Московский физико-технический институт

Всё об $R - L - C$ контуре.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

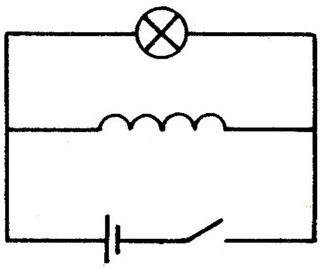
Москва 2014

Оглавление.

Замечание: Задачи на темы токи становления и параметрические колебания являются задачами повышенной сложности и отмечены звёздочкой *

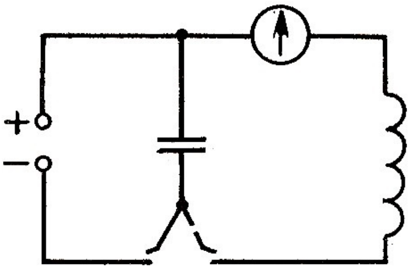
Колебательный контур.

Известно, что одним из свойств электрического поля является то, что оно обладает энергией и эта энергия может превращаться в другие виды. Энергия электрического поля заряженного конденсатора при подключении его к лампе накаливания превращается во внутреннюю энергию проводника и, в конечном счете, в энергию теплового и светового излучения.



Если электрическую лампу подключить параллельно катушке индуктивности, то при размыкании рубильника лампа ярко вспыхивает, это говорит о том, что магнитное поле также обладает энергией и эта энергия может превращаться в другие виды.

Превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно происходят при свободных механических колебаниях. Могут ли свободные колебания происходить в электрических цепях?



Ответ на этот вопрос дает следующий опыт. Зарядив конденсатор, отключим его обкладки от источника постоянного тока и подключим их через гальванометр к выводам катушки с большой индуктивностью. При этом стрелка гальванометра сначала отклоняется в одну сторону, затем возвращается к нулевому делению шкалы, проходит его и отклоняется в противоположную сторону и т. д., т. е. совершает несколько колебаний. Колебания стрелки гальванометра показывают, что в данной электрической цепи происходят свободные колебания силы тока в катушке, а значит, заряда и напряжения на обкладках конденсатора.

Рассмотрим механизм возникновения них колебаний. При подключении обкладок заряженного конденсатора к концам катушки в ней возникает электрический ток. Если индуктивность катушки велика, а электрическое сопротивление ее проводов мало, то и потери энергии на нагревание провода малы; в основном энергия электрического поля заряженного конденсатора превращается в энергию магнитного поля. Мгновенной разрядке конденсатора препятствует ЭДС самоиндукции, сдерживающая процесс возрастания силы тока в катушке. С течением времени конденсатор постепенно разряжается, напряжение на его обкладках уменьшается, уменьшается и энергия электрического поля между обкладками. Одновременно возрастает сила тока в катушке и увеличивается энергия ее магнитного поля. В тот момент, когда конденсатор полностью разрядится и энергия электрического поля станет равной нулю, сила тока в катушке и энергия магнитного поля достигнут максимальных значений.

После разрядки конденсатора и исчезновения внешнего электрического поля сила тока в катушке, казалось бы, должна стать со временем равной нулю. Но убывание силы тока в катушке приводит к уменьшению магнитного потока, что вызывает появление в катушке ЭДС самоиндукции и индукционного тока. Направление индукционного тока таково, что он препятствует уменьшению магнитного потока. Следовательно, индукционный ток имеет такое же направление, какое ток имел при разрядке конденсатора. Поэтому конденсатор заряжается индукционным током катушки.

Рассмотрим превращения энергии в колебательном контуре. Из закона сохранения энергии следует, что при отсутствии сопротивления максимальное значение энергии электрического поля заряженного конденсатора равно максимальному значению энергии магнитного поля катушки:

$$W_э = W_м, \text{ или } \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$$

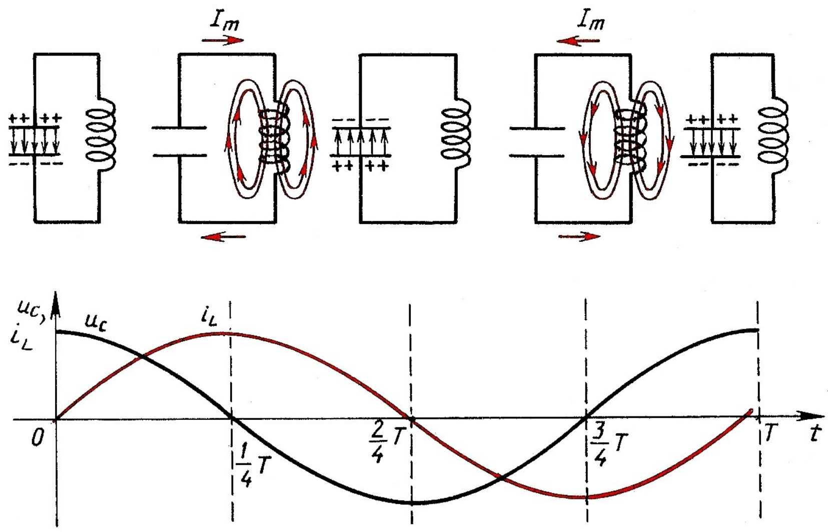
В произвольный же момент времени сумма энергий электрического и магнитного полей является величиной постоянной:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \text{const} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$$

Эту же зависимость можно записать и так:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \text{const}$$

Если бы вся энергия электрического поля при разрядке конденсатора превратилась в энергию магнитного поля катушки, а энергия магнитного поля катушки затем полностью превратилась в энергию электрического поля конденсатора, то обкладки конденсатора зарядились бы до первоначального напряжения между ними, только знаки зарядов на обкладках оказались бы противоположными первоначальным.



Конденсатор стал бы разряжаться через катушку и т. д. Процесс этот повторялся бы периодически.

Периодически повторяющиеся изменения силы тока в электрической цепи, сопровождающиеся периодическими превращениями энергии электрического поля в энергию магнитного поля (и наоборот), происходящие без потребления энергии от внешних источников, называются свободными электромагнитными колебаниями. Электрическая цепь из конденсатора и катушки, в которой происходят электромагнитные колебания, называется электрическим колебательным контуром.

В реальном электрическом контуре из-за потерь энергии на нагревание проводников и диэлектриков энергия магнитного и электрического полей постепенно превращается во внутреннюю энергию.

Изменения силы тока в катушке и напряжения на конденсаторе со временем уменьшаются и через некоторое время прекращаются. Таким образом, свободные электромагнитные колебания в контуре оказываются затухающими.

Найдем зависимость от времени силы тока в катушке и напряжения на конденсаторе идеального электрического колебательного контура при возникновении свободных электромагнитных колебаний.

Запишем закон Ома для неоднородного участка цепи:

$\mathcal{E} = \triangle\varphi + iR$, где $\mathcal{E}$ — электродвижущая сила, $\triangle\varphi$ — разность потенциалов на участке цепи и R — его активное сопротивление.

В колебательном контуре $\mathcal{E} = -Li'$ — ЭДС самоиндукции, $\triangle\varphi = q/C$ — разность потенциалов на пластинах конденсатора (здесь $i' = \dfrac{di}{dt}$). Подставив в закон Ома эти выражения ЭДС и разности потенциалов, получим:

$$-Li' = q/C + iR$$

Учитывая, что сила тока есть производная от электрического заряда по времени: $i = q'$, а $i' = q''$, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$Lq'' + Rq' + q/C = 0$$

Полагая, что у идеального колебательного контура можно активным сопротивлением пренебречь (т. е. $R \approx 0$), получим окончательно:

$$Lq'' + q/C = 0, \text{ или } q'' + \tfrac{1}{CL}q = 0$$

Это же уравнение можно получить проще, продифференцировав выражение и учтя, что $i = q'$ и $i' = q''$. Имеем: $\dfrac{qq'}{C} + Lii' = 0$, или $\dfrac{q}{C} + Lq'' = 0$.

Как легко проверить подстановкой, решением уравнения является функция:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Величина ω_0 называется собственной круговой (или циклической) частотой колебаний в контуре, а выражение $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — периодом свободных или собственных колебаний (это выражение также носит название формулы Томсона).

Рассмотрим теперь такое понятие как добротность контура. Нам известно, что в реальном колебательном контуре свободные колебания затухают. Возникает вопрос: в каких случаях можно пренебречь затуханием колебаний и воспользоваться выведенными выше соотношениями, в частности формулой Томсона?

Очевидно, что мы не сделаем большой ошибки в случае, когда можно пренебречь количеством теплоты, выделяющимся в контуре в течение четверти периода (за это время происходит процесс превращения энергии заряженного конденсатора в энергию магнитного поля катушки или наоборот). Итак, контур можно считать почти идеальным, если $Q_{тепл} \ll W_м$, или $Q_{тепл} \ll LI_m^2/2$.

Можно показать, что при синусоидальном токе количество теплоты, выделяемое на резисторе за четверть периода, равно $Q_{тепл} = I_m^2 RT/8$, действительно, в выражении для формулы Джоуля стоит квадрат тока, а так как нас интересует его среднее значение за период, то $I^2 = I_m^2/2$ в силу того, что среднее значение $\sin(\omega t + \varphi)^2$ равно $1/2$. Тогда искомое условие примет вид:

$$I_m^2 RT/8 \ll L I_m^2/2, \text{ или } R \ll 4L/T$$

С учетом выражения для периода получим:

$$(1) \quad R \ll \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Итак, если сопротивление контура удовлетворяет этому условию, то контур в течение небольшого числа колебаний можно считать идеальным и пренебречь затуханием.

Введем величину $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, называемую добротностью контура. Тогда условие (1) перепишется так:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1$$

Итак, если добротность контура много больше единицы, то период и частоту можно вычислять, использовав формулу Томсона в случае идеального контура.

Примеры.

Задача №1 (Электромеханическая аналогия) Если сила есть функция координаты, то с математической точки зрения второй закон механики Ньютона устанавливает связь между ускорением (второй производной координаты по времени), действующей силой и массой. Аналогичные уравнения могут возникать и в задачах немеханического типа.

Рассмотрим контур, состоящий из конденсатора емкостью C (в начальный момент его заряд равен q) и катушки с индуктивностью L. Мгновенное значение тока можно определить по скорости изменения заряда Q на обкладке конденсатора. В свою очередь э. д. с. самоиндукции простым образом выражается через скорость изменения тока. Если выразить напряжение конденсаторе через заряд Q и воспользоваться соответствующим законом Кирхгофа для контура, не имеющего активного сопротивления, то можно получить связь между «ускорением» заряда и самим «зарядом». Пользуясь теперь механическими аналогами, ответьте на следующие вопросы:

а) По какому закону сила тока зависит от времени ?

б) Чему равен период колебания контура?

в) Какова максимальная величина силы тока?

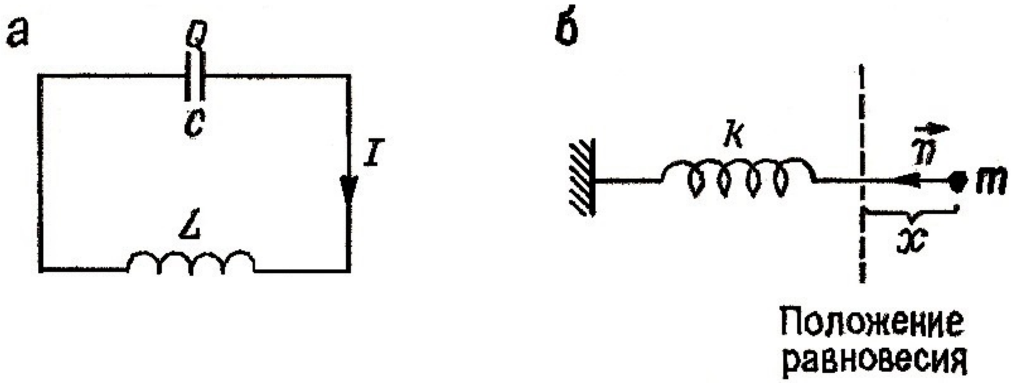
г) Можно ли провести аналогию между резистором: R (включенным в контур последовательно с индуктивностью L) и некой дополнительной силой (какой?) в соответствующей задаче механики?

д) Можно ли этим же методом определить зависимость силы тока от времени в контуре, состоящем из источника тока с постоянной э. д. с. и ничтожно малым внутренним сопротивлением, подключенного к катушке с индуктивностью L?

Решение $\mapsto$ Рассмотрим электрический контур, показанный на рис. а). Пусть q и i означают соответственно заряд на конденсаторе и силу тока в момент $t = 0$, а Qи I — заряд и ток в момент t. В системе нет внешнего источника тока. Как следует из второго закона Кирхгофа, сумма напряжений на конденсаторе и катушке должна равняться нулю:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0, \text{ но } I = \frac{dQ}{dt}$$

Значит, (1) $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} = -\dfrac{1}{C}Q.$



Мы получили дифференциальное уравнение, которое при известных L и C можно решить и получить зависимость $Q(t)$, то есть определить, каким образом заряд конденсатора изменяется со временем.

Мы видим, что «ускорение» заряда, или его вторая производная по времени, пропорционально самому заряду. Подобная ситуация имеет место в механике пои описании гармонического движения. При гармонических колебаниях вторая производная отклонения тела (ускорение) от положения равновесия пропорциональна отклонению. Например, для шарика массой m (рис. 6), привязанного к закрепленной одним концом невесомой пружине, имеющей коэффициент упругости k и лежащей на горизонтальном гладком столе, имеем: $m\overrightarrow{a} = -k\overrightarrow{x}$, где $\overrightarrow{a}$ — ускорение шарика, $\overrightarrow{x}$ — его отклонение от положения равновесия. Знак минус в правой части уравнения означает, что ускорение и отклонение направлены в противоположные стороны. Будем считать, что колебания совершаются вдоль одной оси, например вдоль оси x. Тогда скорость шарика v определяется формулой: $v = \dfrac{dx}{dt}$, а ускорение $a = \dfrac{dv}{dt}$. Тогда можно записать:

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Это дифференциальное уравнение, из которого, зная m и k, можно определить функцию $x(t)$, иными словами, зависимость отклонения от времени.

Уравнения (1) и (2), несмотря на различия входящих в них параметров, одинаковы. Если взять решение одного из них и заменить одни параметры соответствующими параметрами, которые введены во втором уравнении, то получим решение второго уравнения. Именно так должно быть, поскольку ход решения уравнения не зависит от того, какими буквами обозначены входящие в него величины. Установим теперь соответствие между величинами, входящими в эти два уравнения. Очевидно, что массе m можно сопоставить индуктивность L, коэффициенту упругости k — величину, обратную емкости $1/C$, а отклонению x — заряд Q.

Далее посмотрим, какие еще механические величины, не входящие непосредственно в уравнение (2), можно сопоставить электрическим. Скорость определяем как производную координаты во времени: $v = \dfrac{dx}{dt}$.Согласно установленному соответствию, x переходит в Q, а t не изменяется.

Значит, $v = \dfrac{dx}{dt} \to \dfrac{dQ}{dt} = I$. Электрическая величина, соответствующая скорости, — это сила тока. Кинетическая энергия шарика равна: $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$.

Поскольку при замене механической системы ее электрическим аналогом $m \to L$, а $v \to I$, можно записать $E_к = \dfrac{mv^2}{2} \to \dfrac{1}{2}LI^2 = E_L$.

Следовательно, кинетической энергии шарика соответствует энергия, накопленная в катушке, через которую проходит ток.

