Московский физико-технический институт

Гидростатика.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Гидродинамика является основой многих прикладных наук, в том числе связанных с проектированием и эксплуатацией водного транспорта и гидротехнических сооружений. Законы гидродинамики человечество постигало в течение всей своей истории, совершенствуя обводы и движители кораблей, создавая водяные мельницы, портовые сооружения, каналы, шлюзы, водопроводные системы и пр. Крупнейшие учёные создавали науку о движении жидкостей. Леонардо да Винчи, Г. Галилей и И. Ньютон исследовали сопротивление воздуха и воды движению тел. Л. Эйлер вывел дифференциальные уравнения движения жидкости, создал основы теории корабля. Однако анализ уравнений гидродинамики оказался настолько сложным, что оказался возможным только на основе упрощений гипотез (например, несжимаемости, невязкости, сплошности и д.р.).

Развитие науки в этом направлении привело к появлению технической гидромеханики и её частных разделов: гидродинамики и теории корабля, аэродинамики, гидравлики и д.р. По мере развития гидродинамики её математические модели уточнялись, но при этом усложнялись, и их анализ стал невозможен без применения численных методов и компьютерных технологий. Так появилась вычислительная гидродинамика (CFD – Computer Fluid Dynamics).

Мы же с вами начнём изучение механических свойств жидкости с гидростатики — теории поведения неподвижной жидкости. Как и все материальные тела, жидкости подчиняются законам механики Ньютона, поэтому для объяснения различных свойств жидкостей мы будем последовательно применять эти законы.

Силы, с которыми действуют друг на друга отдельные участки сжатой жидкости или газа, подобны силам упругости в твердых телах. Если мысленно выделить в сжатой жидкости какой-либо объем, то со стороны остальной жидкости на него будут действовать силы упругости, зависящие от степени сжатия жидкости. В свою очередь выделенный объем действует на остальную жидкость (и на стенки сосуда).

Однако силы упругости в жидкости или газе возникают только при деформации сжатия, но не при сдвиге слоев друг относительно друга. Поэтому сила, действующая на поверхность любого элемента жидкости (или газа) со стороны остальной жидкости, а также на поверхность твердого тела, в статическом случае всегда нормальна (перпендикулярна) к поверхности (рис., а, б, в). Направленных по касательной к поверхности сил упругости нет.

а) б) в)

Физические свойства жидкостей.

Текучесть: основным свойством жидкостей является текучесть. Если к участку жидкости, находящейся в равновесии, приложить внешнюю силу, то возникает поток частиц жидкости в том направлении, в котором эта сила приложена: жидкость течёт. Таким образом, под действием неуравновешенных внешних сил жидкость не сохраняет форму и относительное расположение частей, и поэтому принимает форму сосуда, в котором находится.

В отличие от пластичных твёрдых тел, жидкость не имеет предела текучести: достаточно приложить сколь угодно малую внешнюю силу, чтобы жидкость потекла.

Сохранение объёма: одним из характерных свойств жидкости является то, что она имеет определённый объём (при неизменных внешних условиях). Жидкость чрезвычайно трудно сжать механически, поскольку, в отличие от газа, между молекулами очень мало свободного пространства. Давление, производимое на жидкость, заключенную в сосуд, передаётся без изменения в каждую точку объёма этой жидкости (закон Паскаля, справедлив также и для газов). Эта особенность, наряду с очень малой сжимаемостью, используется в гидравлических машинах.

Жидкости обычно увеличивают объём (расширяются) при нагревании и уменьшают объём (сжимаются) при охлаждении. Впрочем, встречаются и исключения, например, вода сжимается при нагревании, при нормальном давлении и температуре от 0 °C до приблизительно 4 °C.

Вязкость: кроме того, жидкости (как и газы) характеризуются вязкостью. Она определяется как способность оказывать сопротивление перемещению одной из частей относительно другой — то есть как внутреннее трение.

Когда соседние слои жидкости движутся относительно друг друга, неизбежно происходит столкновение молекул дополнительно к тому, которое обусловлено тепловым движением. Возникают силы, затормаживающие упорядоченное движение. При этом кинетическая энергия упорядоченного движения переходит в тепловую — энергию хаотического движения молекул.

Например жидкость в сосуде, приведённая в движение и предоставленная самой себе, постепенно остановится, но её температура повысится.

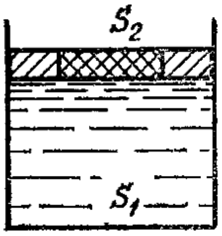
Давление.

Сила упругости внутри жидкости почти всегда сжимает выделенный объем (при соблюдении некоторых специальных условий жидкость может быть и растянутой) . Вследствие этого упругие напряжения в жидкостях и газах называют давлением. Если сила давления F равномерно распределена по поверхности площадью S, то давление P равно отношению модуля силы давления к площади поверхности:

$$P = \frac{F}{S} \qquad (1)$$

В СИ единицей давления является паскаль (Па).

Пример №1 В цилиндр сечения S налита несжимаемая жидкость, поверх которой помещен поршень. Внутри этого поршня имеется цилиндрическая вставка сечения S_2. Сила трения между поршнем и вставкой может достигать значения F; между поршнем и стенками цилиндра трения нет. С какой минимальной силой нужно надавить сверху на вставку, чтобы выдавить ее из поршня? Силой тяжести пренебречь.



Решение →

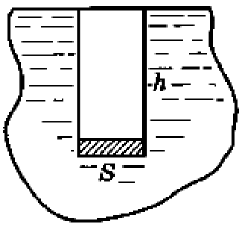
Пусть P — давление жидкости.

Тогда $F_x = F + PS_2$ и $F = P(S_1 - S_2)$, откуда $F_x = \dfrac{F}{1 - S_2/S_1}$.

Ответ: $F_x = \dfrac{F}{1 - S_2/S_1}$.

Гидростатическое давление.

Выделим мысленно вертикальный столб жидкости высотой h, основанием которого служит площадка площадью S (см. рис.)



Объем выделенного столба жидкости равен Sh. Сила, с которой столб жидкости действует на площадку (основание столба), представляет собой вес столба жидкости: $F = P$. Так как жидкость неподвижна, то вес столба жидкости равен действующей на него силе тяжести, следовательно:

$P = mg = \rho Shg$, где ρ — плотность жидкости. (2)

Давление, производимое столбом жидкости на его основание, равно: $F = \rho Shg$.

Итак, $P = \rho gh$. (3)

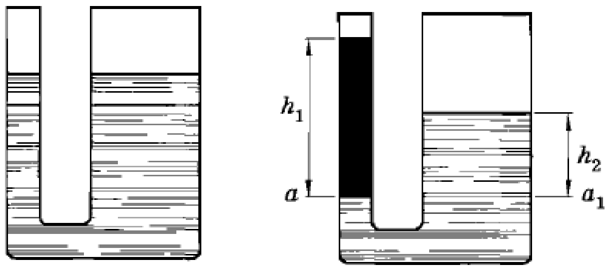
Давление, которое создает жидкость, находящаяся в равновесии при действии силы тяжести, называют гидростатическим. Гидростатическое давление определяется формулой (3).

Давление внутри жидкости на любой глубине h слагается из атмосферного давления P_0 (или внешнего давления) на жидкость и гидростатического давления ρgh:

$P = P_0 + \rho Sh$.

Сообщающиеся сосуды.

На рисунке а) изображены соединённые между собой сосуды, называющиеся сообщающимися.



а) б)

Однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается на одном уровне. Это легко объяснить, пользуясь формулой (3). В покоящейся однородной жидкости давление на любом уровне в обоих сообщающихся сосудах одинаково. Поэтому одинаковы и высоты столбов однородной жидкости над этими уровнями.

Если же в сообщающихся сосудах находятся разнородные жидкости, то при равновесии уровни этих жидкостей не будут одинаковыми (рис. б). Давление жидкостей на уровне aa_1 при равновесии одинаково: $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$, где ρ_1, ρ_2 — плотности жидкостей в сообщающихся сосудах.

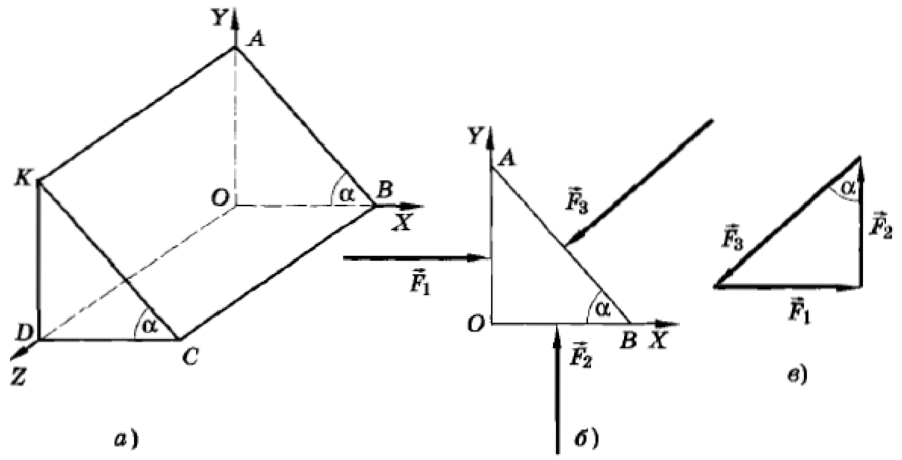
Отсюда $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$. (5)

То есть в сообщающихся сосудах высоты столбов жидкости над уровнем раздела жидкостей обратно пропорциональны плотности этих жидкостей.

