } \{g_1'', g_2'', \ldots, g_n''\}$$

такие, что

$$\eta_s = \sum_{j=1}^{n} \omega_{sj} \xi_j \; ; \; s = [1, n] \quad \text{и} \quad \kappa_s = \sum_{j=1}^{n} \theta_{sj} \xi_j \; ; \; s = [1, n] \, . \quad (12.1)$$

2°. Приравняем значения функционала $\Phi(x)$ в базисах

$$\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\} \text{ и } \{g_1'', g_2'', \ldots, g_n''\}$$

для некоторого элемента

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k = \sum_{i=1}^{n} \eta_i g_i' = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j g_j'' ,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \eta_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^{q} \mu_i \kappa_i^2$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \eta_i^2 + \sum_{i=p+1}^{q} \mu_i \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \kappa_i^2 + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \eta_i^2 . \quad (12.2)$$

3°. Исследуем полученное соотношение. Допустим, что $k < p$ и предположим, что элемент x имеет в рассматриваемых базисах компоненты

$$\eta_i = 0 \quad \forall i = [1, k] \, ; \qquad \kappa_i = 0 \quad \forall i = [p+1, n] .$$

Этих условий меньше, чем n, поскольку $k < p$. Если их подставить в равенства (12.1), то мы получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных

$$\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} .$$

Поскольку число таких уравнений меньше числа неизвестных, то можно утверждать, что она в силу теоремы 07.5 имеет нетривиальные решения, и, следовательно, элемент x может быть ненулевым.

С другой стороны, из равенства (12.2), положительности чисел $\lambda_i ; \ i = [1, m]$ и $\mu_i ; \ i = [1, q]$, а также условий

$$\eta_i = 0 \quad \forall i = [1, k] \, ; \ \kappa_i = 0 \quad \forall i = [p+1, n]$$

следует, что и все $\kappa_i = 0 ; \ i = [1, p]$.

Тогда в силу (12.1) мы получаем однородную систему n линейных уравнений $\kappa_s = \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{sj} \xi_j \ ; \ s = [1, n]$ с n неизвестными и невырожденной основной матрицей, имеющую только тривиальное решение, то есть элемент x обязан быть нулевым. Полученное противоречие показывает ошибочность предположения о том, что $k < p$.

4°. Аналогичными рассуждениями показываем, что невозможно и соотношение $k > p$. Поэтому приходим к заключению, что $k = p$.

5°. По теореме 12.1 $m = q$, и потому $k - m = p - q$.

Теорема доказана.

При исследовании знака значений квадратичного функционала будем использовать понятие *знаковой определенности*.

Определение 12.3.

1°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *положительно определенным на подпространстве* $\Omega^{+} \subset \Lambda$, если $\Phi(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega^{+}$.

2°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *отрицательно определенным на подпространстве* $\Omega^{-} \subset \Lambda$, если $\Phi(x) < 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega^{-}$.

3°. Если же Ω^{+} (или Ω^{-}) совпадает с Λ, то говорят, что квадратичный функционал $\Phi(x)$ является *положительно* (*отрицательно*) *определенным*.

4°. Если же $\Phi(x) \geq 0$ ($\Phi(x) \leq 0$) для всех $x \in \Lambda$, то говорят, что квадратичный функционал является *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенным*.

Теорема 12.3.

Максимальная размерность подпространства в Λ^{n}, на котором квадратичный функционал положительно (отрицательно) определен, равняется положительному (отрицательному) индексу инерции этого функционала.

Доказательство.

Следует из теоремы 12.2 и очевидного равенства числа положительных (отрицательных) элементов матрицы квадратичного функционала в диагональном представлении размерности подпространства Ω^{+} (Ω^{-}).

В ряде прикладных задач оказывается необходимым проведение исследования знаковой определенности квадратичного функционала без приведения его к диагональному виду. Удобное необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичного функционала дает

Теорема 12.4 (Критерий Сильвестра). **Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид**

$$\det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} \; ; \quad k=[1,n],$$

были положительными.

Доказательство достаточности.

1°. Воспользуемся методом математической индукции.

Для $k=1$ достаточность очевидна. Допустим, что из положительности главных миноров матрицы квадратичного функционала порядка до $k=n-1$ включительно следует возможность приведения квадратичного функционала от $n-1$ переменных к виду

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 .$$

2°. Покажем, что в этом случае достаточность будет иметь место и для квадратичных функционалов, зависящих от n переменных. В выражении для квадратичного функционала, зависящего от n переменных, выделим слагаемые, содержащие ξ_n :

$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{ki}\xi_k\xi_i+2\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{kn}\xi_k\xi_n+\varphi_{nn}\xi_n^2.$$

Двойная сумма в правой части этого равенства есть квадратичный функционал $\Phi^*(x)$, зависящий от $n-1$ переменной, причем его главные миноры совпадают с главными минорами $\Phi(x)$ до порядка $n-1$ включительно, которые, по предположению индукции, положительны. Отсюда следует, что квадратичный функционал $\Phi^*(x)$ положительно определенный, и для него существует невырожденная замена переменных

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{ki}\eta_i\ ;\quad k=[1,n-1],$$

приводящая его к каноническому виду $\Phi^*(x)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\eta_i^2$.