Аналогично потенциальной энергии натянутой пружины соответствует энергия, которой. обладает заряженный конденсатор: $E_n = \dfrac{1}{2}kx^2 \to \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = E_C$.

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение (2). Школьная программа не включает дифференциальных уравнений, но окончательное решение этого уравнения, зависимость $x(t)$ при гармоническом движении, приводится в школьном курсе:

$x(t) = x_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$, где x_0 — амплитуда колебаний, или величина или большего отклонения, T — период колебаний, φ_0 — начальная фаза, или величина аргумента функции и момент $t = 0$. Обычно, чтобы избавиться от дроби, вводится величина ω, равная $2\pi/T$.

Тогда (3) $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Для шарика, колеблющегося на пружине, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Как в таком случае изменяется скорость шарика? Как мы уже говорили, скорость $v = dx/dt$. Тогда, дифференцируя уравнение (3), получаем:

$$v(t) = x_0\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Скорость имеет наибольшую абсолютную величину v_{max}, когда $\cos\alpha = \pm 1$ (при этом $x = 0$), следовательно $v_{max} = x_0\omega$.

Теперь посмотрим, чему эквивалентно последнее выражение при переходе от механической системы к электрической.

Отметим, что Q изменяется по закону: $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, где $\omega = 2\pi/T$.

$\mid Q_0 \mid$ — наибольшая величина заряда на конденсаторе. Поскольку при замене механической системы электрической $m \to L$, а $k \to 1/C$, то $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \to \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \to 2\pi\sqrt{LC}$.

Силу тока можно определить двумя способами. Ее можно записать как производную заряда $Q(t)$ по времени или воспользоваться зависимостью v от t для механической системы и заменить механические величины их электрическими аналогами:

$$I(t) = Q_0\omega \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \text{ где } T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Тогда наибольшая величина силы тока в контуре равна: $I_{max} = \mid Q_0 \mid \omega = \dfrac{\mid Q_0 \mid}{\sqrt{LC}}$.

Итак, в контуре происходят синусоидальные колебания, причем фазы колебаний заряда Q и тока I сдвинуты на $\pi/2$:

$$Q \sim \sin(\omega t + \varphi_0),\ I \sim \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Отметим, что независимо от величины Q_0 и φ_0, если только $\omega = 1/\sqrt{LC}$, то $Q(t)$ определяется уравнением (1). В принципе решением этого уравнения является не одна какая-то функция $Q(t)$, но целое семейство функций, каждая из которых соответствует определенным, конкретным значениям Q_0 и φ_0. На первый взгляд это выглядит странным. Казалось бы, что если имеется конкретная система, то должна существовать только одна функция $Q(t)$, описывающая изменение заряда конденсатора со временем. Это неверно. В данной системе могут происходить различные колебания, например отличающиеся по амплитуде. Очевидно, что два колебания с различными амплитудами не могут описываться одинаковыми зависимостями $Q(t)$.

Чтобы определить конкретную функцию $Q(t)$, т. е. установить значения Q_0 и φ_0 для данной системы, нужно видеть за схемой нечто большее, чем просто соединенные между собой отдельные элементы. В нашем случае, например, помимо самой схемы для определения Q_0 и φ_0, а следовательно, $Q(t)$ необходимо знать величину заряда на конденсаторе и силу тока в контуре в момент $t = 0$. Это так называемые начальные условия. По известным начальным условиям можно из семейства функций $Q(t)$ выбрать одну, описывающую конкретный случай колебания.

В рассматриваемой задаче электрическая система описывается следующими начальными условиями: $Q(0) = q, I(0) = 0$.

Второе равенство означает, что в момент подключения катушки к конденсатору ($t = 0$) ток в контуре равен нулю. Итак, имеем: $Q_0 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \cdot 0 + \varphi_0\right) = q$, $Q_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \cdot 0 + \varphi_0\right) = 0$.

Произведя несложные вычисления, получаем $Q_0 = q$, $\varphi_0 = \pi/2$. Значит, в рассматриваемой нами системе при заданных начальных условиях величины Q и I изменяются по следующим законам: $Q(t) = q\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$, $I(t) = -\dfrac{q}{\sqrt{LC}}\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$.

Наибольшие абсолютные значения Q и I соответственно равны $\mid q \mid$ и $\mid q \mid /LC$. Период изменения Q и I равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

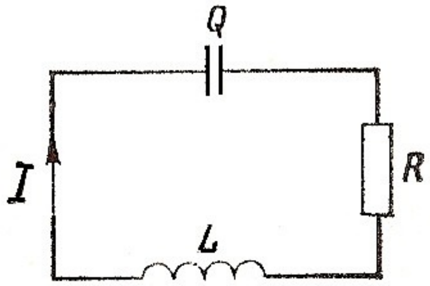


Рис. 2

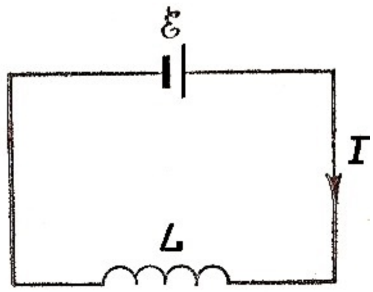


Рис. 3

Таким образом, мы получили ответы на первые три вопроса, поставленные в условиях задачи. Чтобы ответить на четвертый вопрос, рассмотрим контур, показанный на рис. Согласно второму закону Кирхгофа, сумма падений напряжения на отдельных элементах контура должна быть равна нулю, если контур не имеет внешнего источника э. д. с.

$$\text{Значит, } L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}+RI=0,\text{ или } L\frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{1}{C}Q-R\frac{dQ}{dt}$$

Механической аналогией этой зависимости является следующее уравнение:

$$m\frac{d^2x}{dt}=-kx-\gamma\frac{dx}{dt},\text{ или } ma=-kx-\gamma v$$

Сравнивая эти выражения, видим, что падение напряжения на сопротивлении, равное RdQ/dt, соответствует тормозящей силе γv, пропорциональной скорости. В механике сила, пропорциональная скорости, связана с движением в вязких средах. Резистор, таким образом, является аналогом вязкой среды.

Нам осталось ответить еще на один вопрос. Необходимо определить зависимость силы тока от времени в контуре, состоящем из источника с постоянной э. д. с., имеющего нулевое внутреннее сопротивление, и катушки. Из второго закона Кирхгофа имеем для этого контура $L\dfrac{dI}{dt}=\mathcal{E}$, т. е. напряжение на катушке должно быть равно э. д. с, источника. Это уравнение можно записать в виде:

$$(4)\qquad L\frac{d^2Q}{dt^2}=\mathcal{E}=\text{const}$$

В механической системе левой части этого уравнения аналогично выражение $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, или ma.

Из механики известно, что $ma=F$, где F — сила, действующая на тело массой m и сообщающая ему ускорение a. Следовательно, механическим аналогом э. д. с. является сила F. В механике уравнение, эквивалентное (4), записывается как $ma=F=$const.

Это уравнение описывает движение материального тела с постоянным ускорением a. Как известно, скорость при равноускоренном движении изменяется со временем по закону:

$$v(t)=v_0+at=v_0+\frac{F}{m}t$$

Поскольку при переходе от механической системы к электрической $v \to I, m \to L, F \to \mathcal{E}$,для рассматриваемой электрической системы можем записать $I(t) = I_0 + \dfrac{\mathcal{E}}{L}t$.

Таким образом, мы получили ответ на последний вопрос. Как видно из этого уравнения, сила тока изменяется со временем равномерно (I_0 — величина тока в момент $t = 0$). Теперь вспомним о законе сохранения энергии. Система, изображенная на рис. 1, а, является изолированной, поэтому ее полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергии, остается постоянной:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const}$$

Для электрической системы, показанной на рис. 1,б), это означает, что величина:

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = \text{const}$$

Воспользуемся этим фактом при решении следующей задачи. Уравнение (1) можно почленно умножить на произвольную постоянную величину и ввести эту постоянную под знак дифференцирования $\beta\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} = \dfrac{d^2\beta f(x)}{dx^2}$.

Значит, уравнение (1) можно записать в различных формах, например:

$C\dfrac{d^2Q}{dt^2} = -\dfrac{1}{L}Q, \quad C\dfrac{d^2(CQ)}{dt^2} = -\dfrac{1}{L}(CQ)$, где α и β — некоторые постоянные, отличные от нуля.

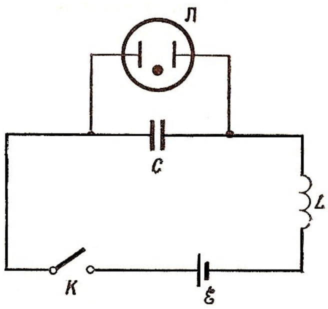
Воспользовавшись рассмотренными здесь примерами и уравнением (2), можно было бы установить несколько «разных» электромеханических аналогов, например: $m \leftrightarrow C, x \leftrightarrow Q, k \leftrightarrow \dfrac{1}{L}$.

Подобные аналогии можно развивать и дальше, устанавливая соответствие между другими электрическими и механическими величинами. Более того, все эти, казалось бы, внешне различные аналогии приводят к одним и тем же физическим выводам, в чем читатель может без труда убедиться сам. Именно поэтому слово «разные» взято в кавычки.

Рассмотренная задача иллюстрирует очень простой и очевидный принцип, о котором, пожалуй, слишком редко упоминают, хотя часто им пользуются. Этот принцип гласит, что одинаковые уравнения имеют одинаковые решения независимо от того, какой физический смысл имеют отдельные входящие в них величины. Этот принцип очень важен и позволяет упростить многие исследования. Между прочим, именно благодаря ему удается проанализировать на ЭВМ разнообразные физические процессы.

Ответ: смотри решение.

Задача №2 Имеется контур, составленный из конденсатора емкостью C (вначале незаряженного), катушки индуктивности L с активным сопротивлением $R = 0$ и батареи источников э. д. с. $\mathcal{E}$ с ничтожно малым внутренним сопротивлением, подключенной через неоновую лампу $Л$ (см. рис.). Неоновая лампа ведет себя как изолятор, когда напряжение на ее зажимах меньше напряжения зажигания $U_{зажс}$. При превышении напряжения зажигания через лампу очень быстро происходит разряд конденсатора, в результате напряжение на лампе падает до напряжения гашения $U_{гаш}$, и она снова перестает проводить электрический ток. Время разряда конденсатора через неоновую лампу так мало, что изменением тока в катушке за этот период можно пренебречь.



Доказать, что при значениях $\mathcal{E}$= 34 В, $U_{зажс}$ = 64 В, $U_{гаш}$= 22 В при замыкании ключа K неоновая лампа вспыхнет только один раз.

Чему будет равно после этого напряжение на конденсаторе?

Указание: при решении имеет смысл воспользоваться электромеханической аналогией, приведенной в предыдущей задаче.

Решение $\mapsto$ При решении воспользуемся электромеханической аналогией, установленной в предыдущей задаче. Заметим, что, за исключением момента свечения неоновой лампочки, эта система ведет себя как груз массой L, закрепленный на конце пружины с коэффициентом упругости $1/C$, причем на груз действует внешняя сила $\mathcal{E}$. Далее легко заметить, что состоянию равновесия механической системы соответствует состояние, в котором заряд на конденсаторе равен $C\mathcal{E}$, а сила тока равна нулю. В начальный момент ток в контуре $I_0 = 0$, а конденсатор не заряжен — его заряд, следовательно, отличен от заряда в состоянии равновесия.

В предыдущей задаче мы установили, что в такой системе будут происходить гармонические колебания, описываемые уравнением:

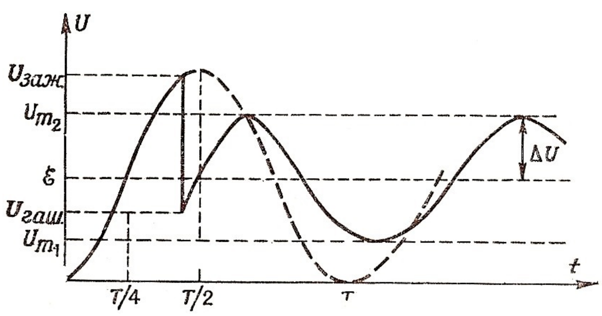
$$(Q - C\mathcal{E}) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Период этих колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Из начальных условий следует, что $A = -C\mathcal{E}, \varphi_0 = 0$.

Отсюда $Q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E}\cos\omega t$. Ток определяем как производную от Q по времени: $I = C\mathcal{E}\omega\sin\omega t$.

Напряжение на конденсаторе равно $U = \dfrac{Q}{C}$, или $U = \mathcal{E} - \mathcal{E}\cos\omega t$. Напряжение на конденсаторе такое же, как и на неоновой лампе.

До сих пор мы рассматривали ситуацию до зажигания лампочки. Очевидно, что напряжение на неоновой лампочке изменялось бы по синусоидальному закону, как показано на рис. Если бы лампа не загоралась, то по истечении полупериода $T/2 = \pi\sqrt{LC}$ напряжение на конденсаторе достигало бы значения $2\mathcal{E}$ = 68 В.



$U_{гаш}$ = 22 В

$\mathcal{E}$ = 34 В

$U_{зажс}$ = 64 В

$\triangle U$= 20 В

U_{m_1}= 14 В

U_{m_2} = 54 В

Однако этого не происходит, потому что при достижении $U_{Зах}$ = 64 В напряжение на конденсаторе скачком уменьшается до величины $u_{гаш}$ = 22 В. На графике этот скачок представлен вертикальным отрезком.

После выключения неоновой лампы ситуация вновь оказывается такой же, как вначале. Напряжение на конденсаторе и сила тока в контуре будут изменяться по синусоидальному закону около положения равновесия, но начальные условия теперь будут иными: амплитуда и фазы начальных колебаний теперь могут быть другими, чем первоначальные.

Определим силу тока I' в контуре в момент, когда напряжение на конденсаторе достигает значения $U_{заж} = 64$ В. Используя электромеханическую аналогию, получаем, что если система совершает свободные колебания (а именно такую ситуацию мы имеем до и после зажигания неоновой лампы), то по закону сохранения энергии выражение: $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$, или его аналог для электрической системы: $\frac{1}{2}\frac{1}{C}(Q - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2}LI^2$, должно иметь постоянную величину.

Следовательно, $\frac{1}{2C}(CU_{заж} - \mathcal{E}\,C)^2 + \frac{1}{2}LI'^2 = \frac{1}{2C}(Q_0 - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2}LI_0^2$, где Q_0 и I_0 — соответственно заряд и сила тока в момент $t = 0$: $Q_0 = 0, I_0 = 0$.

Тогда $I' = \left\{\frac{C}{L}[\mathcal{E}^2 - (U_{заж} - \mathcal{E})^2]\right\}^{1/2}$

Рассмотрим теперь состояние системы после вспыхивания неоновой лампы. Пусть U_m означает напряжение на конденсаторе в момент, когда ток равен нулю. Очевидно, после погашения лампы величина $\frac{1}{2}\frac{1}{C}(Q - \mathcal{E}C)^2 + \frac{1}{2}LI^2$ снова должна быть постоянной.

Следовательно, $\frac{1}{2C}(CU_{гаш} - C\mathcal{E})^2 + \frac{1}{2}LI'^2 = \frac{1}{2C}(CU_m - C\mathcal{E})^2$.