Закон Паскаля, Гидростатический парадокс.

Мысленно представим себе, что внутри жидкости в данной ее точке расположена маленькая площадка. Жидкость производит давление на эту площадку. Существенно, что давление жидкости на эту маленькую площадку не зависит от ориентации площадки. Чтобы доказать справедливость данного утверждения, воспользуемся так называемым принципом отвердевания. Согласно этому принципу любой объем жидкости или газа в статическом случае, когда элементы жидкости друг относительно друга не смещаются, можно рассматривать как твердое тело и применить к этому объему условия равновесия твердого тела.

Выделим в жидкости небольшой объем в виде длинной треугольной призмы (рис. а), одна из граней которой (грань $OBCD$) расположена горизонтально. Площади оснований призмы будем считать малыми по сравнению с площадью боковых граней. Малым будет объем призмы, следовательно, и сила тяжести, действующая на эту призму. Этой силой можно пренебречь по сравнению с силами давления, действующими на границы призмы (площадь поверхности пропорциональна квадрату линейных размеров тела, а объём- кубу. Поэтому у призмы малых размеров силой тяжести, пропорциональной объему, всегда можно пренебречь по сравнению с силой давления, пропорциональной площади поверхности).



На рисунке б) изображено поперечное сечение призмы. На боковые грани призмы действуют силы $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$. Силы давления на основания призмы не учитываем, так как они уравновешены. Тогда согласно условию равновесия: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{0}$.

Векторы этих сил образуют треугольник, подобный треугольнику AOB, так как углы в этих двух треугольниках соответственно равны (рис. в). Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{F_1}{OA} = \dfrac{F_2}{OB} = \dfrac{F_3}{AB}$. Умножим знаменатели этих дробей соответственно на OD, BC и $KA(OD = BC = KA)$: $\dfrac{F_1}{OA \cdot OD} = \dfrac{F_2}{OB \cdot BC} = \dfrac{F_3}{AB \cdot KA}$.

Из рисунка а) видно, что знаменатель каждой дроби равен площади соответствующей боковой грани призмы. Обозначив площади этих граней призмы через S_1, S_2, S_3, получим: $\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2} = \dfrac{F_3}{S_3}$ или $P_1 = P_2 = P_3$.

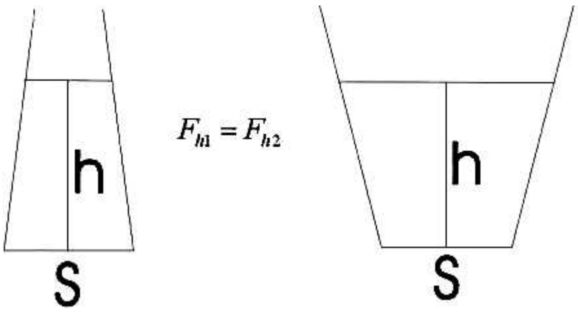
Итак, давление в неподвижной жидкости (или газе) не зависит от ориентации площадки внутри жидкости.

Согласно же формуле (3) давление одинаково во всех точках, лежащих на данном уровне. Это давление на нижележащие слои жидкости создается столбом жидкости высотой h. Поэтому можно заключить, что давление верхних слоев жидкости на слои жидкости, расположенные под ними, передается нижележащими слоями одинаково по всем направлениям.

Но давление на жидкость можно произвести внешними силами, например с помощью поршня. Учитывая это, мы приходим к **закону Паскаля:** давление, производимое внешними силами на покоящуюся жидкость, передается жидкостью во все стороны одинаково.

В этой формулировке закон Паскаля остается верным и для общего случая, т. е. для случая, когда мы учитываем силу тяжести. Если сила тяжести создает внутри покоящейся жидкости давление, зависящее от глубины погружения, то приложенные внешние (поверхностные) силы увеличивают давление в каждой точке жидкости на одну и ту же величину.

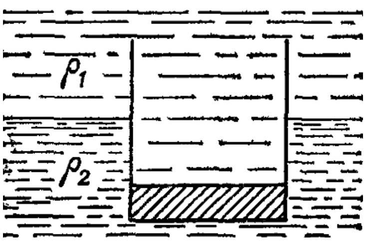
Гидростатический парадокс — это явление, при котором вес налитой в сосуд жидкости может отличаться от силы давления на дно.



Причина гидростатического парадокса состоит в том, что жидкость давит не только на дно, но и на стенки сосуда. Вес жидкости в сосуде будет равен сумме высотных составляющих напора по всей внутренней площади сосуда.

Если, к примеру, сосуд имеет участки внутренней поверхности, давление на которые направлено вверх, эти участки внесут вклад в вес со знаком минус. Статическое давление жидкости на дно окажется больше, чем вес жидкости, отнесенный к площади дна.

Пример №2 Тонкостенный стакан массы m, расположенный вертикально вниз дном, плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2. Найти глубину погружения стакана в нижнюю жидкость, если дно стакана имеет толщину h и площадь S. Массой стенок стакана пренебречь.



Решение →

Условие равновесия стакана: $S(x-h)\rho_1 g + mg = \rho_2 gxS$

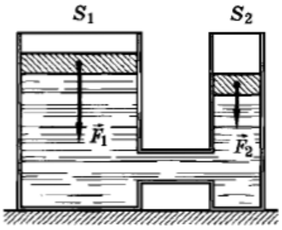
Учитывая закон Паскаля, получаем $x = \dfrac{m - \rho_1 hS}{(\rho_2 - \rho_1)S}$

Ответ: $x = \dfrac{m - \rho_1 hS}{(\rho_2 - \rho_1)S}$

Гидравлический пресс.

Закон Паскаля позволяет объяснить действие распространенного в технике устройства — гидравлического пресса.

Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров разного диаметра, снабженных поршнями и соединенных трубкой (см. рис.). Пространство под поршнями и трубка заполняются жидкостью (минеральным маслом). Обозначим площадь первого поршня через S_1, а второго — через S_2. Приложим ко второму поршню силу F_2. Найдем, какую силу необходимо приложить к первому поршню, чтобы сохранить равновесие.



Согласно закону Паскаля давление во всех точках жидкости должно быть одним и тем же (действием силы тяжести на жидкость пренебрегаем). Но давление под первым поршнем равно $\frac{F_1}{S_1}$, а под вторым $\frac{F_2}{S_2}$. Следовательно, $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$. Отсюда $F_1 = F_2\frac{S_1}{S_2}$.

Модуль силы F_1 во столько же раз больше модуля силы F_2, во сколько раз площадь первого поршня больше площади второго. Таким образом, при помощи гидравлического пресса можно посредством малой силы, приложенной к поршню небольшого сечения, получить огромные силы, действующие на поршень большого сечения. Принцип гидравлического пресса используется в гидравлических домкратах для подъема тяжелых грузов.

Закон Архимеда.

Из опытов следует, что при погружение тела в жидкость возникает сила, действующая на погруженное тело. Сила, с которой жидкость (или газ) выталкивает погруженное в нее тело, называется выталкивающей или архимедовой силой. Эта сила возникает из-за того, что давление жидкости увеличивается с глубиной: сила давления, действующая на тело сверху вниз, меньше силы давления, направленной снизу вверх.

Рассмотрим для простоты тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда. Это тело погружено в жидкость так, что его основания расположены горизонтально (см. рис.).

Силы, действующие на боковые грани тела, уравновешиваются. Они лишь сжимают тело. Силы же, действующие на основания параллелепипеда, не одинаковы. Модуль силы, действующей на верхнее основание, равен: $F_1 = P_1 = \rho g h_1 S$, где h_1 — высота жидкости над верхним основанием, ρ — плотность жидкости, S — площадь основания.

Модуль силы давления жидкости, действующей на нижнее основание, равен: $F_2 = \rho g h_2 S$, где h_2 — глубина, на которой находится нижнее основание. Но $h_2 > h_1$, поэтому и $F_2 > F_1$. Следовательно, модуль равнодействующей силы $F_a = F_2 - F_1 = \rho g(h_2 - h_1)S$.

Обозначим высоту параллелепипеда буквой $h(h = h_2 - h_1)$. Тогда $F_A = \rho g V$, где $V = Sh$ — объем тела.

Если тело погружено не полностью, а частично, то под V в формуле следует понимать объем погруженной части тела. Правая часть выражения равна весу жидкости, вытесняемой погруженным телом. Поэтому мы можем сказать: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме погруженной части тела. Это и есть закон Архимеда.

Примеры.

Задача №1 Из шланга, наклоненного под углом α к горизонту, бьет со скоростью v вода. Найти массу воды, находящейся в данный момент в воздухе, если площадь сечения отверстия шланга равна S, высота его над землей равна h, плотность воды равна ρ_0.

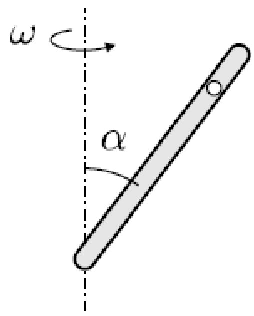
Решение $\rightarrow$

Масса воды, находящейся в воздухе, равна $m = \rho_0 Svt$, где t — время движения до падения на землю. Выбирая начало координат на поверхности земли, для движения по вертикали имеем $y = 0 = h + v\sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$, $\quad t = \dfrac{1}{g}[v\sin\alpha + (v^2 \sin\alpha^2 + 2gh)^{1/2}]$.