Выпишем представление квадратичного функционала $\Phi(x)$ в новых переменных:

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\varphi'_{in}\eta_i\xi_n+\varphi_{nn}\xi_n^2$$

и выделим в нем полные квадраты:

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(\eta_i^2+2\varphi'_{in}\eta_i\xi_n+\varphi'^2_{in}\xi_n^2)+$$

$$+(\varphi_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}\varphi'^2_{in})\xi_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}\zeta_i^2+\varphi''_{nn}\xi_n^2,$$

где

$$\varphi''_{nn}=\varphi_{nn}-\sum_{i=1}^{n-1}\varphi'^2_{in}\ ;\quad \zeta_i=\eta_i+\varphi'_{in}\xi_n\ ;\ i=[1,n-1].$$

В матричном виде эту замену переменных можно записать как

$$\left\|\begin{array}{c}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \cdots\\ \zeta_{n-1}\\ \xi_n\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{ccccc}1 & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_{1,n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \varphi_{2,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varphi'_{n-1,n}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c}\eta_1\\ \eta_2\\ \cdots\\ \eta_{n-1}\\ \xi_n\end{array}\right\|,$$

и поскольку определитель ее матрицы отличен от нуля, то эта замена невырожденная.

3°. Наконец, в силу следствия 11.1 определитель матрицы квадратичного функционала сохраняет знак при замене базиса. Знак определителя матрицы квадратичного функционала в исходном базисе положительный, поскольку этот определитель имеет вид

$$\det\left\|\begin{array}{cccc}\varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn}\end{array}\right\|$$

и является главным минором порядка n. Но тогда из выражения для $\Phi(x)$ в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичного функционала $\Phi(x)$ равен φ''_{nn}. Поэтому $\varphi''_{nn} > 0$ и можно сделать замену переменных $\zeta_n = \xi_n\sqrt{\varphi''_{nn}}$, приводящую к каноническому виду функционал $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i^2$.

Следовательно, квадратичный функционал $\Phi(x)$ положительно определен для числа переменных n, а значит, в силу математической индукции, для любого числа переменных.

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости критерия Сильвестра положительной определенности квадратичного функционала приводится в разделе “Евклидово пространство” (Тема 13).

Исходя из критерия Сильвестра для положительной определенности квадратичного функционала, можно получить аналогичный критерий отрицательной определенности квадратичного функционала.

Следствие 12.1. **Для отрицательной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка матрицы функционала были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.**

Доказательство.

Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ *отрицательно* определенный, тогда функционал $-\Phi(x)$ будет, очевидно, *положительно* определенным. Применяя к нему критерий Сильвестра положительной определенности, получим для главного минора k-го порядка, использовав линейное свойство определителя, условие

$$\det\begin{Vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \dots & -\varphi_{1k} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \dots & -\varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_{k1} & -\varphi_{k2} & \dots & -\varphi_{kk} \end{Vmatrix} =$$

$$= (-1)^k \det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \dots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} > 0 \quad \forall k = [1, n] .$$

Откуда и следует доказываемое утверждение.

Следствие доказано.

Инварианты линий второго порядка на плоскости

Независимость значений ранга и сигнатуры квадратичного функционала от выбора базиса позволяет особым образом выполнить классификацию линий второго порядка на плоскости.

Рассмотрим линию второго порядка на плоскости Oxy в базисе $\{g_1, g_2\}$ и с началом координат в точке O. Эта линия в общем случае задается уравнением вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где числа A, B, C, D, F и E произвольны, с одним лишь ограничением, что A, B и C не равны нулю одновременно ($|A| + |B| + |C| > 0$).

Нетрудно проверить, что при замене начала координат коэффициенты A, B и C не меняются, а при смене базиса преобразуются как коэффициенты квадратичного функционала (см. теорему 11.1). Поэтому можно считать, что многочлен $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ задает квадратичный функционал

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

с матрицей $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$ в исходном базисе $\{g_1, g_2\}$.

На основании следствия 11.2 и теоремы 12.1 заключаем, что $\operatorname{rg}\Phi$ – ранг и $\operatorname{sgn}\Phi$ – сигнатура квадратичного функционала $\Phi(x, y)$ не зависят от выбора системы координат и, следовательно, $\operatorname{rg}\Phi$ и $|\operatorname{sgn}\Phi|$ являются инвариантами линии второго порядка на плоскости. Использование модуля сигнатуры необходимо, поскольку одновременное изменение знаков всех коэффициентов уравнения линии второго порядка изменит, естественно, само уравнение, хотя линия при этом останется той же.

Поскольку в запись уравнения линии второго порядка на плоскости входят также и коэффициенты *D*, *F* и *E*, то следует выяснить, не существуют ли дополнительные инварианты, образованные из всей совокупности коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *F* и *E*. Для этого рассмотрим вспомогательный квадратичный функционал в Λ^3 вида

$$\Psi(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

с матрицей $\begin{Vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{Vmatrix}$ в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$.