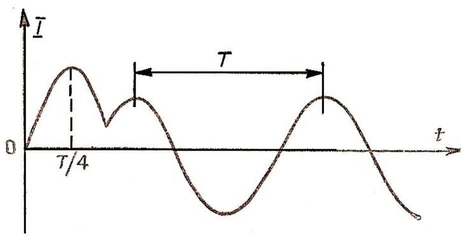
Тогда $I' = \left\{\frac{C}{L}[(U_m - \mathcal{E})^2 - (U_{гаш} - \mathcal{E})^2]\right\}^{1/2}$

При сравнении обоих выражений для I' (ток в катушке индуктивности не может измениться за очень малое время горения неоновой лампы) получаем $\mathcal{E}^2 - (U_{заж} - \mathcal{E})^2 = (U_m - \mathcal{E})^2 - (U_{гаш} - \mathcal{E})^2$.

Из этого уравнения определим U_m. Очевидно, что уравнение имеет два решения, поскольку, когда лампа гаснет, система совершает гармонические колебания, которым при нулевом токе соответствуют максимальное и минимальное напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \mathcal{E} \pm [\mathcal{E}^2 + (U_{гаш} - \mathcal{E})^2 - (U_{заж} - \mathcal{E})^2]^{1/2}$$

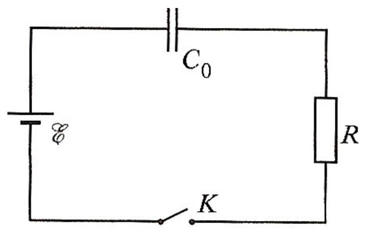
Подставляя численные значения величин, находим $U_m = (34 \pm 20)$ В.



Мы видим, что, когда неоновая лампа гаснет, напряжение на конденсаторе может изменяться от 34 В — 20 В = 14 В до 34 В + 20 В = 54 В, т. е. оно ни разу не достигает значения, при котором лампа может вновь загореться. Вид функций $U(t)$ и $I(t)$показан на рисунках. Объяснить такой вид функции предоставляется читателю.

Ответ: смотри решение.

Задача №3 В схеме, изображенной на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять емкость конденсатора по закону $C(t) = C_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай медленных изменений емкости, т.е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathcal{E}, C_0, R, A, \omega$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



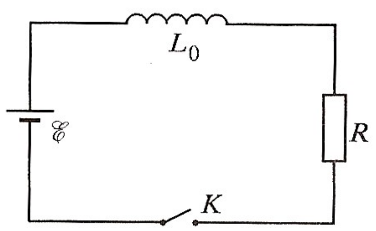
Решение $\mapsto$ Условие $2\pi/\omega \gg \tau$ — означает, что изменения ёмкости медленные по сравнению со временем установления, то есть заряд на конденсаторе медленно меняется относительно амплитудного значения:

$$q_0 = EC_0 \Rightarrow q(t) = EC_0(1 + A\sin(\omega t)) \Rightarrow I(t) = \dot{q(t)} = EC_0A\omega\cos(\omega t)$$

Следовательно, $W(t) = I^2R = (EC_0A\omega\cos(\omega t))^2R = (EC_0A\omega)^2\left(\dfrac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right)$, усредняем это выражение по большому промежутку времени $t \gg \dfrac{2\pi}{\omega}$, получаем: $\overline{W} = \dfrac{1}{2}(\mathcal{E}\omega AC_0)^2R$.

Ответ: $\overline{W} = \dfrac{1}{2}(\mathcal{E}\omega AC_0)^2R$.

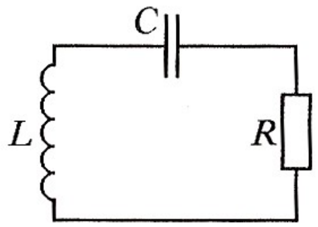
Задача №4 В схеме, изображенной на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L(t) = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A < 1$, то ток через резистор R будет также меняться. Найти амплитуду переменной составляющей силы тока с частотой ω. Рассмотреть случай медленных изменений индуктивности, т.е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать L_0, A, R, ω. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



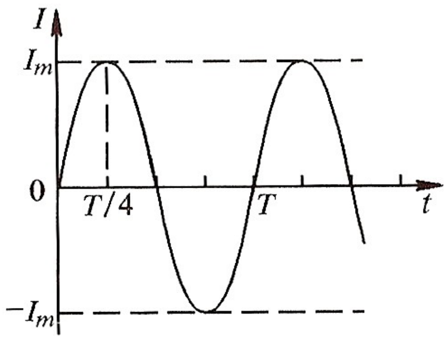
Решение $\mapsto$ Аналогично предыдущей задаче условие $2\pi/\omega \gg \tau$ — означает, что изменения индуктивности медленные по сравнению со временем установления тока I. В контуре действуют две ЭДС: $E - \dfrac{d\varPhi}{dt} = IR$, так как индуктивность меняется медленно, то в среднем по времени величина тока равна: $I_0 = \dfrac{E}{R}$, затем отклонения тока от среднего значения происходят благодаря изменению индуктивности: $\varPhi(t) = I_0L_0(1 + A\sin(\omega t)) \Rightarrow \dfrac{d\varPhi}{dt} = I_0L_0\omega A\cos(\omega t) = E_{инд} = R\triangle I$ ($\triangle I$ — амплитуда изменения тока), $\triangle I = \dfrac{EL_0\omega A}{R^2}$.

Ответ: $\triangle I = \dfrac{EL_0\omega A}{R^2}$.

Задача №5 Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке, индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину $\triangle L$ ($\triangle L < L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину $\triangle L$, если $L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.



Решение $\mapsto$ Так как сопротивление контура мало, то колебания, возникающие в контуре, можно считать почти синусоидальными, так что за период колебаний потери энергии достаточно малы.



Тогда период колебаний определяется по формуле Томсона (см. рис.):

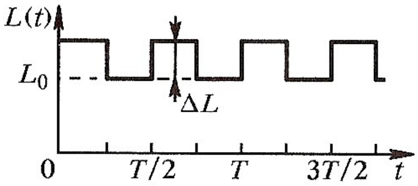
$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Индуктивность изменяется через время $t = T/2 = \pi\sqrt{LC}$. При изменении индуктивности на величину $\triangle L$ в силу сохранения магнитного потока будем иметь:

$$I_T L = (L + \triangle L)I = \varPhi$$

Здесь I_T — амплитуда тока в контуре. Начальная энергия, запасенная в контуре, равна: $W_1 = \dfrac{\varPhi^2}{2(l + \triangle l)}$, где $\varPhi$ — магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности.

В момент уменьшения индуктивности на величину $\triangle L$ энергия, запасенная в катушке, увеличилась и стала равной: $W_2 = \dfrac{\varPhi^2}{2L}$.



Изменение энергии равно:

$$\triangle W = W_2 - W_1 = \frac{\phi^2}{2}\frac{\triangle L}{L(L + \triangle L)} \approx \frac{\varPhi^2 \triangle L}{2L^2}$$

За время $t = T/2$ в контуре происходят потери энергии, выделяющейся в виде тепла на резисторе с сопротивлением R, равные:

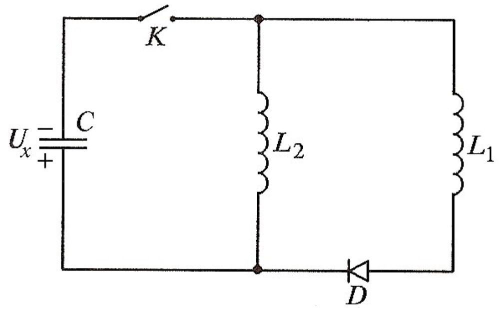
$$W_{\text{потерь}} = I^2_{\text{эф}} R \frac{T}{2}$$

Для поддержания в контуре незатухающих колебаний требуется скомпенсировать эти потери за счет увеличения энергии, запасенной в катушке индуктивности.

Следовательно, $\triangle W \geq W_{\text{потерь}}$ или $\frac{I_T^2 \triangle L}{2} \geq \frac{I_T^2 R\pi\sqrt{LC}}{2}$. Откуда $\triangle L \geq \pi R\sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3}$ Гн.

Ответ: $\triangle L \geq \pi R\sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3}$ Гн.

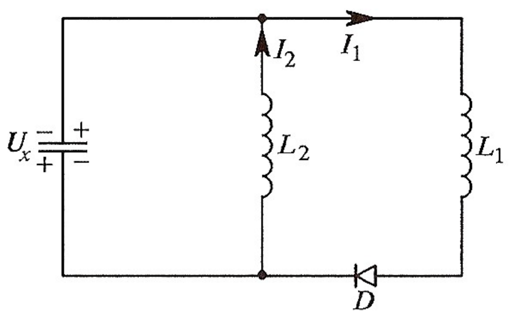
Задача №6 В схеме, изображенной на рисунке, катушки с индуктивностями L_1 и L_2 и пренебрежимо малыми сопротивлениями закорочены через идеальный диод D. В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкости C заряжен до неизвестного напряжения U_x. Через некоторое время τ после замыкания ключа напряжение на конденсаторе станет равным нулю, а затем конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения и в этот момент через диод D будет течь ток, равный I_0.



1) Определить τ.

2) Определить начальное напряжение U_x.

Решение $\mapsto$ 1) После замыкания ключа K конденсатор начинает разряжаться и отдавать свою энергию катушке L_2, так как диод D закрыт. Имеем колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L_2 и конденсатора C. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{L_2 C}$. Полный разряд конденсатора произойдет через четверть периода. Следовательно, $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_2 C}$.



2) Когда конденсатор начинает перезаряжаться, открывается диод D, и через катушку индуктивности L_1 начинает протекать ток I_1. При этом через L_1 течет ток I_2.

Согласно закону Ома: $L_1 \frac{\triangle I_1}{\triangle t} + L_2 \frac{\triangle I_2}{\triangle t} = 0$ или

$L_1 I_0 + L_2(I_0 - I_{20}) = 0$, где I_{20} — ток через катушку L_2 в момент начала перезарядки конденсатора.

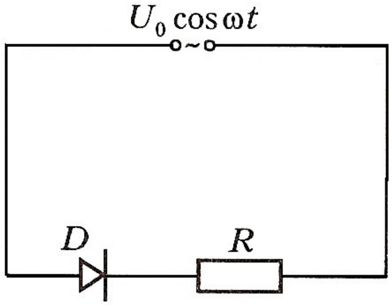
Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{L_2 I_{20}^2}{2} = \frac{C U_x^2}{2}$$

Решая систему, получим ток $I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} U_x \sqrt{\frac{C}{L_2}}$. Отсюда $U_x = I_0 \frac{L_1 + L_2}{L_2}\sqrt{\frac{L_2}{C}} = I_0 \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{L_2} C}$.

Ответ: $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_2 C}$, $U_x = I_0 \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{L_2 C}}$.

Задача №7 Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором сопротивлением R, как показано на рисунке. Действующее значение напряжения источника $U_Д = 20$ В. Сопротивление резистора $R = 12$ Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если в цепи выделяется средняя мощность $P = 10$ Вт. Обратным током диода пренебречь.



Решение $\mapsto$ Если бы диод обладал одним и тем же сопротивлением r при протекании тока в цепи в обоих направлениях, то средняя мощность тепловых потерь в ней определялась бы по закону Джоуля-Ленца. С учетом закона Ома, для этого случая имеем:

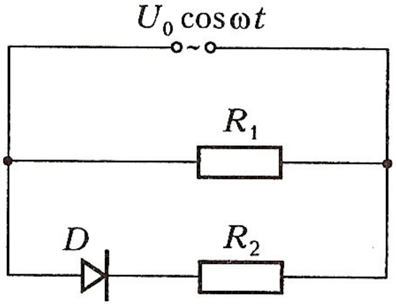
$$P_0 = I_Д(R + r) = \frac{U_Д^2}{R + r}$$

На самом деле диод обладает односторонней проводимостью, и ток в цепи отличен от нуля только при одной полярности приложенного переменного напряжения. Поэтому $P = P_0/2$.

Из полученных соотношений находим $r = \frac{U_Д^2}{2P} - R = 8$ Ом.

Ответ: $r = \frac{U_Д^2}{2P} - R = 8$ Ом.

Задача №8 В схеме, изображенной на рисунке, сопротивления резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = 6$ Ом. Амплитуда приложенного переменного напряжения $U_0 = 20$ В. Найдите количество теплоты Q, выделяющееся на резисторах за время $\triangle t = 120$ с. Диод считать идеальным. Время $\triangle t \gg T$, где T — период переменного напряжения.



Решение $\mapsto$ Сила тока через резистор сопротивлением R_1 изменяется по закону:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U_0}{R_1}\cos\omega t$$

Количество теплоты, которое выделяется на этом резисторе за время $\triangle t$, определяется законом Джоуля-Ленца:

$$Q_1 = I_{1_Д}^2 R_1 \triangle t, \text{ где } I_{1_Д} \text{ — действующее (эффективное) значение силы тока.}$$

Для гармонически изменяющегося тока:

$$I_{1_Д} = \frac{I_{1_{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{R_1\sqrt{2}}$$

Таким образом, $Q_1 = \dfrac{U_0^2}{2R_1}\triangle t$.

В отсутствие диода количество теплоты, выделяющееся на резисторе сопротивлением R_2, вычислялось бы точно так же (разумеется, вместо индекса «1» следовало бы употребить индекс «2»). Однако идеальный диод проводит ток только в одним направлении. Другими словами, половину периода через резистор сопротивлением R_2 ток идет так же, как и через резистор сопротивлением R_1, а половину периода ток отсутствует. Это означает, что количество теплоты, выделяющееся на вторим резисторе, при включении диода уменьшается в 2 раза:

$$Q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0^2}{2R_2}\triangle t\right)$$

Так как тепло выделяется одновременно на обоих резисторах, то

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{U_0^2}{2R_1}\triangle t + \frac{U_0^2}{4R_2}\triangle t = 6 \text{ кДж}$$

Ответ: $Q = Q_1 + Q_2 = \dfrac{U_0^2}{2R_1}\triangle t + \dfrac{U_0^2}{4R_2}\triangle t = 6$ кДж

Задача №9 Колебательный контур радиоприемника состоит из кадушки индуктивностью $L = 2\cdot 10^{-3}$ Гн и двух конденсаторов с электроемкостями $C_1 = 3\cdot 10^{-11}$ Ф и $C_2 = 1,5\cdot 10^{-11}$ Ф. Соединяя разными способами катушку с конденсаторами, можно изменять собственную частоту контура. Найдите минимальную длину полны λ_{min}, на которую может быть настроен контур. Скорость распространения электромагнитных волн $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Решение $\mapsto$ По формуле Томсона период колебаний в контуре равен: $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Соответствующая такому периоду длина волны составляет:

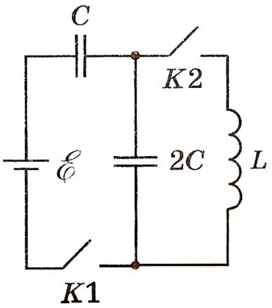
$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}$$

Минимальная длина волны будет соответствовать такому соединению конденсаторов, при котором их общая электроемкость окажется наименьшей. Вспомнив, как вычисляется результирующая емкость при различных соединениях двух конденсаторов в батарею, легко сообразить, что наименьшей она будет при последовательном их соединении. При этом $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$, откуда $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$.

Следовательно, $\lambda_{min} = 2\pi c\sqrt{\dfrac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}} = 266$ м.

Ответ: $\lambda_{min} = 2\pi c\sqrt{\dfrac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}} = 266$ м.

Задача №10 В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Конденсаторы в начальный момент времени не заряжены. Вначале замыкают ключ K_1, затем, после затухания всех возникших переходных процессов, замыкают K_2.