Окончательно получим: $m = \dfrac{\rho_0 Sv}{g}[v\sin\alpha + (v^2 \sin\alpha^2 + 2gh)^{1/2}]$.

Ответ: $m = \dfrac{\rho_0 Sv}{g}[v\sin\alpha + (v^2 \sin\alpha^2 + 2gh)^{1/2}]$.

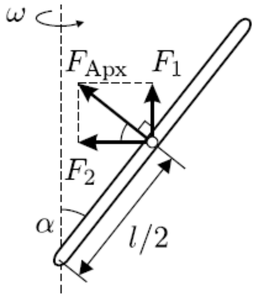
Задача №2 Закрытая трубка длиной l, полностью заполненная жидкостью, составляет угол α с вертикальной осью, проходящей через её нижний конец (см. рисунок). В жидкости плавает лёгкая пробка. До какой угловой скорости ω нужно раскрутить трубку вокруг оси, чтобы пробка погрузилась до середины трубки?



Решение $\rightarrow$

Рассмотрим неподвижную жидкость массой $\triangle m$ в объёме, равном объёму пробки. В обычных земных условиях на него действует сила тяжести $\triangle mg$, направленная вниз. Она уравновешивается силами давления, действующими на этот объём со стороны соседних слоёв жидкости. Равнодействующая сил давления представляет собой выталкивающую Архимедову силу, направленную в сторону уменьшения давления в жидкости, то есть вверх. Она, очевидно, равна $F_1 = \triangle mg$.

Пусть теперь рассматриваемый элементарный объём жидкости находится во вращающейся трубке. Так как он движется по окружности, то на него, кроме силы тяжести и силы F_1, должна действовать сила, направленная к оси вращения и обеспечивающая ему центростремительное ускорение. Такой силой может быть только равнодействующая сил давления, возникающих внутри жидкости. По величине она равна $F_2 = \triangle m\omega^2 r$, где r — расстояние от выделенного элемента жидкости до оси вращения. Эта сила, подобно силе F_1, пропорциональна массе элементарного объёма и направлена в сторону уменьшения давления, то есть к оси, вокруг которой вращается трубка. Силы F_1 и F_2, складываясь геометрически, дают силу Архимеда F_{Apx}, действующую на вращающийся выделенный объём жидкости. Отметим, что Архимедова сила в данном случае направлена под углом к вертикали.



Так как в условии задачи сказано, что пробка лёгкая (это означает, что её масса много меньше массы $\triangle m$ вытесненной ею жидкости), то действующую на пробку силу тяжести можно не учитывать, и принимать во внимание только силы F_1 и F_2. Для того, чтобы пробка покоилась, сумма этих сил не должна иметь составляющей, направленной вдоль трубки, то есть должна быть перпендикулярна трубке.

Из рисунка видно, что для этого должно выполняться соотношение: $F_2 \sin\alpha = F_1 \cos\alpha$, или $\triangle m\omega^2 \dfrac{l}{2} \sin 2\alpha = \triangle mg \cos\alpha$. Отсюда $\omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{l}}$.

Отметим, что положение пробки при данной частоте вращения будет устойчивым. Действительно, при неизменной составляющей силы Архимеда F_1, обусловленной силой тяжести, смещение пробки вверх приводит к увеличению её расстояния от оси вращения, в результате чего увеличивается составляющая силы Архимеда F_2. В результате появляется составляющая силы, направленная вдоль трубки вниз, которая возвращает пробку в прежнее положение. При смещении пробки вниз картина обратная.

Ответ: $\omega = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2g\cos\alpha}{l}}$.

Задача №3 Цилиндрическое ведро, наполовину заполненное водой, жёстко закреплено на краю лопасти ветряной мельницы (см. рисунок). При какой угловой скорости ω вращения лопастей вода не будет выливаться из ведра? Длина лопасти L много больше высоты ведра h и диаметра его дна d. Ускорение свободного падения равно g.

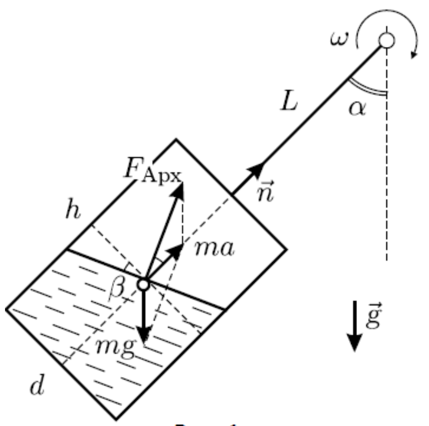


Рис. 1

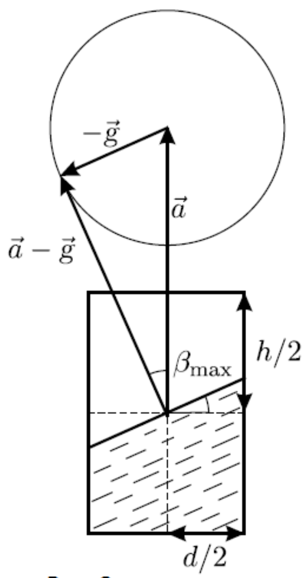


Рис. 2

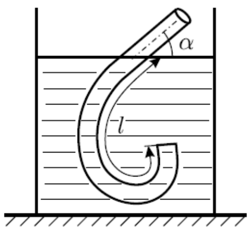
Решение →

Определим положение поверхности воды в ведре в момент, когда лопасть составляет некоторый угол α с вертикалью (см. рис.1). Уравнение движения элемента жидкости, находящегося вблизи её поверхности, имеет вид: $m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{Apx}}$, где $\overrightarrow{F_{Apx}}$ — архимедова сила, действующая на данный элемент, $\vec{a}$ — его центростремительное ускорение. Известно, что в равновесии направление архимедовой силы перпендикулярно к свободной поверхности жидкости; с другой стороны, из-за малости размеров ведра переходные процессы быстротечны, и воду в каждый момент времени можно считать находящейся в равновесии. Поскольку $\overrightarrow{F_{Apx}} = m(\vec{a} - \vec{g})$, получаем, что поверхность воды в ведре перпендикулярна вектору $\vec{a} + (-\vec{g})$.

Так как лопасть очень длинная, то центростремительное ускорение равно $\vec{a} = \omega^2 L\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный к оси вращения. Вектор ускорения $\vec{a}$ постоянен по величине и направлен вдоль лопасти мельницы и оси жёстко прикреплённого к ней ведра, а вектор $-\vec{g}$ вращается относительно ведра при вращении лопасти. Поэтому векторную сумму $\vec{a} + (-\vec{g})$ удобно изображать в системе отсчёта, жёстко связанной с ведром (см. рис.2). Обозначив угол отклонения вектора $\vec{a} + (-\vec{g})$ от оси ведра, равный углу наклона поверхности воды ко дну ведра, через β, получаем, что максимальное его значение определяется соотношением: $\sin\beta_{max} = g/a = g/(\omega^2 L)$. Вода не будет выливаться из ведра, заполненного наполовину, если $\sin\beta_{max} = g/\omega^2 L < \dfrac{h}{h^2 + d^2}$. Отсюда $\omega^2 > \dfrac{g}{L}\sqrt{1 + \dfrac{d^2}{h^2}}$.

Ответ: $\omega^2 > \dfrac{g}{L}\sqrt{1 + \dfrac{d^2}{h^2}}$.

Задача №4 Трубка длиной L с постоянным внутренним сечением в форме круга радиусом $R (R \ll L)$ свёрнута в кольцо. Кольцо неподвижно, а его ось горизонтальна. В трубку залили невязкую жидкость, объём которой $V < \pi R^2 L$. Каков период малых колебаний жидкости вблизи положения равновесия?



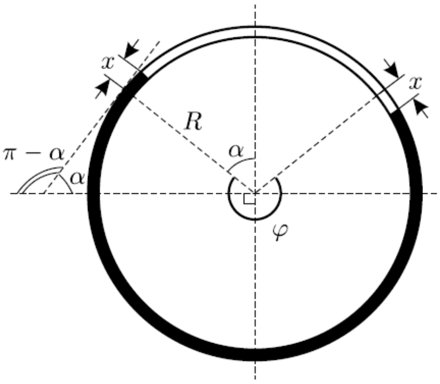
Решение →

Полный объём трубки равен $\pi R^2 L$. Поскольку целому кольцу соответствует угол 2π, то его части, занятой жидкостью, соответствует пропорционально меньший угол.

$$\varphi = 2\pi\frac{V}{\pi R^2 L} = \frac{2V}{R^2 L}.$$

В положении равновесия верхний уровень жидкости находится в наклонной части трубки (см. рис.), причём угол наклона трубки к горизонту в этом месте равен $\alpha = \pi - \varphi/2 = \pi - \dfrac{V}{R^2 L}$.

Таким образом, наша задача свелась к известной задаче о колебаниях жидкости в U — образной трубке с наклонными коленами.

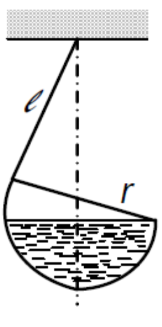


Обозначим длину столба жидкости в трубке через l, площадь поперечного сечения трубки — через S, плотность жидкости — через ρ. Пусть жидкость сместилась вдоль трубки на малое расстояние x от положения равновесия. Тогда потенциальная энергия жидкости увеличится по сравнению с потенциальной энергией в положении равновесия на величину $U = \rho g S \sin\alpha \cdot x^2$. Кинетическая же энергия жидкости, движущейся в трубке со скоростью $v = dx/dt$, равна $W = \dfrac{\rho S l}{2} v^2$.