Заметим, что совокупность всех точек в Λ^3, для которых $\Psi(x,y,1)=0$, есть рассматриваемая нами линия второго порядка, расположенная в пространстве на плоскости $z=1$. Пусть в Λ^3 выполняется замена базиса, при которой плоскость $z=1$ переходит сама в себя. Найдем для этой замены базиса правило изменения коэффициентов квадратичного функционала $\Psi(x,y,z)$.

Лемма 12.1. **Матрица $\|S\|$ перехода от базиса $\{g_1, g_2, g_3\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$, для которой плоскость $z=1$ переходит сама в себя, имеет вид**

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Доказательство.

Замена координат в плоскости Oxy выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \sigma_{13}, \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \sigma_{23}, \end{cases}$$

но поскольку при этом $z = 1$ и $z' = 1$, то

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Невырожденность матрицы $\| S \|$ следует из очевидного условия $\det \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{Vmatrix} \neq 0$.

Лемма доказана.

Поскольку ранг и сигнатура квадратичного функционала не меняются при любых заменах базиса, то это будет верным и для замен, переводящих плоскость $z = 1$ саму в себя. Поэтому $\operatorname{rg}\Psi$ и $\operatorname{sgn}\Psi$ сохраняются при таких заменах, а числа $\operatorname{rg}\Psi$ и $|\operatorname{sgn}\Psi|$ являются инвариантами уравнения линии второго порядка. Таким образом, доказана

Теорема 12.5. **При любых заменах декартовой системы координат на плоскости Oxy числа $\operatorname{rg}\Phi$, $\operatorname{rg}\Psi$, $|\operatorname{sgn}\Phi|$ и $|\operatorname{sgn}\Psi|$ являются инвариантами линии второго порядка.**

Подсчитаем значения чисел $\operatorname{rg}\Phi$, $\operatorname{rg}\Psi$, $|\operatorname{sgn}\Phi|$ и $|\operatorname{sgn}\Psi|$ для девяти канонических видов линий второго порядка на плоскости. Результаты поместим в таблицу 12.1 из которой следует, что каждый вид линии второго порядка на плоскости имеет свой, уникальный набор значений инвариантов, который может быть принят за признак принадлежности некоторой линии второго порядка к конкретному виду.

Таблица 12.1

	Вид линии	**Каноническое уравнение**	$\operatorname{rg}\Psi$	$\lvert\operatorname{sgn}\Psi\rvert$	$\operatorname{rg}\Phi$	$\lvert\operatorname{sgn}\Phi\rvert$
1	Эллипс	$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$	3	1	2	2
2	Мнимый эллипс	$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=-1$	3	3	2	2
3	Точка	$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=0$	2	2	2	2
4	Гипербола	$\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=1$	3	1	2	0
5	Пересек. прямые	$\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=0$	2	0	2	0
6	Парабола	$y'^2=2px'$	3	1	1	1
7	Парал-лельные прямые	$y'^2=a^2$	2	0	1	1
8	Пара мни-мых пря-мых	$y'^2=-a^2$	2	2	1	1
9	Совпа-дающие прямые	$y'^2=0$	1	1	1	1

В заключение отметим, что

1°. Подсчет значений рангов и модулей сигнатур выполняется путем приведения квадратичного функционала к диагональному виду. Однако для параболы приведение функционала $\Psi(x,y,z)$ к диагональному виду матрицей перехода, переводящей плоскость $z=1$ саму в себя, вообще говоря, невозможно, поскольку его матрица имеет вид $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

В этом случае для подсчета ранга и сигнатуры можно использовать матрицу перехода $\| S \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, которая, хотя и не обеспечивает выполнение условия перехода плоскости $z=1$ самой в себя, но, как всякая линейная замена координат, сохраняет ранг и сигнатуру. Действительно,

$$\| \Psi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Psi \|_{g} \| S \| =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa \end{Vmatrix}.$$

2°. Для линий второго порядка на плоскости существуют и другие ортогональные инварианты, например, инвариантами являются числа $I_1 = A + C$ и $I_2 = \det \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$. Справедливость этого утверждения покажите самостоятельно.

3°. Схема классификации, аналогичная рассмотренной, может быть построена и для поверхностей второго порядка в пространстве.

Экстремальные свойства квадратичных функционалов

Из теоремы 11.3 следует существование в Λ^n базиса, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид. Допустим, что этот базис $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ построен так, что

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{n-1} \le \lambda_n .$$

Тогда справедлива

Теорема 12.6. **Для квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n справедливы соотношения $\lambda_1 = \min\limits_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$ и $\lambda_n = \max\limits_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$ при условии, что компоненты x удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i'^2 = 1$.**

Доказательство.

Если в рассматриваемом базисе $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$, то в силу соотношений $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{n-1} \le \lambda_n$ будут иметь место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \le \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 .$$

Но поскольку $\sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2 = 1$, то будут также справедливы и оценки

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 \le \lambda_n \text{ и } \lambda_1 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2 .$$

То есть при $x = \| \, 0, 0, \ldots, 1 \, \|^{\mathrm{T}}$ достигается максимум, а при $x = \| \, 1, 0, \ldots, 0 \, \|^{\mathrm{T}}$ – минимум значений функционала.

Теорема доказана.