1) Определите максимальную силу тока в катушке после замыкания ключа K_2.

2) Через какое время после замыкания ключа K_2 максимум силы тока будет достигнут в первый раз?

Решение $\mapsto$ Назовём момент времени сразу после замыкания второго ключа начальным. В начальный момент времени заряды конденсаторов равны: $q_0 = \dfrac{2}{3}C\mathcal{E}$, так как $C_{эквив} = \dfrac{2CC}{2C + C} = \dfrac{2}{3}C$, ток в катушке отсутствует.

В момент, когда сила тока максимальна $U_L = U_2 = 0$, $U_1 = \mathcal{E}$, и из закона сохранения энергии (ЗСЭ) получим: $A + W_H = W_к \Rightarrow$

$$\mathcal{E}\left(C\mathcal{E} - \frac{2}{3}\right) + \frac{2/3C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{LI^2}{2}$$

Тогда $I_{max} = \mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{3L}}$.

Максимальная сила тока может быть определена и без применения ЗСЭ из «чисто колебательных» соображений.

Докажем теперь, что в цепи происходят гармонические колебания силы тока и найдем их период. Пусть q_1 и q_2 — заряды конденсаторов, причем знаки выбраны так, что в начальный момент времени оба заряда положительны, I — сила тока в катушке (положительное направление — по схеме вниз). Тогда:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{q}_2 + I \\ \dfrac{q_1}{C} + \dfrac{q_2}{2C} = \mathcal{E} \\ \dfrac{q_2}{2C} = L\dot{I} \end{cases}$$

Продифференцировав второе уравнение, получим $\dot{q}_1 = -\frac{1}{2}\dot{q}_2$, затем из первого находим $\dot{q}_2 = -\frac{2}{3}I$, и, наконец, из третьего получаем уравнение:

$$\ddot{I} + \frac{1}{3LC}I = 0$$

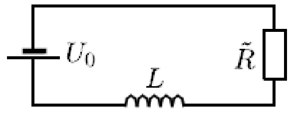
Из последнего уравнения следует, что сила тока в катушке совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{3LC}$ и нулевым средним значением, так как в правой части уравнения стоит нуль. Таким образом, в начальный момент времени сила тока в катушке равна значению в положении равновесия и, следовательно, максимального значения она достигнет через четверть периода:

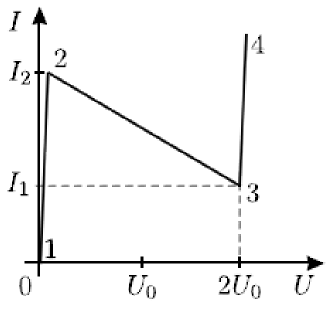
$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{3LC}$$

Зная напряжение на катушке в начальный момент времени $U(0) = U_2 = \frac{1}{3}\mathcal{E}$, можно найти начальную скорость изменения тока: $L\dot{I}(0) = \frac{\mathcal{E}}{3}$, $\dot{I}(0) = \frac{\mathcal{E}}{3L}$, а затем и амплитуду изменения силы тока, то есть максимальную силу тока: $I_{max} = \frac{\dot{I}(0)}{\omega} = \frac{\mathcal{E}}{3L}\frac{1}{\sqrt{3LC}} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

Ответ: $\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{3LC}$, $I_{max} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

Задача №11 Имеется нелинейный электронный прибор $\tilde{R}$. На графике для него изображена зависимость тока I от напряжения U (на участках 1–2 и 3–4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из $\tilde{R}$, индуктивности L и идеальной батарейки с ЭДС, равной U_0, причём прибор $\tilde{R}$ включён с «правильной» полярностью, соответствующей графику. Постройте график зависимости силы тока в цепи от времени и найдите период колебаний тока.





Решение ↦ После замыкания цепи электронный прибор начнёт работать на участке 1–2 его характеристики. При этом уравнение, описывающее изменение силы тока I в цепи со временем t, будет иметь вид: $L\frac{\triangle I}{\triangle t} = U_0$; откуда следует, что $LI = U_0 t$, то есть сразу после замыкания цепи сила тока в ней будет нарастать прямо пропорционально времени.

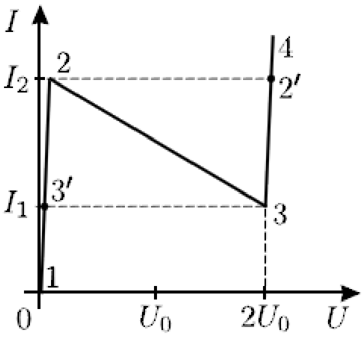


Рис. 1

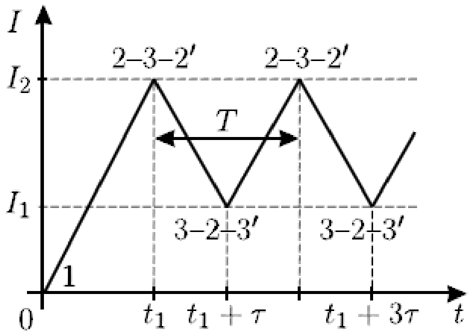


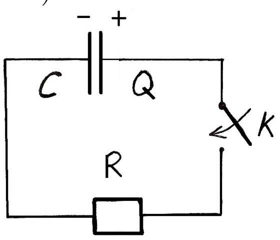
Рис. 2

Нарастание тока будет продолжаться до момента времени $t_1 = LI_2 = U_0$ — до тех пор, пока состояние прибора не изобразится точкой 2 на графике зависимости $I(U)$ (см. рис.1). Начиная с этого момента дальнейшее увеличение силы тока через прибор станет невозможным. При этом напряжение на катушке будет падать, а на приборе — расти. В результате прибор очень быстро совершит переход $2 - 3 - 2'$, так как состояние системы на участке 2-3, на котором прибор характеризуется отрицательным дифференциальным сопротивлением, неустойчиво. Поскольку сила тока в катушке не может измениться мгновенно, то токи в состояниях 2 и $2'$ одинаковы: $I_2 = I_2'$ (заметим, что во время перехода $2 - 3 - 2'$ ток в цепи поддерживается постоянным за счёт так называемых «паразитных ёмкостей», которые неизбежно имеются у всех элементов цепи). После того, как система окажется в состоянии $2'$, электронный прибор будет работать, как идеальная батарейка с ЭДС, равной $-2U_0$. Поэтому уравнение, описывающее изменение силы тока в цепи со временем, примет вид: $L\dfrac{\triangle I}{\triangle t} = U_0 - 2U_0 = -U_0$, откуда следует, что $L\triangle I = -U_0\triangle t$, то есть сила тока в цепи будет уменьшаться со временем по линейному закону. Через время $\tau = L(I_2 - I_1)/U_0$ сила тока станет равной I_1, и система окажется в состоянии 3, из которого очень быстро совершит переход $3 - 2 - 3'$ через участок неустойчивости 3-2. После этого сила тока в цепи вновь начнёт нарастать от значения I_1 до значения I_2 в соответствии с уравнением $L\dfrac{\triangle I}{\triangle t} = U_0$, и через время τ система вновь придёт в состояние 2, после чего описанные выше процессы будут повторяться. Таким образом, сила тока, текущего в цепи, будет изменяться со временем по «пилообразному» закону (см. рис.2) с периодом повторения $T = 2\tau = 2L(I_2 - I_1)/U_0$.

Ответ: смотри решение.

Процессы установления тока при зарядке и разрядке конденсатора.

Задачи о разрядке и зарядке конденсатора, строго говоря, выходят за рамки учения о постоянных токах и, соответственно, школьной программы, однако некоторые задачи часто встречаются в олимпиадах, поэтому постараемся осветить данную тему. Отметим сразу то, что приводимые ниже решения задач о разрядке и зарядке получаются в предположении, что мгновенное значение тока одно и то же во всех поперечных сечениях проводника, соединяющего обкладки конденсатора, а мгновенное электрическое поле такое же, как в электростатике при тех же зарядах на обкладках конденсатора (токи и поля, удовлетворяющие таким условиям будем называть квазистационарными).



Пусть у нас есть заряженный (Q) конденсатор с ёмкостью C. Если обкладки конденсатора соединить проводом, то по проводу потечёт ток, а конденсатор будет разряжаться. Пусть I, Q, φ — мгновенное значения тока, заряда положительной обкладки и разности потенциалов между обкладками.

Считая ток в проводе положительным, когда он течёт от положительной обкладки к отрицательной, можем написать: $I = -\dfrac{dQ}{dt}, RI = \varphi, Q = C\varphi$, где C, R — ёмкость конденсатора и сопротивление проводника.

Исключая φ и I, получим дифференциальное уравнение:

$$(1) \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0,$$

найдём его решение, для этого преобразуем его к виду (2) и проинтегрируем:

$$(2) \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int dt \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + \text{const} \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = RC.$$

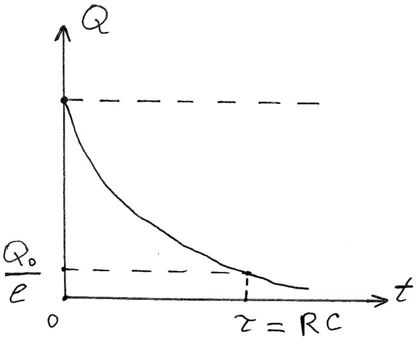
И так, мы получили формулу, по которой меняется заряд на конденсаторе при разрядке.

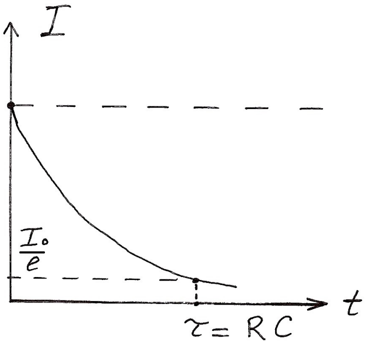
Q_0 — начальное значение заряда на конденсаторе, а $\tau = RC$ — постоянная, имеющая размерность времени, которая называется временем релаксации (через время τ заряд конденсатора убывает в e раз, поэтому τ по порядку величины равно времени, в течение которого конденсатор разрядится/зарядится). Имеем:

$$(3) \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = RC.$$

Продифференцируем выражение (3) по t, найдём закон изменения тока во времени:

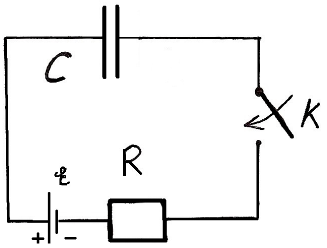
$I(t) = \dfrac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$, где $I_0 = \dfrac{Q_0}{\tau}$ — начальное значение тока, то есть ток в момент времени $t = 0$.





— графики разрядки конденсатора.

Аналогично решается задача о зарядке конденсатора. Пусть в цепь конденсатора включена гальваническая батарея или какой-нибудь другой источник тока с постоянной электродвижущей силой $\mathcal{E}$.



Источник возбуждает ток, заряжающий конденсатор, электрические заряды на обкладках конденсатора препятствуют прохождению тока и уменьшают его. Уравнение $Q = C\varphi$ остаётся неизменным, остальные два уравнения запишутся как:

$$I = \frac{dQ}{dt}, RI = \mathcal{E} - \varphi \Rightarrow (5) \;\; \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Запишем уравнение (5) в виде: $\dfrac{d}{dt}(Q - \mathcal{E}C) + \dfrac{Q - \mathcal{E}C}{RC} = 0$, положим в нём $U = Q - \mathcal{E}C$ и проинтегрируем:

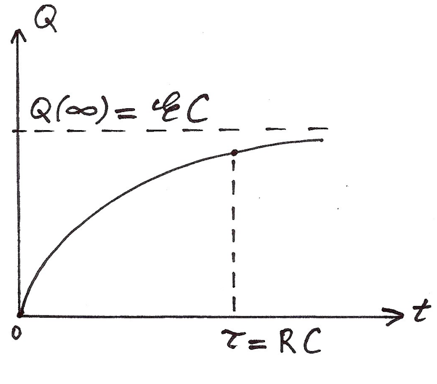
$$\int \frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC}\int dt \Rightarrow U = U_0 e^{-t/\tau} \Leftrightarrow Q - \mathcal{E}C = U_0 e^{-t/\tau}, \text{ где } U_0 = -\mathcal{E}C \text{ при } t = 0, Q = 0 \Rightarrow$$

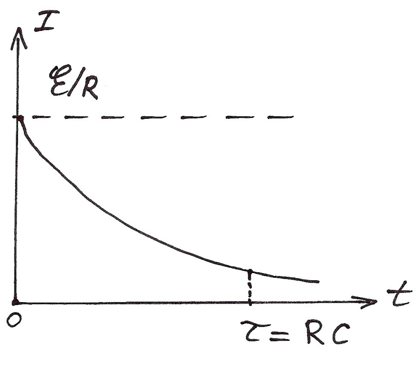
$$\Rightarrow (6) \;\; Q(t) = \mathcal{C}(1 - e^{-t/\tau})$$

Из формулы (6) видим, что при $t \to \infty, Q \to \mathcal{E}C$. Для тока получаем:

$$(7) \quad I = \frac{\mathcal{E}C}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Видно, что ток максимален в начальный момент времени и равен $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$.





Наличие катушки индуктивности.

Скажем здесь пару слов об электромагнитной индукции. Электродвижущей силы в проводнике при его перемещении в магнитном поле либо в замкнутом проводящем контуре вследствие его движения в магнитном поле или изменения самого поля. В замкнутом проводнике при этом возникает электрический ток, называемый индукционным током.

Основной закон электромагнитной индукции (объединяющий закон Фарадея и правило Ленца): электродвижущая сила электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

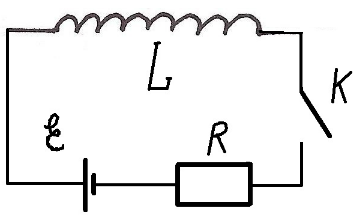
Знак минус в правой части электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Заряд, протёкший по контуру с сопротивлением R при изменении магнитного потока сквозь контур на величину $\triangle\Phi$, за время τ равен:

$q = \int_\tau^0 I dt = \int_\tau^0 \frac{\mathcal{E}}{R} dt = -\frac{\triangle\Phi}{R}$, где I — индукционный ток в контуре, R — сопротивление контура, $\triangle\Phi$ — изменение магнитного потока в контуре.

Магнитный поток сквозь контур и сила тока в нём связаны соотношением $\Phi = LI$, где L — индуктивность контура (коэффициент пропорциональности).

Рассмотрим теперь процессы, возникающие в контуре на рисунке при замыкании и размыкании ключа.



Пусть сначала ключ разомкнут, тока в цепи нет; после его замыкания возникнет ток, который будет проходить через катушку индуктивности, вследствие чего будет возрастать магнитный поток пронизывающий эту катушку, то есть она будет запасть магнитную энергию $W = LI^2/2$.

Запишем соответствующие уравнения в контуре:

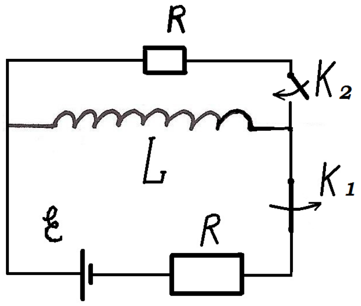
$$(1) \quad IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$$

Пусть $U = \mathcal{E} - IR \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - U}{R} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{L}{R}\frac{dU}{dt} = -U$, после интегрирования получим:

$U(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 e^{-t/\tau_L} \Rightarrow (2) \;\; I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$, где постоянная τ_L, имеющая размерность времени, равна $\tau_L = L/R$. Она называется временем установления тока.