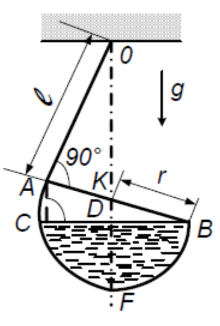
Следовательно, данная система может совершать гармонические колебания, причём квадрат их круговой частоты равен отношению коэффициентов при x^2 в выражении для U и при v^2 в выражении для W, то есть $\omega^2 = \dfrac{2g\sin\alpha}{l}$. Учитывая, что $l = \dfrac{V}{\pi R^2}$, и подставляя найденное выше выражение для α, получаем период малых колебаний жидкости в трубке: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2\pi V}{gR^2 \sin\left(\dfrac{V}{R^2 L}\right)}}$.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2\pi V}{gR^2 \sin\left(\dfrac{V}{R^2 L}\right)}}$.

Задача №5 Половник, наполненный тяжелой жидкостью, аккуратно подвесили за конец ручки. Часть жидкости при этом вылилась. Найти объем жидкости, оставшейся в половнике, если черпалка половника имеет форму полусферы радиуса r, а ручка, касательная к полу, сфере, имеет длину $l = \sqrt{8}r$. Массой половника пренебречь.



Решение $\mapsto$ Ручка половника и оставшаяся жидкость должны расположиться в итоге так, чтобы вертикаль OD, проведенная через точку подвеса O, прошла через центр тяжести оставшейся жидкости и была перпендикулярна поверхности (см. рис.): $OD \perp BC, CD = DB, DF = h$.



Объем области, занятой жидкостью, $V = \pi h^2(r - h/3)$.

Так как $BA \perp OA, OD \perp CB, CD = DB$, то

$AK = KB = r, \angle AOD = \angle ABC = \alpha$.

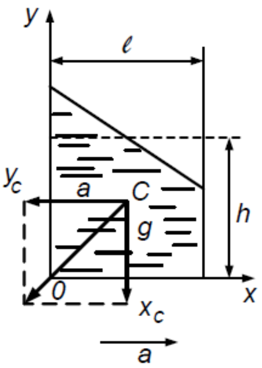
Следовательно, $\sin\alpha = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}$, $h = r - r\sin\alpha = r\left(1 - \dfrac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\right)$, отсюда $V = (28\pi/81)r^3$.

Ответ: $V = (28\pi/81)r^3$.

Задача №6

На тележке стоит сосуд с высокими стенками и квадратным дном, имеющим сторону l. Нижнее ребро сосуда шарнирно закреплено. В сосуд налита жидкость до уровня $h > l/2$. Тележку тянут с ускорением a, придерживая сосуд. Когда поверхность жидкости успокаивается, сосуд отпускают. При какой минимальной высоте уровня жидкости сосуд опрокинется? Массой сосуда пренебречь.

Решение $\mapsto$ Пусть C — центр масс ускоренной воды. Поверхность воды уже не горизонтальна, перпендикуляр к этой поверхности направлен вдоль вектора $-a+g$, направление которого совпадает с направлением результирующей силы, приложенной к центру масс. Если линия действия этой силы пройдет мимо площади опоры, то система перевернется. Критическим условием является прохождение липни действия результирующей силы через шарнир, т. е. через точку O.



Обозначив через x_c горизонтальную координату центра масс, через y_c — вертикальную, получаем условие $a/g = x_c/y_c$. Центр масс трапеции можно найти, например, через центр масс треугольника и прямоугольника:

$$x_c = \left[\frac{l}{3}\frac{l}{2}\frac{a}{g}l + \frac{l}{2}(h - l\frac{a}{2g})l\right]\frac{1}{hl} = \frac{l}{2} - \frac{l^2}{12h}\frac{a}{g},$$

$$y_c = \left[\frac{l}{3}\frac{a}{g}\frac{l}{2}\frac{a}{g}l + \frac{1}{2}(h - l\frac{a}{2g})(h - l\frac{a}{2g})l\right]\frac{1}{hl} = \frac{h}{2} - \frac{l}{2}\frac{a}{g} + \frac{7l^2}{24h}\frac{a^2}{g^2}.$$

Подставляя в вышеприведенное условие найденные значения y_c, имеем:

$h^2 - l\left(\dfrac{a}{g} + \dfrac{g}{a}\right)h + \dfrac{l^2}{6}\left(1 + \dfrac{7}{2}\dfrac{a^2}{g^2}\right) = 0$, отсюда с учетом условий $a < g$ и $h > l/2$ однозначно получаем $h = \dfrac{l}{2}\left(\dfrac{a}{g} + \dfrac{g}{a} + \sqrt{\dfrac{g^2}{a^2} + \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{a^2}{g^2}\right)}\right) \approx l\dfrac{g}{a}$ при $a < g$.

Ответ: $h = \dfrac{l}{2}\left(\dfrac{a}{g} + \dfrac{g}{a} + \sqrt{\dfrac{g^2}{a^2} + \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{a^2}{g^2}\right)}\right) \approx l\dfrac{g}{a}$ при $a < g$.

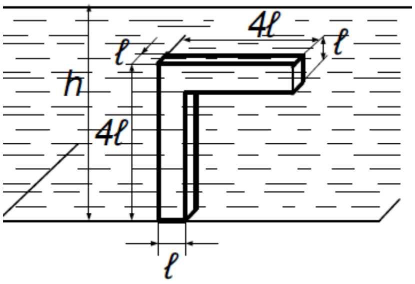
Задача №7

Поршень вытесняет воду из вертикального цилиндрического сосуда через малое отверстие, находящееся у дна сосуда и имеющее площадь S_0. Высота сосуда равна h, площадь основания — S. Какую работу совершает поршень, если он движется с постоянной скоростью V? Учесть действие силы тяжести.

Решение $\mapsto$ Используя закон сохранения энергии и условие несжимаемости жидкости, получаем $W_п = \rho_0 gh\dfrac{h}{2} = \rho_0 gS\dfrac{h^2}{2}, u = v\dfrac{S}{S_0}, W_к = \dfrac{mu^2}{2} = \rho_0 S\dfrac{h}{2}\left(v\dfrac{S}{S_0}\right)^2$, где ρ_0 — плотность воды, u — скорость истечения воды. Тогда для $A = W_к - W_п = \rho_0 S\dfrac{h}{2}\left(\left(v\dfrac{S}{S_0}\right)^2 - gh\right)$ для $v > \sqrt{2gh}\dfrac{S_0}{S}$. При $v < \sqrt{2gh}S_0/S$ происходит отрыв воды от поршня.

Ответ: $A = W_к - W_п = \rho_0 S \frac{h}{2}\left(\left(v\frac{S}{S_0}\right)^2 - gh\right)$ для $v > \sqrt{2gh}\frac{S_0}{S}$.

Задача №8 На дне сосуда, наполненного жидкостью, плотность которой равна ρ, стоит $Г$ — образное тело (размеры указаны на рисунок). Жидкость под нижнюю грань тела не подтекает. Плотность тела равна 2ρ. При какой высоте уровня жидкости в сосуде равновесие тела нарушается?



Решение $\mapsto$ Запишем условие равенства моментов силы давления воды и силы тяжести, действующей на тело, с учетом отсутствия подтекания.

В качестве оси вращения выбираем правое ребро нижней грани: $\frac{\rho g l}{2}\left(2\cdot 4l^3 + (h-4l)l^2\right) = 3l^3(2\rho-\rho)g\frac{3l}{2}$, откуда находим $h = 5l$.

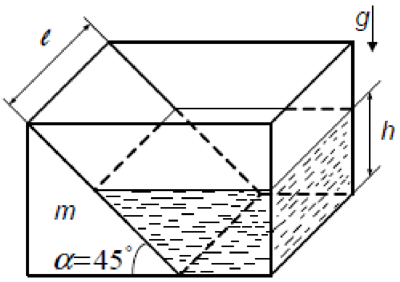
Ответ: $h = 5l$.

Задача №9 В стенке цилиндрического сосуда радиуса R, наполненного водой до высоты H, возле дна имеется отверстие, закрытое пробкой. Какую работу нужно совершить, чтобы вдвинуть пробку в сосуд на длину l? Пробка имеет форму цилиндра радиуса r и длины, большей l. Трение не учитывать. Плотность воды равна ρ_0. Сосуд достаточно высок, так что вода из него не выливается.

Решение $\mapsto$ Пробкой вытесняется объем воды $\pi r^2 l$. Следовательно, уровень воды повышается на $\triangle h$ (объем $\pi R^2\triangle h = \pi r^2 l$). Изменение высоты центра тяжести воды равно $\triangle h/2 + h - r$. Искомая работа равна изменению потенциальной энергии вытесненного объема: $A = \pi r^2 l \rho_0 g\left(\frac{r^2 l}{2R^2} + h - r\right)$.

Ответ: $A = \pi r^2 l \rho_0 g\left(\frac{r^2 l}{2R^2} + h - r\right)$.

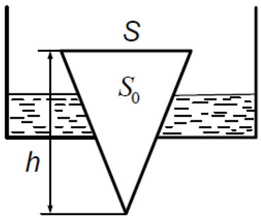
Задача №10 Одна из стенок прямоугольного сосуда с водой образована бруском. Брусок представляет собой призму, в плоскостях боковых сторон сосуда имеющую сечение в виде равнобедренного прямоугольного треугольника, и может перемещаться по дну сосуда. Считая, что трение между бруском и боковыми стенками отсутствует, найти минимальный коэффициент трения между основанием сосуда и бруском, при котором брусок придет в движение. Длина бруска $l = 20$ см, его масса $m = 90$ г, угол при вершине призмы $\alpha = 45°$, высота столба воды $h = 1$ см, плотность воды $\rho_0 = 1\cdot 1O^3$ *кг/м*^{3}.