Видим из (2), что полный ток состоит из двух слагаемых, из которых второе $-\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau_L}$, определяет силу экстратока замыкания (индукционный ток). При $t \to \infty$ экстраток стремится к нулю, а полный I к своему предельному значению $\mathcal{E}/R$.

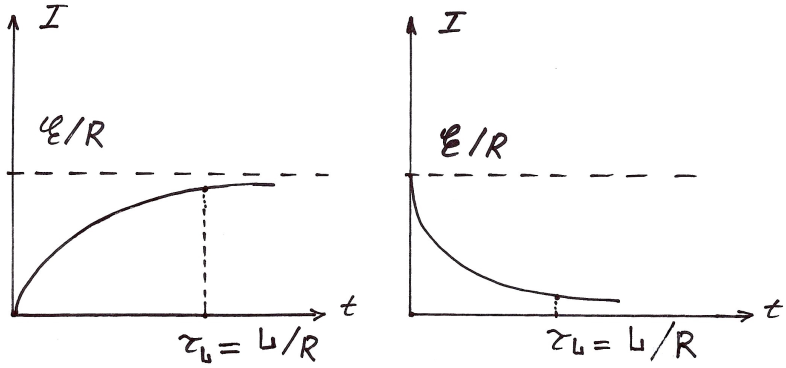
Таким образом, окончательное установление определяется временем τ_L.



Поставим дополнительную нагрузку параллельно катушке и одновременно откроем K_1 и закроем K_2. Тогда энергия запасённая в катушке пойдёт выделение тепла в нагрузке.

Запишем соответствующие уравнения:

$L\dfrac{dI}{dt} + IR = 0 \Rightarrow \dfrac{dI}{I} = -\dfrac{R}{L}dt$ (интегрируем) $\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/tau_L}$, где $I_0 = \mathcal{E}/R$ в момент $t = 0 \Rightarrow I(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau_L}$.

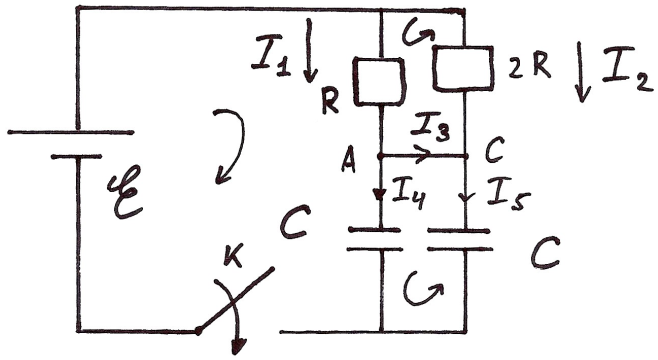


(процессы становления после замыкания ключа K_1 и размыкания K_2)

Рассмотрим теперь некоторые примеры задач.

Примеры решения задач.

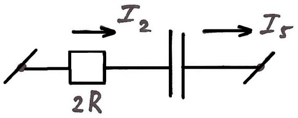
<u>**Задача №11***</u> В системе на рисунке, в начальный момент времени ключ K — разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Какой заряд протечёт через перемычку A после замыкания ключа K?



Решение: Так как ёмкости конденсаторов одинаковы, то $Q = C\varphi$ выполняется для обоих конденсаторов в любой момент времени, следовательно, $I_4 = I_5 = I_c$.

Воспользуемся правилами Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_5 = I_3 + I_2 \\ I_4 + I_3 = I_1 \\ I_4 + I_5 = I \end{cases} \text{и} \begin{cases} I_1 + I_2 = I \\ 2I_c = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2I_2 = \dfrac{2}{3}I \\ I_2 = I/3 \\ I = 2I_c \end{cases}$$



Рассмотрим теперь неоднородный участок цепи и запишем закон Ома:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = 2RI_2 + Q/C \\ I_2 = \dfrac{2}{3}I_c \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{4}{3}RI_c + Q/C, \text{ так как } \dot{Q} = I_c, \text{ то}$$

$\mathcal{E} = \dfrac{4}{3}R\dfrac{dQ}{dt} + Q_c/C$, $U = \mathcal{E} - Q/C \Rightarrow \dfrac{dU}{U} = -\dfrac{3}{4RC}dt \Rightarrow$ интегрируем $\Rightarrow U = U_0 e^{-\dfrac{3}{4RC}t}$, при $t = 0$, $U_0 = \mathcal{E}$, следовательно, получим:

$$(1) \quad Q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\dfrac{3}{4RC}t}\right)$$

Теперь, так как $I_1 = \dfrac{2}{3}I = \dfrac{4}{3}I_c$, то $I_3 = \dfrac{I_c}{3} \Leftrightarrow \dfrac{dQ_{AC}}{dt} = \dfrac{dQ_c}{3dt} \Rightarrow dQ_{AC} = \dfrac{1}{3}dQ_c$, проинтегрируем это равенство от $t = 0$ до $t = \infty$.

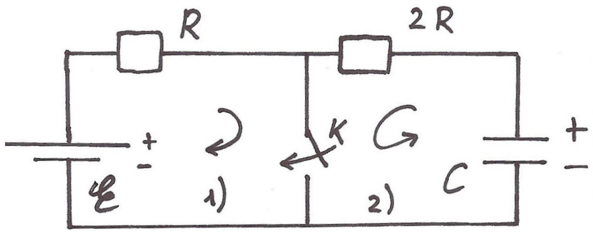
$$\int_0^\infty dQ_{AC} = \frac{1}{3}\int_0^\infty dQ_c \Leftrightarrow Q_{AC} - 0 = \frac{1}{3}(Q_{c_{конеч}} - 0) \Rightarrow Q_{AC} = \frac{1}{3}Q_{c_{конеч}}$$

Величину заряда на конденсаторе после процесса можно найти из (1) следующим образом:

$$Q_{c_{конеч}} = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \mathcal{E}C$$

Ответ: $Q_{AC} = \dfrac{1}{3}\mathcal{E}C$.

Задача №12* В схеме на рисунке периодически (с периодом 3τ) повторяют следующий процесс: ключ замыкают на время τ и размыкают на время 2τ, причём τ достаточно мало и напряжение на конденсаторе за это время изменяется незначительно, около среднего значения. Найдите это среднее значение, также найти среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе $2R$ в установившемся режиме.



Решение: Когда ключ K замкнут, во втором контуре будут происходить колебания, но в силу того, что ключ замкнули на достаточно малое время, эти колебания можно считать малыми, а следовательно токи во всех контурах приблизительно равны.

Запишем правило Кирхгофа для 1)-го контура:

$$\mathcal{E} = 3RI_1 + U_c \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E} - U_c}{3R} \text{ или } \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - U_c}{3R} \Leftrightarrow \frac{\triangle q_1}{2\tau} = \frac{\mathcal{E} - U_c}{3R} \Rightarrow \triangle q_1 = \frac{\mathcal{E} - U_c}{3R}2\tau$$

После того как ключ K — замкнули:

$$U_c = 2RI_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_c}{2R} \text{ или } \frac{\triangle q_2}{\tau} = \frac{U_c}{2R} \Rightarrow \triangle q_2 = \frac{U_c}{2R}\tau$$

Так как $U_cC = Q_c$ и сказано, что напряжение меняется незначительно, то

$$\triangle q_1 + \triangle q_2 = 0 \text{ } (\triangle q_2 < 0 \text{ в силу того, что конденсатор разряжается})$$

$$\mid \triangle q_1 \mid = \mid \triangle q_2 \mid \Rightarrow \frac{\mathcal{E} - U_c}{3R}2\tau = \frac{U_c}{2R}\tau \Rightarrow U_c = \frac{4}{7}\mathcal{E}$$

Найдём теперь среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на резисторе $2R$. Так как

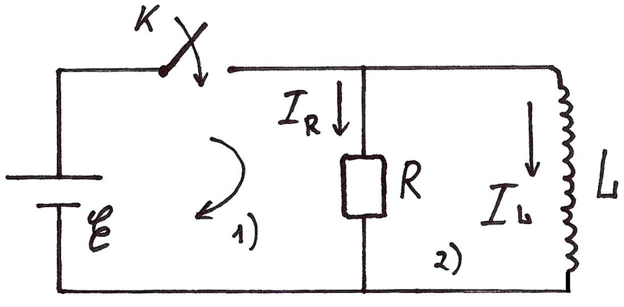
$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - \frac{4}{7}\mathcal{E}}{3R} = \mathcal{E}/7R, \quad A_1 = I_1^2 2R2\tau = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot \frac{4}{49}$$

$I_2 = \dfrac{U_c}{2R} = \dfrac{2}{7}\mathcal{E}/R, \quad A_2 = I_2^2 2R\tau = \dfrac{8}{49}\mathcal{E}^2/R$, следовательно,

$$\overline{P} = \frac{\sum A_i}{3\tau} = \frac{\mathcal{E}^2}{49R}\left(\frac{4+8}{3\tau}\right) = \frac{4}{49}\mathcal{E}^2/R\tau$$

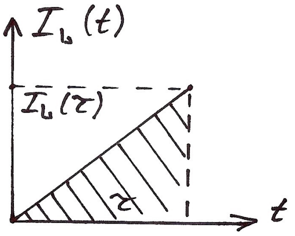
Ответ: $U_c = \dfrac{4}{7}\mathcal{E}$, $\overline{P} = \dfrac{4}{49}\mathcal{E}^2/R\tau$.

Задача №13* В цепи, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. В начальный момент ключ разомкнут, ток в цепи отсутствует. Ключ на некоторое время замыкают, а потом размыкают. Ключ на некоторое время замыкают, а потом размыкают. Оказалось, что заряд, протёкший через катушку после размыкания ключа в 4 раза меньше, чем заряд протёкший через источник при замкнутом ключе. Найдите отношение теплоты, выделившейся в цепи после размыкания ключа, к теплоте, выделившейся в цепи при замкнутом ключе.



Решение: Выберем обход контура 1) и 2) и запишем правила Кирхгофа:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = I_R R \\ \mathcal{E} = L\dfrac{dI_L}{dt} \end{cases}, \text{ так как } R \text{ и } L \text{ — соединены параллельно.}$$



Отсюда следует, что $I_L'(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{L}$=const, пусть ключ K замкнули на время τ, ток сразу через катушку не идёт. Теперь, так как $I_L = \dfrac{dq_L}{dt}$, то $dq_L = I_L dt$.

Поскольку $I_L'(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{L}$, то $q_{конеч} = \dfrac{I_L(\tau)\tau}{2}$ — полный заряд, протёкший через катушку при замкнутом ключе K.

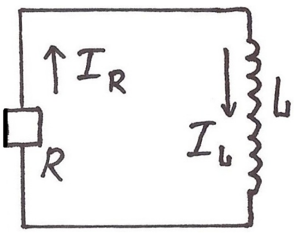
Найдём теперь заряд, протёкший через резистор: $\mathcal{E} = I_R R$, $I_R = \mathcal{E}/R$. Так как $I_R = \dfrac{dq_R}{dt}$, то $\dfrac{q_R - 0}{\tau} = \mathcal{E}/R \Rightarrow q_R = \dfrac{\mathcal{E}}{R}\tau$, следовательно, заряд, протёкший через источник за время τ равен:

$$q_{источ} = \frac{\mathcal{E}}{R}\tau + \frac{I_L(\tau)\tau}{2}$$

После размыкания ключа ток в контуре сразу же не изменится (теорема о сохранении магнитного потока). Когда ключ замкнули: $\mathcal{E}_{инд} = I_R R = -L\dfrac{dI_L}{dt}$, так как катушка расходует запасённую магнитную энергию. Имеем:

$$I_R dt = -\frac{L}{R} dI_L \text{ (проинтегрируем)} \Rightarrow \int_0^\infty I_R dt = -\frac{L}{R}\int_0^\infty dI_L,\ q_R - 0 = -\frac{L}{R}(0 - I_L(\tau)) \Rightarrow$$

$\Rightarrow q_R = \dfrac{I_L(\tau)L}{R}$ — заряд, протёкший через катушку и резистор после размыкания ключа K.



Из условия задачи получим:

$$\frac{\mathcal{E}\tau}{R} + \frac{I_L(\tau)\tau}{2} = 4I_L(\tau)\frac{L}{R}.$$

Найдём $I_L(\tau) \Rightarrow \mathcal{E} = L\dfrac{dI_L}{dt} \Leftrightarrow L\dfrac{I_L(\tau) - 0}{\tau} = \mathcal{E} \Rightarrow I_L(\tau) = \dfrac{\mathcal{E}\tau}{L}$, имеем:

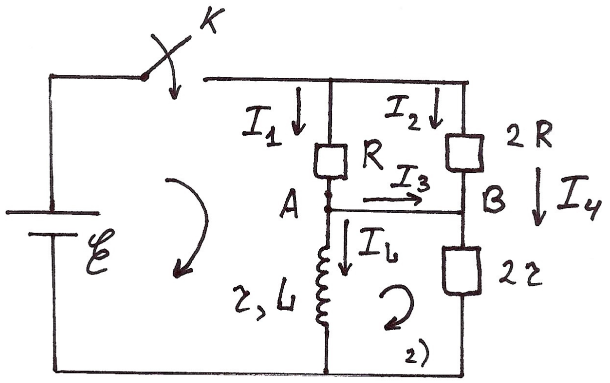
$$\frac{\mathcal{E}\tau}{R} + \frac{\mathcal{E}}{2L}\tau^2 = 4\frac{\mathcal{E}\tau}{R} \Rightarrow \tau = 6\frac{L}{R}.$$

Теперь мы можем найти отношение теплот:

$$Q_1 = I_R^2 R\tau = \frac{\mathcal{E}^2\tau}{R} = 6\frac{L}{R^2}\mathcal{E}^2, \quad Q_2 = \frac{LI_L^2(\tau)}{2} = \frac{\mathcal{E}^2\tau^2}{2L} = 18\frac{\mathcal{E}^2 L}{R} \Rightarrow Q_2/Q_1 = 3$$

Ответ: $Q_2/Q_1 = 3$.

Задача №14* В схеме на рисунке в начальный момент времени ключ K разомкнут. Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r. Какой заряд протечёт через перемычку AB после замыкания ключа?



Решение: Поскольку AB обладает нулевым сопротивлением, то $\varphi_A = \varphi_B$ (точки одинакового потенциала). Запишем правила Кирхгофа для контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = 2RI_2 + 2rI_4 \\ I_1R = 2RI_2 \\ L\dfrac{dI_L}{dt} = 2rI_4 - I_Lr \\ I_1 = I_3 + I_4;\ I_L = I - I_4;\ I_4 = I_3 + I_2 \\ I_2 + I_1 = I \end{cases},$$

откуда получаем:

$$I_1 = 2I_2,\quad 3I_2 = I,\quad I_2 = I/3,\quad I_L + I_4 = I;\quad \mathcal{E} = \frac{2}{3}RI + 2rI - 2rI_L \Rightarrow I = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{E} + 2rI_L}{R + 3r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathcal{E} + 2rI_L}{R + 3r}\right) - I_L,\qquad L\frac{dI_L}{dt} = 3\frac{(\mathcal{E} + 2rI_L)}{R + 3r}r - 2rI_L - I_Lr \Rightarrow$$

$$L\frac{dI_L}{dt} = \frac{3r}{R + 3r}(\mathcal{E} - I_L(R + r)) \qquad (1)$$

Итак, мы получили дифференциальное уравнение для тока I_L, найдём $I_L(t) \Rightarrow$ положим

$U = \mathcal{E} - I_L(R + r) \Rightarrow \dfrac{dU}{U} = -\dfrac{3r(R + r)}{L(R + 3r)}dt = Adt$, здесь $A = \dfrac{3r(R + r)}{L(R + 3r)}$.