Решение $\mapsto$ Полная сила давления $F = \dfrac{\rho_0 g h^2 l}{2\sin\alpha}$ направлена по нормали к бруску. Брусок находится в состоянии покоя, если $\dfrac{\rho_0 g h^2 l}{2} = k\left(mh + \dfrac{\rho_0 g h^2 l}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$, откуда $k = \dfrac{\rho_0 g h^2 l}{\rho_0 g h^2 l + 2mg} = 0.1$. Брусок придёт в движение, если $k < 0.1$.

Ответ: $k < 0.1$.

Задача №11 Круглое отверстие в дне сосуда закрыто конической пробкой с сечением основания S. При какой наибольшей плотности материала пробки ρ можно, доливая воду, добиться всплытия пробки? Площадь отверстия равна S_0, плотность воды равна ρ_0. Поверхностным натяжением пренебречь. Объем конуса, имеющего площадь основания S и высоту h, равен $hS/3$.



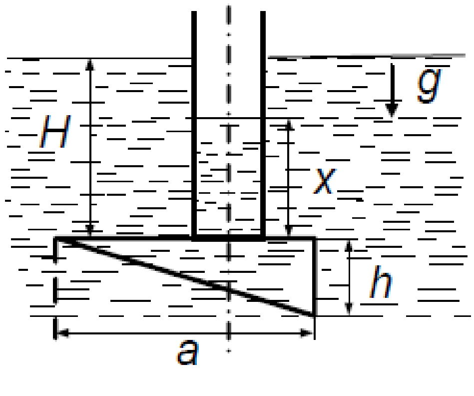
Решение $\mapsto$ Введем l — расстояние, на которое выступает пробка над плоскостью дна. Из подобия геометрических тел $l^2/h^2 = S_0/S$. Максимальная выталкивающая сила возникает, если вода лишь доходит, до верха пробки. Тогда $(\rho_0 - \rho)g\dfrac{hS}{3} - \rho_0 g\dfrac{lS_0}{3} - \rho_0 h(h-l)S_0 = 0$.

Исключая h, получаем $\rho = \rho_0[1 + 2(S_0/S)^{3/2} - 3S_0/S]$.

Ответ: $\rho = \rho_0[1 + 2(S_0/S)^{3/2} - 3S_0/S]$.

Задача №12 1) Трубка радиуса r, закрытая снизу алюминиевой клиновидной пластинкой, в сечении образующей прямоугольный треугольник с катетами a и b, погружена в воду на глубину H. Верхняя грань клина представляет собой квадрат со стороной a, причем ось трубки проходит через середину квадрата. Давление воды прижимает клин к трубке. До какой высоты следует налить воду в трубку, чтобы клин отделился от нее? Плотность воды равна ρ_0, плотность алюминия - p.

2) Алюминиевый клин заменен деревянным. До какой высоты следует налить воду в трубку, чтобы клин всплыл? Плотность дерева равна ρ.



Решение $\mapsto$ 1) Из геометрических соображений и из определения центра тяжести следует, что плечо выталкивающей силы относительно правого края трубки равно $a/6 + r$. Клин упадет на дно, повернувшись, если $(\rho - \rho_0)ga^2\dfrac{b}{2}(a/6 + r) \geq \rho_0 g\pi r^3(H - x), x \geq H + (1 - \dfrac{\rho}{\rho_0})a^2\dfrac{b}{2\pi r^2}(a/6r + 1)$.

Чтобы клин упал без вращения, необходимо выполнение условия для силы
$\rho_0 g\left(\pi r^2(H-x)+\dfrac{a^2b}{2}\right)\rho g\dfrac{a^2b}{2}$ при $x \geq H+\dfrac{a^2b}{2\pi r^2}(1-\dfrac{\rho}{\rho_0})$.

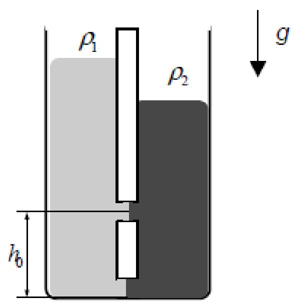
Сравнение ограничений, накладываемых на x, приводит к следующему результату:

$$x \geq H-\frac{a^2b}{2\pi r^2}(\rho/\rho_0-1).$$

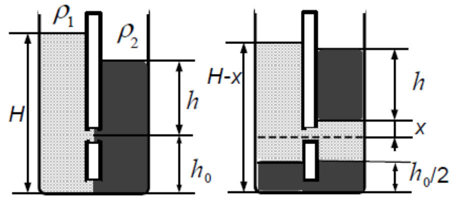
2) Плечо вытекающей силы относительно правого края трубки равно $a/6-r$. Клин перевернется и всплывет, если $(\rho_0-\rho)ga^2\dfrac{b}{2}(a/6-r) \geq \rho_0 g\pi r^3(H-x)$, откуда $x \geq H-\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)a^2\dfrac{b}{2\pi r}(a/6r-1)$.

Ответ: 1) $x \geq H-\dfrac{a^2b}{2\pi r^2}(\rho/\rho_0-1)$, 2) $x \geq H-\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)a^2\dfrac{b}{2\pi r}(a/6r-1)$.

Задача №13 В U — образной трубке с соприкасающимися внутренними стенками в равновесии находятся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($p_1 < p_2$), так что граница раздела между ними проходит через центр дна трубки. На высоте h_0 от нижней точки трубки во внутренних стенках появляется небольшое отверстие и начинается перетекание жидкости. На сколько изменится после перетекания уровень в колене с жидкостью, имеющей плотность ρ_2? Считать трубку тонкой и перемешивание жидкостей невозможным (возможен только разрыв столба жидкости в месте появления отверстия).



Решение $\mapsto$ Жидкость, перетекая из левого колена через отверстие в правое, разорвет столб жидкости: ту жидкость, что была над отверстием, поднимет, а ту, что была под отверстием, опустит.



Из условия равенства давлений в левом и правом коленах на уровне отверстия следует, что ниже отверстия жидкости расположатся одинаково. В левое колено войдет столб другой жидкости высоты $h_0/2$ и столько же войдет другой жидкости ниже уровня отверстия справа. Таким образом, уровень жидкости в правом колене изменится только на величину x, равную изменению уровня в левом колене. Обозначим h высоту уровня жидкости справа выше отверстия до начала перетекания, H — высоту уровня жидкости слева. Из условия равенства давлений внизу $(h+h_0)\rho_2 = H\rho_1$, из условия равенства давлений на уровне отверстия, после того как перетекание прекратилось, $h\rho_2 + x\rho_1 = (H - h_0 - x)\rho_1$ имеем $x = \frac{h_0}{2}(\rho_2/\rho_1 - 1)$.

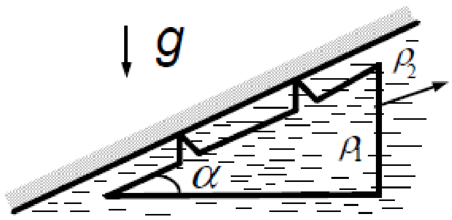
Ответ: $x = \frac{h_0}{2}(\rho_2/\rho_1 - 1)$.

Задача №14 Ртуть в барометре заменили на сжимаемую жидкость, плотность которой в результате действия силы тяжести зависит от глубины h по закону $\rho = \rho_0(1 + \alpha h)$. Какова будет высота столба этой жидкости при атмосферном давлении ρ?

Решение $\mapsto$ Выразим давление через среднюю плотность жидкости: $\rho = \rho_{cp} g h = \rho_0(1 + \frac{\alpha h}{2})hg$, откуда $h = \frac{1}{\alpha}\left[(1 + \frac{2\rho\alpha}{\rho_0 g})^{1/2} - 1\right] \approx \frac{\rho}{\rho_0 g}(1 - \frac{\rho\alpha}{2\rho_0 g})$ при $\frac{\rho\alpha}{\rho_0 g} \leq 1$.

Ответ: смотри решение.

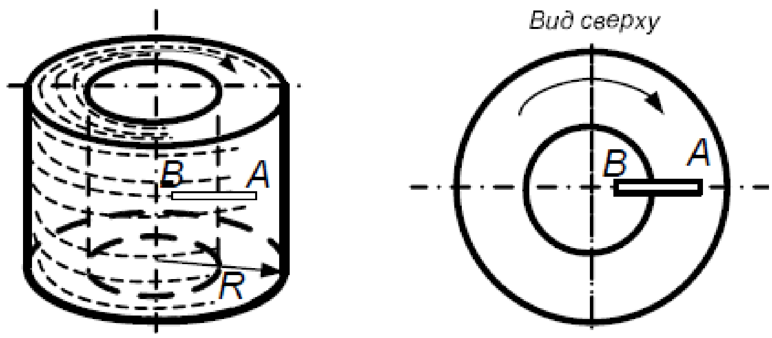
Задача №15 Треугольная призма, объем которой равен V, а плотность материала p_1, погружена в жидкость плотности $\rho_2 > p_1$. Призма всплывает с постоянной скоростью, скользя по тонкому слою жидкости вдоль стенки, угол наклона к горизонту которой равен углу α призмы при вершине. Найти силу сопротивления движению. Угол при основании призмы равен 90°.



Решение $\mapsto$ Тонкий слой жидкости полностью передает ее давление. На призму действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления и выталкивающая сила, сумма которых равна нулю. Таким образом, $F_{conp} = (\rho_2 - \rho_1)gV\sin\alpha$.

Ответ: $F_{conp} = (\rho_2 - \rho_1)gV\sin\alpha$.

Задача №16 Закрытый цилиндрический сосуд, наполненный на три четверти объема водой, вращается вокруг своей оси так, что в его центре образуется цилиндрическая полость. В воде плавает, погрузившись на две трети своей длины l, тонкий стержень AB. Найти плотность стержня. Радиус цилиндра равен R, длина стержня $l < 3R/4$, плотность воды равна ρ_0. Силой тяжести пренебречь.

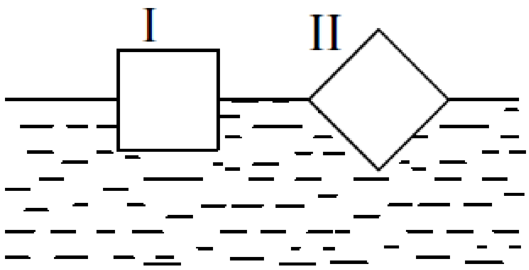


Решение $\mapsto$ Внутренняя воздушная цилиндрическая полость, образовавшаяся при вращении сосуда с водой, имеем объем $\pi R^2 h/4$, т. е. расстояние от оси полости до поверхности воды равно $R/2$. Расстояние от оси вращения до центра масс стержня, таким образом, равно $R/2 + l/6$, а расстояние до центра масс части стержня, вытеснившей воду, равно $R/2 + l/3$. Центростремительное ускорение стержню сообщает действующая на него со стороны жидкости выталкивающая сила. Точно такая же сила действовала бы в отсутствие стержня на жидкость в объеме погруженной части стержня и сообщала бы этой жидкости необходимое центростремительное ускорение:

$\rho S l\omega^2(R/2 + l/6) = \rho_0 S\frac{2}{3}l\omega^2(R/2 + l/3)$, отсюда $\rho = \frac{2}{3}\rho_0\frac{3R + 2l}{3R + l}$.

Ответ: $\rho = \frac{2}{3}\rho_0\frac{3R + 2l}{3R + l}$.

Задача №17 На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения, имеющий плотность $\rho = 0,5 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}. Какое из двух положений равновесия, показанных на, будет устойчивым и почему?

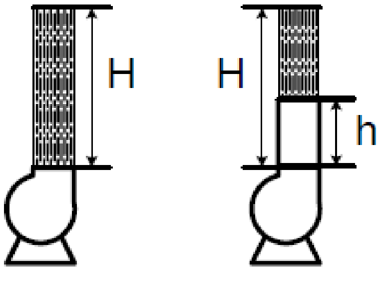


Решение $\mapsto$ Потенциальная энергия бруска в обоих случаях одинакова, а потенциальная энергия воды—нет. Как несложно убедиться, равновесия в промежуточных положениях между указанными положениями нет. Поэтому равновесие бруска устойчиво в том случае, когда центр тяжести вытесненной воды расположен выше: если сторону квадрата в сечении бруска принять за единицу, то $h_1 = 1/4, h_2 = 1/3\sqrt{2}, h_2 < h_1$, где h — расстояние по вертикали от центра тяжести вытесненной воды до центра тяжести бруска. Значит, положение 2 устойчиво.

К такому же результату приводит анализ устойчивости, проведенный исходя из сравнения вращающих моментов сил при небольшом отклонении бруска от положения равновесия.

Ответ: смотри решение.

Задача №18 Струя воды в фонтане поднимается на высоту H над уровнем выходной трубы насоса. К этой выходной трубе подсоединяют вертикальную трубу такого же диаметра, имею- имеющую высоту $h < H$. Во сколько раз следует изменить после подсоединения дополнительной трубы мощность насоса, чтобы суммарная высота подсоединенной трубы и вылетающей из нее струи воды осталась равной H? Потерями энергии воды на трение о стенки труб пренебречь.



Решение $\mapsto$ Пусть $\rho_0 vS$ — масса воды, поступающая в единицу времени из насоса при скорости истечения v через сечение S. Тогда мощность насоса без дополнительной трубы $P_0 = \dfrac{\rho_0 vSv^2}{2}$.

При наличии трубы высоты h мощность насоса $P = \dfrac{\rho_0 uSu^2}{2} + \rho_0 uSgh$, где u — скорость воды, протекающей через выходное отверстие дополнительной трубы. Наконец, из кинематических соображений имеем $v^2 = 2gh, u^2 = 2g(H-h)$.

Решая совместно эти уравнения, получаем $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{u}{v}\left[\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 + \dfrac{2gh}{v^2}\right] = \dfrac{u}{v} = \left(1 - \dfrac{h}{H}\right)^{1/2}$

Можно решить задачу значительно проще, заметив, что напор воды в обоих случаях одинаков, так как полная высота фонтанов одна и та же. Тогда, используя формулы $P = uF, P_0 = vF$, получаем сразу $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{u}{v}\left[\left(\dfrac{u}{v}\right)^2 + \dfrac{2gh}{v^2}\right] = \dfrac{u}{v} = \left(1 - \dfrac{h}{H}\right)^{1/2}$

Ответ: $\dfrac{P}{P_0} = \dfrac{u}{v}\left[\dfrac{u^2}{v} + \dfrac{2gh}{v^2}\right] = \dfrac{u}{v} = \left(1 - \dfrac{h}{H}\right)^{1/2}$

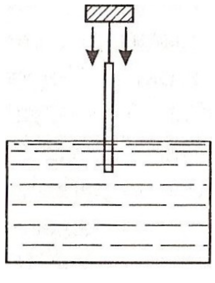
Задача №19 Брусок массы m удерживается в воздухе n струями воды, бьющими вертикально вверх из отверстий, имеющих сечение S. Скорость воды на выходе из отверстий равна v. Достигая бруска, вода разлетается от него в горизонтальной плоскости. На какой высоте над отверстиями удерживается брусок? Плотность воды равна ρ_0.

Решение $\mapsto$ Сила давления на брусок одной струи $F = \triangle p/\triangle t = \rho_0 v'^2 S'$. Тогда $mg = n\rho_0 v'^2 = n\rho_0 vSv'$, так как из условия неразрывности струи следует, что $v'S' = vS$. Наконец, из кинематических соображений имеем $v'^2 = v^2 - 2gh$.

Решая совместно эти уравнения, получаем $h = \dfrac{1}{2g}\left[v^2 - \left(\dfrac{mg}{n\rho_0 vS}\right)^2\right]$.

Ответ: $h = \dfrac{1}{2g}\left[v^2 - \left(\dfrac{mg}{n\rho_0 vS}\right)^2\right]$.

Задача №20 Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (см. рис.). Определите максимальную глубину h погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.



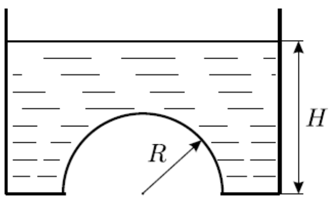
Решение $\mapsto$ Рассмотрим карандаш, погруженный в воду и отклонённый от вертикали на малый угол α. Суммарный момент сил тяжести и Архимеда относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец карандаша, равен: $M = mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha - F_A\left(l - \dfrac{x}{2}\right)\sin\alpha$, где $F_A = \rho g S x$ — сила Архимеда, ρ — плотность воды, S — площадь поперечного сечения карандаша, x — длина погруженной в воду части карандаша, $m = (\rho/n)Sl$ — масса карандаша. При $M > 0$ момент сил возвращает карандаш в вертикальное положение, при $M < 0$ увеличивает отклонение карандаша от вертикали. Формулу для момента сил можно переписать в виде: $M = \left(x^2 - 2lx + \dfrac{l^2}{n}\right)\dfrac{\rho g S}{2}\sin\alpha$.

Из этой формулы следует, что при малых x момент $M > 0$ и, следовательно, вертикальное положение карандаша будет устойчивым. Потеря устойчивости вертикального положения происходит при $x = l\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}\right)$, когда момент сил меняет знак с положительного на отрицательный. При дальнейшем погружении карандаша он будет отклоняться от вертикали, но длина x погруженной в воду его части меняться не будет, поскольку в равновесии момент сил M должен оставаться равным нулю. Поэтому глубина погружения нижнего конца карандаша, равная $x\cos\alpha$, будет при этом уменьшаться. Итак, максимальная глубина погружения нижнего конца карандаша равна

$$h = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = l\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 5.3 \text{ см.}$$

Ответ: $h = l\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 5.3$ см.

Задача №21 Отверстие в горизонтальном дне сосуда закрыто лёгким полусферическим колпачком радиусом R (см. рисунок). Сосуд наполнен жидкостью плотностью ρ. Дно находится на глубине H. Найдите силу, с которой колпачок давит на дно сосуда. Ускорение свободного падения равно g. Объём шара радиусом R равен $4\pi R^3/3$.



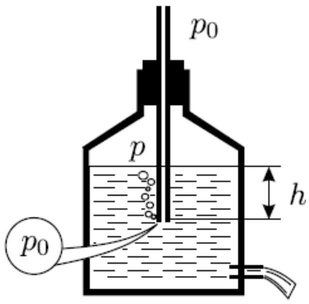
Решение $\mapsto$ Так как колпачок лёгкий, то искомая сила равна весу жидкости, находящейся непосредственно над ним. Пусть V — объём этой жидкости.