Проинтегрируем это выражение: $\displaystyle\int \frac{dU}{U} = -A\int dt \Rightarrow U = U_0e^{-At} \Rightarrow$

$$(2)\qquad I_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{R + r}(1 - e^{-At})$$

Рассмотрим теперь уравнение:

$L\dfrac{dI_L}{dt} = 2rI_4 - I_Lr$, так как $\begin{cases} I_1 = \dfrac{2}{3}I = I_3 + I_4 \\ I_4 = I - I_L \end{cases}$, то

$$I_4 = \frac{3}{2}(I_3 + I_L) - I_L \Rightarrow L\frac{dI_L}{dt} = 3(I_3 + I_L)r - 3I_L r \Rightarrow L\frac{dI_L}{dt} = 3rI_3$$

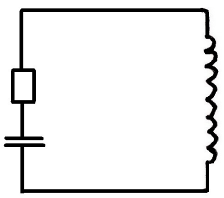
Найдём величину заряда, прошедшего через перемычку AB $\Rightarrow$ так как

$I_3 = \dfrac{dQ_{AB}}{dt} \Rightarrow L\dfrac{dI_L}{dt} = 3r\dfrac{dQ_{AB}}{dt} \Rightarrow dQ_{AB} = \dfrac{L}{3r}dI_L \Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty dQ_{AB} = \dfrac{L}{3r}\int_0^\infty dI_L \Rightarrow Q_{AB} = \dfrac{L}{3r}I_L(\infty)$, из (2) находим, что $\lim_{t\to\infty} I_L(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$.

Ответ: $Q_{AB} = \dfrac{L\mathcal{E}}{3r(R+r)}$.

Контуры, содержащие: C, R, L.

Задача №15* Катушка, содержащая несколько витков провода, резистор и конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ соединены последовательно и образуют замкнутую цепь. В некоторый момент времени включают внешнее магнитное поле, и поток магнитной индукции имеет вид: $\varPhi = at$, где $a = 10^{-2}$ Вб/сек. Какой по величине заряд Q установится на пластинах конденсатора спустя достаточно длительное время после начала процесса? Индуктивностью катушки пренебречь.



Решение: Вследствие изменения магнитного потока в катушке возникнет индукционный ток:

$$\mathcal{E}_{\textit{внешнее}} - \mathcal{E}_{\textit{соб}} = I_{\textit{инд}}R + U_c$$

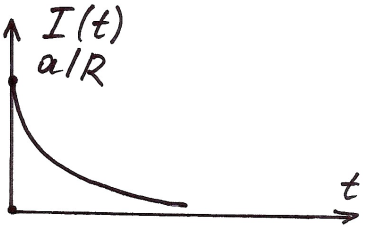
Поскольку по условию можно считать $L = 0$, то

$\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\textit{внешнее}} = IR + U_c$, $\mathcal{E}_{\textit{внешнее}} = \frac{\triangle\varPhi}{\triangle t} = \dot{\varPhi} = a$=const, откуда $a = I(t)R + Q(t)/C$.

Пусть $\begin{cases} U = a - Q/C \\ U = IR \end{cases}$, где U — напряжение на резисторе, рассмотрим уравнение:

$U = a - Q/C$ (продифференцируем его по времени), получим: $\dot{U} = -\dot{Q}/C$, с другой стороны $\dot{Q} = U/R$ из второго уравнения, получаем: $U = -\dot{U}CR \Rightarrow$ после интегрирования $U = U_0 e^{-t/CR}$, где $U_0 = a$, так как в $t = 0$ заряд на конденсаторе нуль, в итоге имеем:

$$I(t) = \frac{a}{R}e^{-t/CR}$$



Следовательно, при $t \to \infty$ выражение $a = I(t)R + Q(t)/C$ примет вид $a = Q/C$, так как $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, тогда

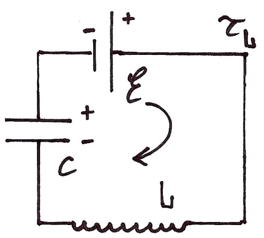
$Q = aC = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}$ Кл$=10^{-3}$ мкКл.

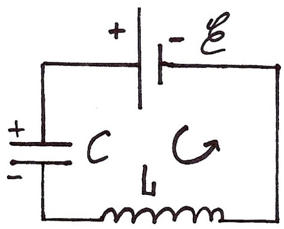
Ответ: $Q = aC = 10^{-3}$ мкКл.

Задача №16* Батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ подключают к последовательно соединённым катушке с индуктивностью L и незаряженному конденсатору ёмкостью C. В контуре происходят колебания тока. В тот момент, когда ток в контуре становится равным нулю, батарею отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами её выводы. Чему будет равен после этого максимальный ток в контуре?

Решение:

1-ый способ.





Источник вынимают тогда, когда $I = 0$, следовательно, $A_{внеш} = \triangle W_{системы} = Q^2/2C$ (изменение энергии конденсатора).

$$A_{внеш} = Q\mathcal{E} \Rightarrow Q = 2\mathcal{E}C \text{ — заряд на конденсаторе.}$$

После схема выглядит так, как показано на рисунке. Выберем новый обход контура:

$$\mathcal{E} + Q/C = L\frac{dI}{dt},$$

если I — максимален, то $\dot{I} = 0 \Rightarrow Q = -\mathcal{E}C$ и энергия системы равна:

$$\frac{\mathcal{E}^2 C}{2} + \frac{LI_{max}^2}{2} = W_{сис},$$

заряд прошедший через батарею ЭДС равен:

$$\triangle q = 2\mathcal{E}C - (-\mathcal{E}C) = 3\mathcal{E}C$$

Запишем теперь ЭДС:

$$3\mathcal{E}^2C = \frac{\mathcal{E}^2C}{2} + \frac{LI_{max}^2}{2} - \frac{4\mathcal{E}^2C}{2} \Rightarrow I_{max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

<u>2-ой способ.</u>

Первоначально: $\mathcal{E} = Q/C + L\dfrac{dI}{dt}$, сделаем замену $\begin{cases} U = \mathcal{E} - Q/C \\ U = L\dot{I} \end{cases}$ и продифференцируем 1-ое уравнение дважды, получим:

$$\ddot{U} + \frac{1}{CL}U = 0 \text{ — получили уравнение колебаний, его решение:}$$

$$U = U_0 \cos\omega t, \text{ где } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

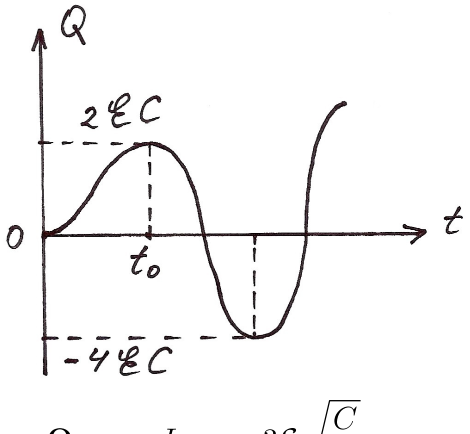
следовательно, $Q(t) = \mathcal{E}C(1 - \cos\omega t)$ и $I(t) = \dot{Q}(t) = \mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin\omega t$.

Теперь, вынимают батарею ЭДС, когда $\omega t = \pi \Rightarrow Q = \mathcal{E}C(1 - \cos\pi) = 2\mathcal{E}C$ и переставляют её $\Rightarrow \mathcal{E} = Q_1/C + L\dfrac{dI}{dt}$, после перестановки будем иметь:

$$\mathcal{E} = -Q_2/C + L\frac{dI}{dt}$$

Соединим эти моменты по времени в один момент: $Q_2(t_0) = -Q_1(t_0)$, тогда после решения уравнения (2) получим $Q(2) = \mathcal{E}C(3\cos\omega t - 1)$, в итоге:

$$Q(t) = \begin{cases} \mathcal{E}C(1 - \cos\omega t), \text{ где } \quad t \in [0; t_0] \\ \mathcal{E}C(3\cos\omega t - 1), \text{ где } \quad t \in [t_0; \infty] \end{cases}$$



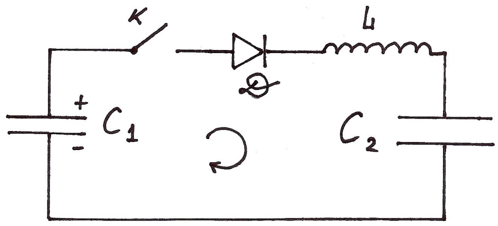
Из $\dot{Q}(t) = -3\mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin\omega t$, $t \geq t_0$ находим, что

$I_{max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

Ответ: $I_{max} = 3\mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

<u>Задача №17</u> Конденсатор емкостью C_1=1 мкФ заряжен до разности потенциалов U_0= 300 В. К нему через диод и катушку с индуктивностью L подключают незаряженный конденсатор емкостью

C_2=2 мкФ. До какой разности потенциалов он зарядится после замыкания ключа K? Сопротивление диода в прямом направлении можно считать равным нулю, а в обратном — бесконечно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.



Решение: Так как L — велика, то сила тока в цепи возрастает очень медленно, то есть нет потерь на излучение, следовательно, выполняется закон сохранения энергии и закон сохранения заряда:

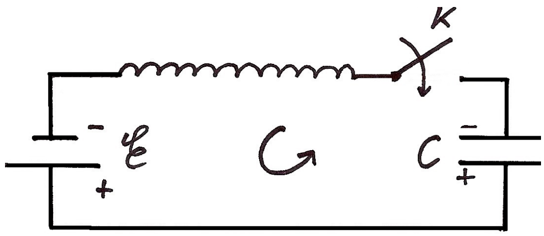
$$\begin{cases} \dfrac{C_1U_0^2}{2} = \dfrac{Q_1'^2}{2C_1} + \dfrac{Q_2^2}{2C_2}, \text{ где } Q_1 = C_1U_0 \text{ — заряд на конденсаторе с } C_1 \text{ до замыкания ключа,} \\ C_1U_0 = Q_1' + Q_2 \end{cases}$$

Q_1' — после, Q_2 — заряд на конденсаторе с C_2 после замыкания. Решаем эту систему и получаем:

$$U_2 = \frac{2C_1U_0}{C_1+C_2} = 200 \text{ В}$$

Ответ: $U_2 = \dfrac{2C_1U_0}{C_1+C_2} = 200$ В.

Задача №18 Цепь на рисунке состоит из конденсатора, катушки, источника ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K. В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью как показано на рисунке. Какого максимального значения может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа?



Решение: Выберем обход контура $\mathcal{E} = U + L\dfrac{dI}{dt}$, сделаем замену:

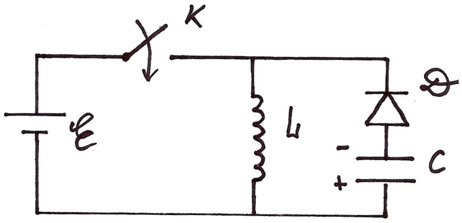
$$\begin{cases} \varphi = \mathcal{E} - U \\ \varphi = L\dot{I} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{1}{CL}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega t, \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \text{ откуда получим, что}$$

$\mathcal{E} - Q/C = \varphi_0 \cos\omega t$, при $t=0$, $\varphi_0 = \mathcal{E} - U_0 \Rightarrow U_c(t) = \mathcal{E} + (U_0 - \mathcal{E})\cos\omega t$, если U_c — max, то $U_{c_{max}} = 2\mathcal{E} - U_0$ или $U_{c_{max}} = U_0$.

Ответ: $U_{c_{max}} = 2\mathcal{E} - U_0$ или $U_{c_{max}} = U_0$.

Задача №19 Колебательный контур состоящий из катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и идеального диода D, через ключ K на время τ подключают к источнику с постоянной

ЭДС $\mathcal{E}$, а затем отключают. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа.



Решение: Ток будет идти только через L, следовательно, $\mathcal{E} = L\dfrac{dI_L}{dt} = \dfrac{LI_L}{\tau} \Rightarrow I_L(\tau) = \dfrac{\mathcal{E}\tau}{L}$. Тогда запасённая энергия равна: $W_L = \dfrac{\mathcal{E}^2\tau^2}{2L}$. После размыкания энергия магнитного поля перейдёт в энергию электрического поля: $\dfrac{\mathcal{E}^2\tau}{2L} = \dfrac{CU_{max}^2}{2} \Rightarrow U_{max} = \dfrac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{CL}}$, в итоге будем иметь:

$$U_c(t) = \begin{cases} 0, \text{ где } 0 \le t \le \tau \\ \dfrac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{CL}} \sin(t/\sqrt{CL}), \text{ где } \tau \le t \le \dfrac{\pi}{2}\sqrt{CL} \\ \dfrac{\mathcal{E}\tau}{\sqrt{CL}}, \text{ где } t \ge \dfrac{\pi}{2}\sqrt{CL} \end{cases}$$

Ответ: смотри решение.

Параметрические колебания.

При изучении незатухающих колебаний важное место занимают параметрические колебания. В повседневной жизни мы сталкиваемся с незатухающими колебаниями, для поддержания которых требуется периодически менять какой-либо параметр колебательной системы. Одним из ярких примеров являются колебания качелей. Хорошо известно, что можно поддерживать колебания длительное время, если быстро приседать в момент наибольшего отклонения качелей от положения равновесия и также быстро вставать при прохождении положения равновесия.

Описание параметрических колебаний обычно проводится на качественном уровне, поскольку количественный анализ требует решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что достаточно сложно, однако существуют и более простые подходы на основе закона сохранения энергии, которые применимы и к электрическим цепям, это будет показано на примерах ниже.

Качели.

С детства всем нам хорошо знакома такая старинная забава как качели. Тренировкам на этом снаряде придает большое значение даже летчики и космонавты. Когда малыша, сидящего на качелях, раскачивает кто-то из старших, стоящий рядом, то такой механизм разгона и поддержания колебаний нами подробно изучен — это вынужденные колебания под действием внешней периодической силы. Но на качелях можно раскачиваться самостоятельно, сидя или стоя на них. Процедура раскачки в этом случае заключается, в том, что человек, стоящий на качелях, периодически, в нужные моменты приседает и встает. При этом периодически изменяются параметры самой колебательной системы (момент инерции, расстояние от точки подвеса до центра масс), поэтому такие незатухающие колебания называются параметрическими.

Простейшим уравнением, описывающим такие эти колебания, может быть знакомое всем уравнение гармонических колебаний, в котором параметр ω^2 является периодической функцией времени:

$$(1) \quad a_x = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Зависимость параметра от времени может быть, например, представлена в виде:

$$(2) \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos \omega t),$$

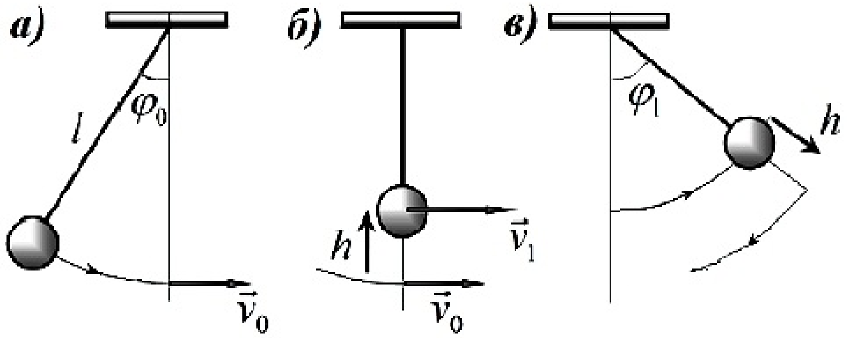
где постоянная ω_0^2 — собственная частота колебаний при неизменных средних значениях параметров системы (например, частота свободных колебаний качелей при неподвижно стоящем на них человеке), а второе слагаемое описывает периодическое изменение параметров системы.