Тогда: $F = \rho g V = \rho g\left(\pi R^2 H - \dfrac{2}{3}\pi R^3\right) = \rho g \pi R^2\left(H - \dfrac{2}{3}R\right)$.

Ответ: $F = \rho g \pi R^2\left(H - \dfrac{2}{3}R\right)$.

Задача №22 В боковой стенке бутылки проделано маленькое отверстие, в которое вставлена затычка. В бутылку наливают воду и закрывают её горлышко пробкой, через которую пропущена трубка. Длина трубки подобрана таким образом, что её нижний конец находится выше отверстия в стенке бутылки, но ниже поверхности воды, а верхний конец сообщается с атмосферой. Затычку из отверстия в боковой стенке вынимают, и из него начинает вытекать вода. Через некоторое время поток воды из отверстия устанавливается, и вода вытекает с постоянной скоростью. Найдите давление воздуха P, находящегося в бутылке, в тот момент, когда нижний конец трубки находится на глубине

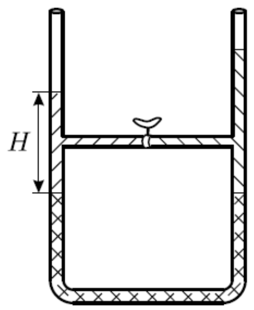
$h = 5$ см от поверхности воды. Плотность воды $\rho = 1000 кг/м^3$, атмосферное давление $P_0 = 100000$ Па, ускорение свободного падения $g = 9.8 м/с^2$.



Решение $\mapsto$ В любой момент времени давление в жидкости на уровне нижнего конца трубки равно $P + \rho g h$, где P — давление воздуха в бутылке, h — глубина, на которую погружен нижний конец трубки. До вынимания затычки давление воздуха в бутылке было равно атмосферному давлению P_0. Значит, давление на уровне нижнего конца трубки было равно $P_0 + \rho g h$. Ясно, что давление на уровне отверстия в боковой стенке было ещё больше (оно находится глубже нижнего конца трубки), поэтому после вынимания затычки вода начинает вытекать из бутылки, объём воздуха над поверхностью воды увеличивается, и давление воздуха в бутылке постепенно падает. Так будет продолжаться до тех пор, пока давление на уровне нижнего конца трубки не станет равно атмосферному. Как только это случится, через трубку в бутылку станут входить пузырьки воздуха, и вода станет вытекать из отверстия с постоянной скоростью (см. рис.). Значит, начиная с этого момента справедливо соотношение: $P_0 = P + \rho g h$, откуда для момента, когда нижний конец трубки находится на глубине $h = 5$ см, получаем, что $P = P_0 - \rho g h = 99510$ Па.

Ответ: $P = P_0 - \rho g h = 99510$ Па.

Задача №23 В U — образной трубке постоянного сечения находятся вода, ртуть и масло. Уровень ртути в левом и правом коленах одинаков, а высота столба воды равна H (см. рисунок). В некоторый момент открывается кран в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена на высоте $H/2$ над уровнем ртути. Как изменится уровень масла в правом колене? Плотности ртути, воды и масла равны $\rho_р, \rho_в$ и $\rho_м$, причём $\rho_в > \rho_м$. Считайте, что вода в правое колено не попадает, и что в обоих коленах всегда остаются вертикальные участки трубки, заполненные ртутью.



Решение $\mapsto$ До открывания крана гидростатическое давление по разные его стороны было различным. В левой части горизонтальной трубки давление было равно $P_1 = \dfrac{\rho_в g H}{2}$, а в правой $P_2 = \rho_в g H - \dfrac{\rho_м g H}{2} = \dfrac{\rho_в g H}{2}\left(2 - \dfrac{\rho_м}{\rho_в}\right)$. Так как $\rho_в > \rho_м$, то $P_2 > P_1$. Это означает, что после открывания крана часть масла перетечёт по горизонтальной трубке из правого колена в левое и разместится в нём над слоем воды, образовав столбик некоторой высоты x. (Заметим, что, так как трубка тонкая, то можно считать, что после установления по разные стороны от крана одинаковых давлений в горизонтальной трубке будет находиться только масло.)

После перетекания масла уровень ртути в правом колене поднимется на некоторую величину y, а в левом колене он опустится на такую же величину. Уровень воды над левым концом горизонтальной трубки понизится на такую же величину y, как и уровень ртути в левом колене. В свою очередь, столбик масла в правом колене поднимется на величину y из-за поднятия уровня ртути в правом колене и одновременно опустится на величину x из-за перетекания части масла в левое колено. В конце концов, новое состояние равновесия будет таким, что по разные стороны от крана в горизонтальной трубке давления будут одинаковыми. Это означает, что $\dfrac{\rho_в gH}{2}+\rho_м gx-\rho_в gy=\rho_в gH-\dfrac{\rho_м gH}{2}+\rho_м gy-\rho_м gx$.

Кроме того, ясно, что давление в нижней части U — образной трубки должно остаться таким же, каким оно было до открывания крана, так как сила давления на дно постоянна — она равна суммарному весу всех жидкостей, заполняющих трубку. Это, в частности, означает, что уменьшение давления в левом колене из-за вытекания из него ртути компенсируется давлением, которое создаётся перетёкшим в левое колено маслом: $\rho_p gy=\rho_м gx$. Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$x=\frac{\rho_p(\rho_в-\rho_м)H}{2\rho_м(2\rho_p-\rho_в-\rho_м)}.$$

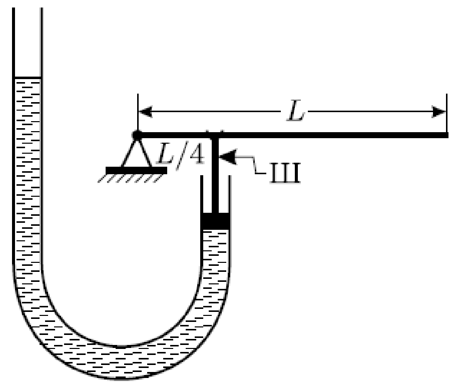
Отсюда искомое понижение уровня масла в правом колене:

$$h=x-y=x\left(1-\frac{\rho_м}{\rho_p}\right)=\frac{\rho_p-\rho_м}{2\rho_p-(\rho_в+\rho_м)}\cdot\frac{\rho_в-\rho_м}{\rho_м}\cdot\frac{H}{2}.$$

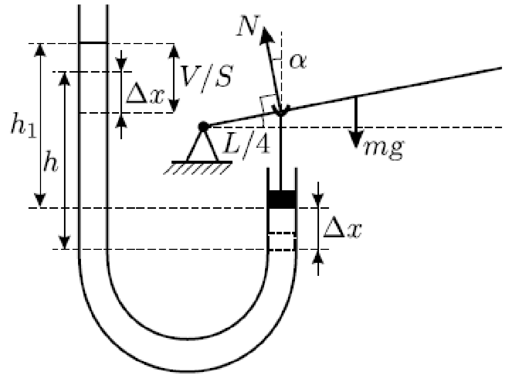
Заметим, что, поскольку, $\rho_p\gg\rho_м$ и $\rho_p\gg\rho_в$, то полученный ответ можно представить в приближённом виде: $h\approx((\rho_в-\rho_м)/\rho_м)\cdot\dfrac{H}{2}$.

Ответ: $h\approx((\rho_в-\rho_м)/\rho_м)\cdot\dfrac{H}{2}$.

Задача №24 Однородный тяжёлый рычаг длиной L, один из концов которого шарнирно закреплён, находится в горизонтальном положении, опираясь на верхний конец жёсткого штока $Ш$, по которому он может скользить (см. рисунок). Второй конец штока прикреплён к поршню, плотно вставленному в одно из колен вертикальной неподвижной U-образной трубки с площадью поперечного сечения S, в которую налита жидкость плотностью ρ. После того, как в открытое колено трубки долили объём V той же самой жидкости, которая была в ней, рычаг после установления равновесия повернулся вокруг оси шарнира на угол α, а шток при этом сохранил вертикальное положение. Пренебрегая массами поршня, штока и трением, найдите массу рычага m, если в исходном положении расстояние от верхнего конца штока до оси шарнира было равно $L/4$.



Решение $\mapsto$ При любом положении рычага действующий на него момент силы тяжести mg уравновешивается моментом силы реакции штока N, которая, в силу отсутствия трения, всегда направлена перпендикулярно рычагу (см. рис.). Вертикальная проекция силы реакции равна силе давления, создаваемого столбом налитой в U — образную трубку жидкости. Правило рычага для исходного горизонтального положения имеет вид:



$\frac{mgL}{2} = \rho g h S \frac{L}{4}$, где h — расстояние от начального уровня жидкости в открытом колене трубки до уровня нижней поверхности поршня (на рисунке пунктиром показано положение поршня в исходном положении). После доливания в трубку жидкости поршень вместе со штоком сместится вверх, а рычаг повернётся. При этом плечо силы тяжести уменьшится до $(L\cos\alpha)/2$, а плечо силы реакции штока увеличится до $L/(4\ cos\alpha)$, поскольку шток сохраняет вертикальное положение. При этом вертикальная составляющая силы реакции $N\cos\alpha$ станет равной $\rho g h_1 S$, где h_1 - расстояние от нового уровня жидкости в открытом колене трубки до нового уровня нижней поверхности поршня. Значит, правило рычага для этого случая имеет вид:

$$\frac{mgL\cos\alpha}{2} = \frac{\rho g h_1 S}{\cos\alpha} \cdot \frac{L}{4\cos\alpha}.$$

Так как шток жёсткий, то смещение поршня при повороте рычага равно расстоянию, на которое поднялся верхний конец штока: $\triangle x = (L/4)\operatorname{tg}\alpha$. При этом на такое же расстояние опустился уровень жидкости в открытом колене трубки. Долитая же в трубку жидкость объёмом V обеспечила дополнительный подъём разности уровней до высоты h_1, необходимой для установления равновесия. Следовательно (см. рис.), $h_1 = V/S + h - 2\triangle x = V/S + h - 2\frac{L}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

Решая полученные уравнения, находим ответ: $m = \dfrac{\rho(LS\operatorname{tg}\alpha - 2V)}{4(1-\cos\alpha^3)}$

Ответ: $m = \dfrac{\rho(LS\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2V)}{4(1-\cos\alpha^3)}$.