Не смотря на внешнюю простоту этого уравнения, его анализ и решение очень сложны (это уравнение широко известно, оно даже носит название уравнения Матье. К сожалению, оно не имеет аналитического решения, выражаемого через элементарные функции, поэтому его решают либо приближенными методами, либо численно, с помощью компьютера), поэтому мы рассмотрим параметрические колебания качелей с энергетической точки зрения.

Когда человек приседает и встает он совершает работу, поэтому в принципе, может увеличивать амплитуду колебаний и компенсировать неизбежные потери механической энергии на трение и сопротивление воздуха. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае источник энергии находится «внутри» самой колебательной энергии, причем этот источник должен расходовать энергию «сознательно», включаясь и выключаясь в нужные моменты времени. Обратим также внимание, на то обстоятельство, что рассматриваемая система не является замкнутой — раскачиваться на незакрепленных качелях, по меньшей мере, затруднительно. Наконец, движение человека относительно качелей должно быть периодическим, то есть время от времени, он должен возвращаться в исходное положение (сколько раз присел, столько раз встал).

Используем эти общие соображения для описания раскачки качелей. Предельно упростим ситуацию — будем считать человека материальной точкой, расстояние от которой до оси вращения может изменяться в некоторых небольших пределах «сознательно», то есть в нужные моменты времени. Для того, чтобы максимально увеличить механическую энергию колебаний, человек должен вставать, когда для этого требуется приложить максимальное усилие, так как при этом будет совершена максимальная работа. Очевидно, что это условие достигается, когда качели проходят нижнюю точку. Если человек будет приседать в другом месте, то потери механической энергии при этом будут меньше, чем работа, совершенная при вставании в нижней точке. Таким образом, имеется возможность поддерживать незатухающие колебания.

Итак, пусть начальный угол отклонения качелей равен φ_0 и при этом максимальном отклонении центр масс находится на максимальном удалении l от точки подвеса O, см. рис.а).



Когда качели опустятся под действием силы тяжести в нижнее положение, рассматриваемая материальная точка приобретет скорость v_o, которую можно найти на основании закона сохранения энергии:

$$(3) \quad \frac{mv_0^2}{2} = mgl(1 - \cos\varphi_0),$$

из которого следует:

$$(4) \quad v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)}$$

Далее пусть в момент прохождения нижней точки центр масс очень быстро поднимается на малую высоту h рис.б), при этом его скорость возрастет до некоторой величины v_1. Проще всего найти эту скорость на основании закона сохранения момента импульса:

$$mv_0 l = mv_1(l - h) \qquad (5)$$

из этого уравнения находим:

$$(6) \quad v_1 = v_0\frac{l}{l-h} \approx v_0\left(1 + \frac{h}{l}\right)$$

на последнем шаге мы использовали приближенную формулу, считая, что высота подъема h значительно меньше длины качелей l.

Этот же результат можно получить и на основании рассмотрения энергетического баланса. Так в нижней точке сила давления человека на качели равна (эта формула непосредственно следует из уравнения второго закона Ньютона):

$$(7) \quad F = \frac{mv_0^2}{l} + mg$$

Чтобы приподнять тело, к нему следует приложить такую же по модулю силу, направленную вверх. Следовательно, при этом необходимо совершить работу $\delta A \approx Fh$ (это выражение является приближенным, так как, строго говоря, эта сила незначительно должна изменять при вставании). Эта работа идет на увеличение кинетической и потенциальной энергии тела:

$$(8) \qquad Fh \approx (\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}) + mgh$$

Это уравнение позволяет найти выражение для скорости:

$$(9) \qquad v_1 = v_0\sqrt{1 + 2\frac{h}{l}} \approx v_0(1 + h/l),$$

которое совпадает с выражением (6), полученным на основании закона сохранения импульса. Отличия в малых величинах порядка $\left(\frac{h}{l}\right)^2$ обусловлены приближенным выражением для совершенной работы.

Можете быть уверены, что при точном расчете работы (с учетом изменения силы при изменении расстояния до точки подвеса) эти два подхода дают полностью совпадающие результаты, совпадающие с формулой (6).

Интересен вопрос — а какая горизонтальная сила, действующая на тело, увеличивает его скорость?

Отвечаем — чтобы вставать строго вертикально человек должен действовать с некоторой горизонтальной силой на качели, их ответная реакция и приводит к появлению ускорения тела в горизонтальном направлении (если рассматривать движение тела во вращающейся неинерциальной системе отсчета, то эта сила называется силой Кориолиса, это та же сила, что подмывает берега рек из-за вращения Земли).

Теперь с помощью закона сохранения энергии:

$$(10) \qquad mg(l-h)(1-\cos\varphi_1) = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{l}{l-h}\right) = mgl(1-\cos\varphi_0)\left(\frac{l}{l-h}\right),$$

можно найти максимальный угол отклонения качелей φ_1 в противоположном направлении рис. в), который удовлетворяет условию:

$$(11) \qquad (1-\cos\varphi_1) = (1-\cos\varphi_0)\left(\frac{l}{l-h}\right)^2$$

Ясно, что этот угол больше начального. Далее в верхней точке человек должен быстро присесть, что бы опять подняться в нижней точке. Если человек будет приседать в верхней точке, где скорость качелей равна нулю, то на основании закона сохранения импульса (также как и на основании энергетического баланса) потерь энергии колебаний не произойдет! Если же приседать в другой точке траектории, то скорость колебаний уменьшится, что и является причиной потерь механической энергии. Таким образом, за половину периода колебаний угол отклонения качелей увеличился, и при этом тело вернулось в исходное нижнее положение относительно качелей. Оценим также изменение высоты подъема за этот промежуток времени:

$$(12) \qquad \triangle h = l(1-\cos\varphi_1) - l(1-\cos\varphi_0) = l\left(\left(\frac{l}{l-h}\right)^3 - 1\right) \approx 3l\frac{h}{l} = 3h$$

Легко показать, что соответствующее увеличение потенциальной энергии равно работе, совершенной при вставании.

В проведенном расчете мы пренебрегли силами трения в оси вращения качелей и сопротивлением воздуха. Понятно, что в установившемся режиме, рассмотренный механизм «подкачки» энергии (совершение работы при вставании) восполняет потери механической энергии.

Можно подвести некоторые итоги. Мы показали, что периодическое изменение параметров системы может приводить к возникновению и поддержанию незатухающих параметрических колебаний в колебательных системах с трением и другими силами сопротивления. При этом потери механической энергии компенсируются работой сил, изменяющих параметры системы. На примере рассмотренного движения качелей видно, что их максимальное раскачка достигается в том случае, когда частота изменения параметра в два раза превышает собственную частоту колебаний системы — за один период нужно дважды приседать и дважды вставать.

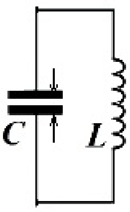
Это правило является общим и для других систем, в которых совершаются параметрические колебания. Такое возрастание амплитуды колебаний называется *параметрическим резонансом.* Главное его отличие от резонанса при вынужденных колебаниях заключается в том, что он наступает в том случае, когда частота изменения параметров системы в два раза превышает собственную частоту колебаний.

В отличие от вынужденных колебаний, параметрические не являются само возбуждающимися — необходимо некоторое начальное отклонение системы от положения равновесия, что начался процесс параметрических колебаний. Посмотрите на проведенные выкладки для описания колебаний качелей, при отсутствии начального угла отклонения — появление колебаний невозможно.

В заключение данного раздела подчеркнем, что параметрические колебания возможны и в других колебательных системах, электрических, оптических и т.д.

Рассмотрим в качестве примера электромеханическую систему, в которой ясно иллюстрированы параметрические колебания и резонанс.

Пусть у нас есть колебательный контур, в котором емкость конденсатора периодически меняется со временем. Будем считать, что конденсатор плоский и что расстояние d между пластинами меняется синусоидально: $d = d_0(1 + k\cos\omega t)$. Емкость равна: $C = S/2\pi d$, где S — площадь пластин.



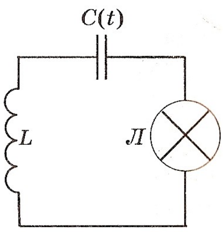
Будем теперь менять ёмкость конденсатора скачками. Пусть в некоторый начальный момент имеется маленький заряд $q = q_0$, а тока нет ($\dot{q} = 0$). Раздвинем в этот момент пластины конденсаторы. Мы затрачиваем на это некоторую работу. Через $1/4$ периода заряд обращается в нуль, и в этот момент мы сводим пластины до прежнего расстояния. При этом никакой работы не совершается. Через $1/2$ периода после начала опять имеется заряд, и мы снова разводим пластины, совершая работу; через $3/4$ периода мы опять сводим их и т.д.

Затраченная нами работа должна увеличить запас электромагнитной энергии в контуре. Отсюда видно, что если раздвигать и сдвигать пластины с периодом, вдвое меньшим, чем средний собственный период контура (то есть с частотой в двое большей, чем частота собственных колебаний контура), то непременно наступает раскачка.

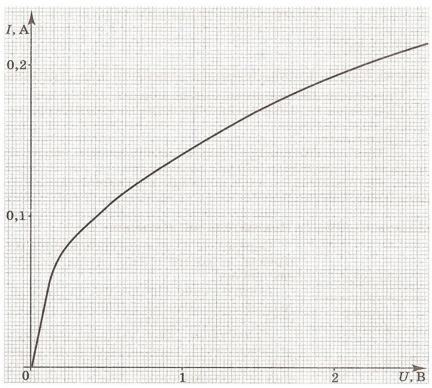
Стоит однако отметить, что это частный случай, его трудно вполне осуществить на практике, но здесь уже ясно, как и почему происходит раскачивание.

Примеры.

Задача №20* В схеме, изображённой на рисунке ёмкость C конденсатора периодически изменяют путём механического перемещения пластин. Допустим, что вследствие некоторого возмущения в схеме возникли малые колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе порядка нескольких милливольт.



В момент времени, когда напряжение на конденсаторе максимально, его емкость скачкообразно уменьшают на долю $\varepsilon = \mid C \mid / C$. Через четверть периода $\pi\sqrt{LC}/2$ ёмкость скачкообразно увеличивают до прежнего значения, ещё через четверть периода ёмкость вновь скачкообразно уменьшают на долю ε и так далее. При определённых условиях в схеме могут возбуждаться незатухающие электрические колебания.



В схему включён нелинейный элемент (лампочка накаливания Л), вольт-амперная характеристика которой представлена на рисунке.

Определите минимальное значение ε_{min}, при котором в схеме возбуждаются незатухающие колебания, если $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф.

Определите амплитуду установившихся колебаний напряжения на лампочке, если $\varepsilon = 3$ %.

Решение: За период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ внешние силы 2 раза совершают положительную работу по раздвижению пластин конденсатора в моменты максимального значения напряжения U_{max}. Эта работа затрачивается на увеличение энергии конденсатора:

$$A = \triangle W = 2\triangle\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{C^2}\triangle C = \varepsilon C U_{max}^2$$

Здесь $q = CU_{max}$ — заряд конденсатора; $\triangle C < 0$ — изменение емкости конденсатора; $\varepsilon = -\triangle C/C$ — относительное изменение емкости (по модулю). При скачкообразном увеличении емкости до прежнего значения внешние силы работы не совершают, так как в эти моменты напряжение на конденсаторе равно нулю. При колебаниях силы тока в цепи часть энергии выделяется в виде джоулего тепла на лампочке, которая является инерционным нелинейным элементом. Она будет выполнять роль резистора, сопротивление которого при малых колебаниях определяться наклоном касательной к вольт-амперной характеристике в начале координат. Из приведённого графика следует, что сопротивление R_0= 2 Ом.

Таким образом, на лампочке за период колебаний T будет рассеиваться энергия:

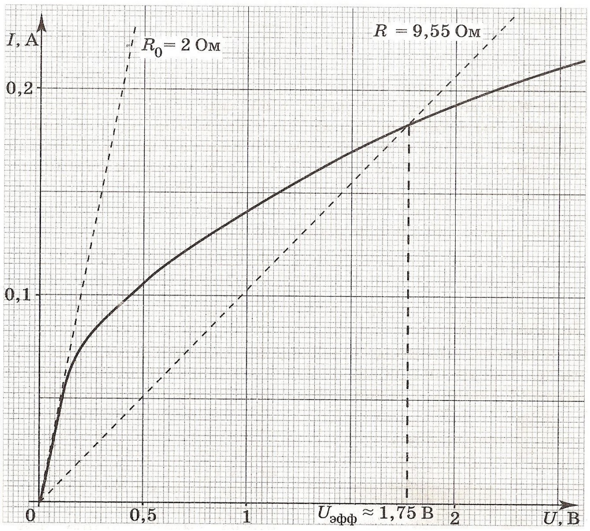
$$\triangle Q = \frac{R_0 I_{max}^2}{2} T = \frac{R_0 T}{2} \omega^2 C^2 U_{max}^2$$

Здесь $I_{max} = \omega C U_{max}$ — амплитуда колебаний силы тока на лампочке. Условие возбуждения незатухающих параметрических колебаний запишем в виде:

$$\triangle W \geq \triangle Q, \text{ или } \varepsilon C U_{max}^2 \geq \frac{R_0 T}{2} \omega^2 C^2 U_{max}^2$$

Учитывая, что период $T = 2\pi\sqrt{LC}$, получаем для доли $\varepsilon_{min} \Rightarrow \varepsilon_{min} = \frac{R_0 T}{2}\omega^2 C = \frac{R_0}{2} 2\pi\sqrt{LC}\frac{1}{LC} C = \pi R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$. Подставляем числовые значения, получаем: $\varepsilon_{min} = 6,3 \cdot 10^{-3} = 0,63$ %

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,3 \cdot 10^{-4}$ с. Температура нити лампочки за период не успевает измениться, поэтому лампочка выполняет роль резистора. Как следует из предыдущих выкладок, в установившемся режиме при ε =3 процента её сопротивление $R = (\varepsilon/\pi)\sqrt{L/C}$=9,55 Ом.



Проведём на воль-амперной характеристике прямую, соответствующую этому значению сопротивление.

Проведём на вольт-амперной характеристике прямую, соответствующую этому значению сопротивления.

По точке пересечения прямой с вольт-амперной характеристикой лампочки определяем эффективное напряжение на лампочке: $U_{эфф}$ =1,75 В.

Следовательно, $U = \sqrt{2} U_{эфф} \approx 2,5$ В.

Ответ: $\varepsilon_{min} = 6,3 \cdot 10^{-3} = 0,63$ %, $U = \sqrt{2} U_{эфф} \approx 2,5$ В.

Замечание В задачах 2-3 контур содержит резистор сопротивлением R, конденсатор и катушку индуктивности. Для поддержания незатухающих колебаний необходимо в течение каждого периода обеспечить положительное приращение энергии электромагнитного поля в результате работы, совершаемой внешней силой.

Задача №21* В контуре возбуждены слабозатухающие электромагнитные колебания $q(t) \approx q_0 \cos(\omega_0 t)$, $q_0 = I_0/\omega_0$. В результате действия внешней силы расстояние между пластинами конденсатора зависит от времени следующим образом:
$d(t) = d_0 + x(t), x(t) = x_0 \sin \omega_0 t$, где $h \ll d_0$. Найдите условие генерации незатухающих электромагнитных колебаний и оцените среднее значение суммы мощностей внешней силы и тепловых потерь $P(t)$.

Решение:

Так как $d = d(t)$, то $C(t) = \varepsilon_0 S/d(t)$. Умножим это выражение на $I = \frac{dq}{dt}$, и учтём соотношение:

$$\frac{d}{dt}\frac{q^2}{2C} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{q^2}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{C},$$

тогда получим уравнение:

$$(1) \qquad dU_m/dt = P(t),\ P(t) \approx \frac{q^2}{2d_0C_0}h\omega\cos\omega t - I^2R, \text{ где } C_0 = \varepsilon_0 S/d_0$$

Предположим, что в первом приближении сопротивлением резистора и изменением емкости можно пренебречь. В этом случае $q(t) \approx q_0\cos\omega t, \omega_0 = (1/LC_0)^{1/2}$. Подставляя $q(t)$ в (1), получим:

$$(2) \qquad P(t) = \frac{q_0^2 h\omega}{2d_0C_0}\cos^2\omega t - (\omega_0 q_0)^2 R\sin^2\omega_0 t$$

Поскольку $\cos^2\omega_0 t\cos\omega t = (1/2)\cos\omega t + (1/4)[\cos(2\omega_0-\omega)t + \sin(2\omega_0+\omega)t]$, то основной вклад в среднее значение $P(t)$ возникает при частоте $\omega = 2\omega_0$. Поэтому из (2) следует:

$$(3) \qquad \overline{P(t)} = \frac{q_0^2 h\omega_0}{4d_0C_0} - \frac{1}{2}(\omega_0 q_0)^2 R$$

Вводя добротность контура $Q = (\omega_0 C_0 R)^{-1}$, запишем (3) в виде:

$$\overline{P(t)} = \frac{I_0^2 R}{2}\left(\frac{Qh}{2d_0} - 1\right), \text{ где } I_0 = q_0\omega_0$$

Следовательно, при условии $Q > 2d_0/h$ или $R < (h/2d_0)(L/C_0)^{1/2}$ величина энергии в контуре и амплитуда электромагнитных колебаний возрастают. Получаем параметрический резонанс, так как периодически с частотой $\omega = 2\omega_0$, изменяется собственный параметр конденсатора — расстояние между пластинами.

Ответ: $Q > 2d_0/h$, $\overline{P(t)} = \dfrac{I_0^2R}{2}\left(\dfrac{Qh}{2d_0} - 1\right)$, где $I_0 = q_0\omega_0$ и $Q = (\omega_0C_0R)^{-1}$.

Задача №22* В контуре, содержащем резистор, возбуждены слабозатухающие электромагнитные колебания

$I(t) \approx I_0\cos\omega_0 t$. В результате внешних процессов индуктивность катушки $L(t) = L_0 + \triangle L, \triangle L = -L_1\sin\omega_0 t$. Найдите условие генерации незатухающих электромагнитных колебаний и оцените среднее значение суммы мощностей внешней силы и тепловых потерь $P(t)$.

Решение:

Запишем закон Ома:

$$(1) \qquad \frac{dL(t)}{dt}I + IR + q/C = 0$$

Умножим (1) на I. Тогда, учитывая соотношение:

$$I \cdot \frac{d(LI)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(LI^2)}{dt} + \frac{dL}{dt} \cdot \frac{I^2}{2},$$

получим уравнение:

$$dU_m/dt = P(t), \text{ где } P(t) = -(I^2/2)dL/dt - I^2R \quad (2)$$

Предположим, что в первом приближении сопротивлением резистора и изменением индуктивности можно пренебречь. В этом случае $I(t) \approx I_0 \cos\omega_0 t = (1/L_0C)^{1/2}$.

Подставляя $I(t)$ в (2), получим:

$$P(t) = \frac{L_1 \omega I_0^2}{2} \cos^2\omega_0 t \cos\omega t - I_0^2 R \cos^2\omega_0 t$$

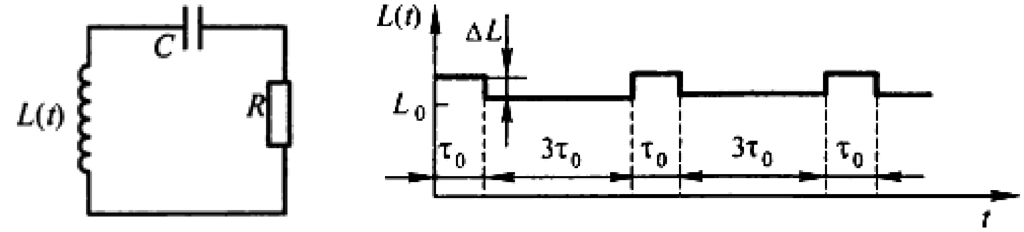
Поскольку $\cos^2\omega_0 t \cos\omega t = (1/2)\cos\omega t[1 + \cos 2\omega_0 t]$, то основной вклад в среднее значение $P(t)$ возникает при частоте $\omega = 2\omega_0$. Поэтому из (3) следует:

$$\overline{P(t)} = \frac{L_1 \omega_0 I_0^2}{2} - \frac{1}{2} I_0^2 R$$

Вводя добротность контура $Q = (\omega_0 L_0/R)$, запишем (4) в виде $\overline{P(t)} = \frac{1}{2} I_0^2 R \left(\frac{QL_1}{2L_0} - 1 \right)$. Следовательно, при условии $Q > 2L_0/L_1$ величина энергии в конденсаторе и амплитуда электромагнитных колебаний возрастают.

Ответ: $\overline{P(t)} = \frac{1}{2} I_0^2 R \left(\frac{QL_1}{2L_0} - 1 \right)$

Задача №23* Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рисунке.



Найдите, при каком значении емкости колебательного контура возможен параметрический резонанс, а также при каком максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний.

Решение:

Для резонанса необходимо, чтобы период вынуждающей силы $4\tau_0$ совпал с периодом собственных колебаний:

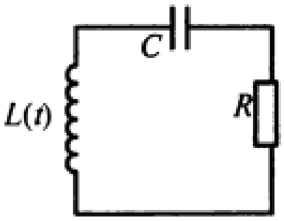
$$4\tau_0 = T = 2\pi\sqrt{LC_0}, \text{ откуда } C = \frac{4\tau^2}{\pi^2 L_0}$$

Предположим, что изменение индуктивности происходит за счет изменения длины катушки. При растягивании производится работа, так как витки в катушке притягиваются друг к другу (как параллельные провода). Колебания поддерживаются благодаря этой работе, которая равна изменению энергии магнитного поля в катушке и равна потерям на сопротивлении $(L+\triangle L)\dfrac{I^2}{2}-L\dfrac{I^2}{2}=\dfrac{1}{2}I^2R4\tau_0$, откуда $R_{max}=\dfrac{\triangle L}{4\tau_0}$.

Ответ: $C=\dfrac{4\tau^2}{\pi^2L_0}$, $R_{max}=\dfrac{\triangle L}{4\tau_0}$.

Задача №24* Для поддержания незатухаюших колебаний в RCL — контуре емкость конденсатора быстро меняется на величину $\triangle C$ каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время τ возвращается в исходное состояние. Найдите величину и знак $\triangle C$.

Решение:



Когда напряжение на конденсаторе равно нулю, ток в индуктивности максимален I_{max} и мало меняется. Если время τ мало по сравнению с $q=I_{max}\tau$ характерным временем изменения тока, то на конденсатор придёт заряд $q=I_{max}\tau$.

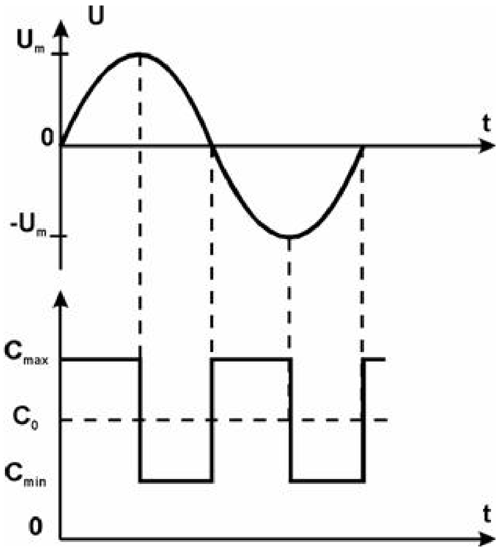
Изменение энергии электрического поля в нем связано с изменением емкости от C_1, до C_2, которое должно восполнить потери на сопротивлении за половину периода колебаний:

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2}-\frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}=I_{max}^2\tau^2\frac{C_1-C_2}{2C^2}>\frac{1}{2}I_{max}^2R\frac{T}{2}$$

Отсюда $C_1-C_2>RC^2\dfrac{T}{\tau}$, т. е. емкость надо уменьшить, для чего раздвинуть пластины, при этом совершив работу, так как заряженные пластины притягиваются.

Ответ: $\triangle C=C_1-C_2>RC^2\dfrac{T}{\tau}$.

Задача №25* Рассмотреть в качестве задачи явления, происходящие в колебательном контуре с параметрическим конденсатором при воздействии на конденсатор напряжения накачки в виде прямоугольных импульсов с частотой следования, равной удвоенной частоте собственных колебаний контура. Допустим, что между частотой собственных колебаний и изменением емкости С существует жесткая синхронизация: в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает экстремума, емкость скачком уменьшается: в моменты времени, когда напряжение становится равным нулю, емкость скачком увеличивается на ту же величину (см. рис.).



Решение:

Энергия, запасенная конденсатором, равна $E = q^2/2C$. При малом приращении емкости $\triangle C \ll C_0$ приращение энергии:

$$(1) \qquad \triangle E \approx -\frac{q^2}{2C_0^2}\triangle C = -E_{max}\frac{\triangle C}{C_0} \text{ (линейно зависит от приращения емкости)}$$

Максимальная энергия, запасенная параметрическим конденсатором, равна:

$$E_{max} = \frac{1}{2}U_m^2 C_{max} = \frac{1}{2}U_m^2\Big(C_0 + \triangle C/2\Big) \approx \frac{1}{2}U_m^2 C_0$$

Из графиков и формулы (1) следует, что за период собственных колебаний контур дважды получает дополнительную энергию от источника накачки в моменты экстремальных значений напряжения на конденсаторе. Обозначим эту дополнительную энергию накачки $E_{нк}$, и, в соответствии с формулой (1), запишем:

$$(2) \qquad E_{нк} = 2\triangle E = 2E_{max}\frac{\triangle C}{C_0} \approx U_m^2\triangle C$$

Как известно, эквивалентное сопротивление контура при резонансе активно и для параллельного контура равно

$R_{экв} = \rho Q$, где Q — добротность, а $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление контура (см. резонанс напряжений и токов).

Энергия, рассматриваемая в контуре за период собственных колебаний, равна:

$$(3) \qquad E_{рас} = T\frac{U_m^2}{2R_{экв}} = \frac{U_m^2 T}{2\rho Q}$$

Сравнивая рассеиваемую энергию (3) с накачиваемой в контур (2), можно заключить, что в контуре колебания либо не возникают, либо они нарастают неограниченно.

Первое происходит, если $E_{рас} > E_{нк}$; второе — если $E_{PACC} < E_{HK}$. Другими словами, колебания нарастают, если коэффициент модуляции емкости больше некоторого критического значения. Из (2) и (3) также следует, что для возникновения параметрического резонанса необходимо, чтобы выполнить условие:

$$\triangle C/C_0 \geq T/(2\rho Q C_0)$$

Подставив сюда $\rho = \sqrt{L/C_0}$ и $T = 2\pi\sqrt{LC_0}$, получим $\triangle C/C_0 \geq \pi Q$. Оно и определяет критическое значение $\triangle C$.

Поясним полученный результат. Каждый раз, когда емкость уменьшается, конденсатор заряжен и энергия источника накачки затрачивается на увеличение электрической энергии контура. Каждый раз, когда емкость увеличивается, конденсатор разряжен и изменение емкости происходит без затрат полезной энергии.

Таким образом в цепях с реактивными параметрическими элементами энергия накачки может преобразовываться в энергию сигнала (сигнал, в самом общем смысле, это зависимость одной величины от другой, и с математической точки зрения представляет собой функцию. Наиболее распространенное представление сигналов — в электрической форме в виде зависимости напряжения от времени $U(t)$).

Ответ: смотри решение.

Упражнения.

1) Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L=0,2 Гн и конденсатора емкостью C= 10 мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения U_0=2 В и замкнули контур. Найдите силу тока I в контуре в тот момент, когда энергия колебаний распределилась поровну между электрическим и магнитным полями. Затуханием пренебречь.

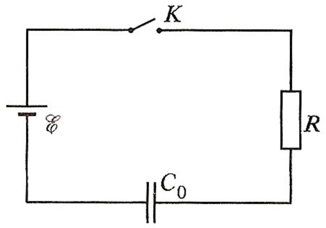
Ответ: $I = U_0\sqrt{\dfrac{C}{2L}} = 10^{-2}$ А.

2) Колебательный контур радиоприемника настроен на длину волны λ= 50 м при емкости входящего в него конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-10}$ Ф. Какова максимальная сила тока I_{max} контуре, если максимальное значение напряжения на конденсаторе $U_{max} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ В? Скорость распространения электромагнитных волн принять равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

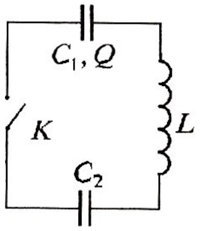
Ответ: $I_{max} = \dfrac{2\pi c C}{\lambda} U_{max} = 10,6 \cdot 10^{-9}$ А.

3) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять

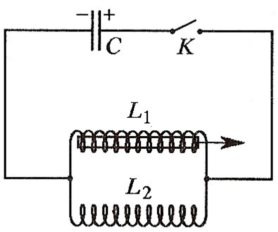
расстояние между пластинами конденсатора по закону $d(t) = d_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай быстрых изменений ёмкости, то есть когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathcal{E}, A, R$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



4) В цепи, изображённой на рисунке, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе с емкостью C_1 равен Q, а конденсатор с емкостью C_2 ($C_2 = 4C_1$) не заряжен. Определить максимальный ток в цепи после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке с индуктивностью L пренебречь.



5) В схеме конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения. После замыкания ключа K в схеме происходят свободные, практически незатухающие колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке с индуктивностью L_2 равно I_0. Когда ток в катушке с индуктивностью L_1 достигает максимального значение, из неё быстро (за время, малое по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению её индуктивности в μ раз. Найти ток через катушку L_2 сразу после замыкания ключа. Найти также максимальное напряжение на конденсаторе после выдвигания сердечника.



Литература

[1] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[2] С.М. Козел, В.П. Слободянин, Всероссийские олимпиады по физике,1992-2001.

[3] Д.В.Сивухин, том 3, электричество.

[4] Физика. Избранные задачи. Кн.2. Павленко Ю.Г, 2008 год.

[5] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[6] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[7] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[8] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[9] А. Ф. Склянкин, А.В. Зотеев, конкурсные задачи по физике на химическом факультете МГУ, квант, 2004 год.

[10] Г.Я. Мякишев, колебания и волны, физика 11 класс.