Задача №25 В широкий сосуд налит слой жидкости толщиной h_2 и плотностью ρ_2, поверх него — слой другой жидкости, не смешивающейся с первой, толщиной h_1 и плотностью $\rho_1 < \rho_2$. На поверхность жидкости положили плоскую шайбу толщиной h и плотностью ρ. Найдите зависимость установившейся глубины погружения H нижней плоскости шайбы от ρ и постройте график этой зависимости. Считайте $h < h_1; h_2$. Силами поверхностного натяжения пренебречь. Шайба всегда сохраняет горизонтальное положение.

Решение ↦ Очевидно, что при $\rho = 0$ глубина погружения шайбы $H = 0$. При $0 < \rho < \rho_1$ шайба будет плавать на поверхности (см. рис. 1), и условие её плавания запишется в виде: $\rho_1 gHS = \rho ghS$, где S — площадь горизонтального сечения шайбы. Отсюда $H = \dfrac{\rho}{\rho_1}h$. При ρ чуть большем, чем ρ_1, шайба тонет в верхней жидкости, и глубина её погружения H скачком возрастает до h_1.

При $\rho_1 < \rho < \rho_2$ шайба погружается во вторую жидкость (см. рис. 2), и глубина её погружения (от поверхности верхней жидкости) составляет $H = h_1 + \triangle h$, где $\triangle h$ — глубина погружения шайбы во вторую жидкость, которая может быть найдена из условия плавания: $\rho_1 g(h - \triangle h)S + \rho_2 g\triangle hS = \rho ghS$; откуда $\triangle h = \dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}h$, и следовательно, $H = h_1 + \dfrac{\rho-\rho_2}{\rho_2-\rho_1}h$.

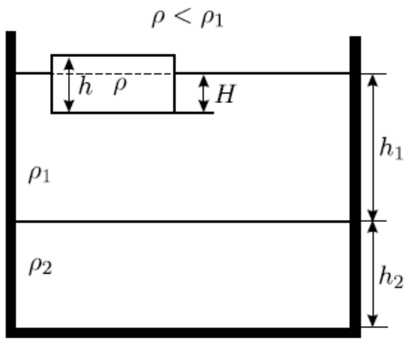


Рис. 1

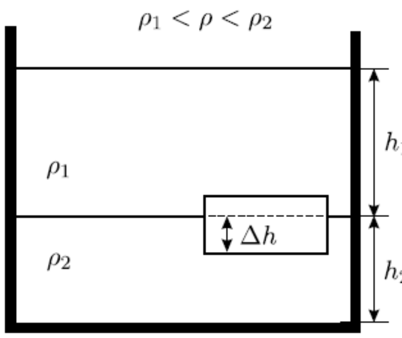


Рис. 2

Наконец, при ρ чуть большем, чем ρ_2, шайба тонет в нижней жидкости, и глубина её погружения H скачком возрастает до $h_1 + h_2$. Далее с ростом ρ она будет оставаться постоянной - шайба утонула и лежит на дне.

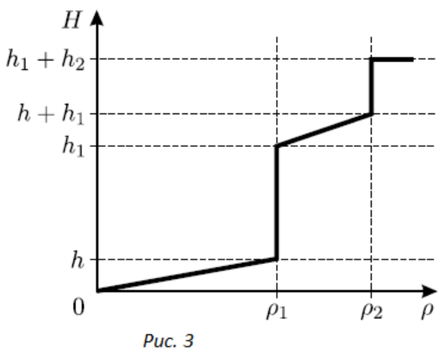
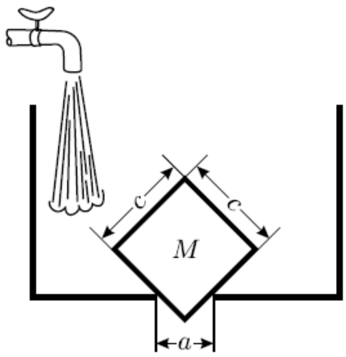


Рис. 3

Зависимость установившейся глубины погружения H нижней плоскости шайбы от плотности шайбы ρ приведена на графике (рисунок 3).

Ответ: смотри решение.

Задача №26 В горизонтальном дне сосуда имеется прямоугольное отверстие с размерами $a \times b$. Его закрыли прямоугольным параллелепипедом со сторонами $b \times c \times c$ так, что одна из диагоналей грани $c \times c$ вертикальна (вид сбоку показан на рисунке). В сосуд медленно наливают жидкость плотностью ρ. Какова должна быть масса параллелепипеда M, чтобы он не всплывал при любом уровне воды? Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь.



Решение $\mapsto$ Исследуем вопрос о том, при каком уровне жидкости сила гидростатического давления, действующая на параллелепипед, будет максимальна.

Разобьём параллелепипед вертикальными плоскостями на много маленьких элементов. Рассмотрим силы давления, действующие на каждый из элементов, в следующих случаях. 1) Жидкость и сверху, и снизу элемента отсутствует. В этом тривиальном случае, очевидно, сила давления равна нулю. 2) Жидкость есть над элементом, но её нет под элементом (см. рис. 1). В этом случае проекция силы давления на вертикальную ось отрицательна, то есть жидкость стремится прижать рассматриваемый элемент к дну.

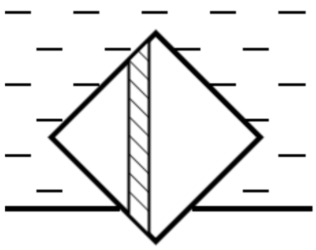


Рис. 1

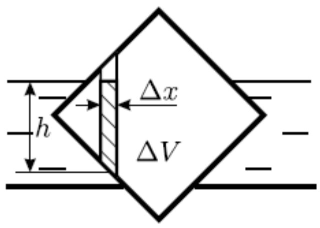


Рис. 2

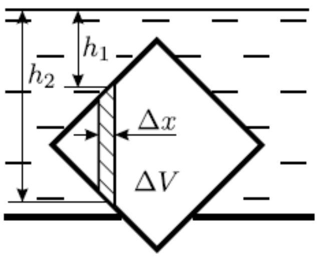


Рис. 3

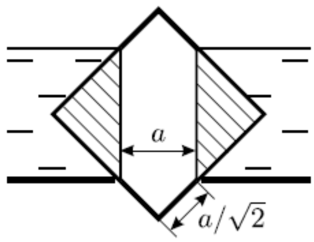


Рис. 4

3) Жидкость есть под элементом, но её нет над элементом (см. рис. 2). В этом случае проекция силы давления на вертикальную ось положительна и равна $f = \rho g b \triangle x h = \rho g \triangle V$, где h и $\triangle V$ — высота и объём заштрихованной части рассматриваемого элемента. 4) Жидкость есть и

под элементом, и над ним (см. рис.3). В этом случае проекция на вертикаль силы давления равна $f = \rho g b \triangle x(h_2 - h_1) = \rho g \triangle V$, где h_1 и h_2 — расстояния от поверхности жидкости до верхней и нижней граней рассматриваемого элемента соответственно.

Таким образом, из рассмотрения случаев 1 и 2 следует, что если под некоторым элементом пробки нет жидкости, то жидкость может только прижимать пробку к дну сосуда, и минимальное значение вертикальной проекции этой прижимающей силы давления, равное нулю, достигается тогда, когда жидкости нет и над этим элементом. Если же под некоторым элементом пробки жидкость есть (случаи 3 и 4), то максимальное значение проекции силы на вертикальную ось положительно и равно $\rho g \triangle V$, где $\triangle V$ — объём рассматриваемого элемента (случай 4). Значит, сила давления будет иметь максимально возможное положительное значение тогда, когда жидкость налита в сосуд до уровня, показанного на рисунке 4. При этом интересующий нас объём $\triangle V$ (заштрихован на рисунке 4) равен $\triangle V = \left(c - a/\sqrt{2}\right)^2 b$, а максимальная величина выталкивающей силы равна

$$F = \rho g \triangle V = \rho g b \left(c - a/\sqrt{2}\right)^2.$$

Если пробка не будет всплывать при уровне воды, показанном на рисунке 4, то она не всплывёт и при любом другом уровне. Следовательно, массу пробки можно найти из условия $Mg > F$, откуда $M > \rho g \left(c - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Ответ: $M > \rho g \left(c - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Упражнения.

1) Цилиндрический сосуд заполнен двумя неперемешивающимися жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2. В жидкость погружается куб с длиной ребра l. Найти глубину погружения куба в жидкость с плотностью ρ_2, если плотность вещества куба равна p ($\rho_2 > \rho > \rho_1$).

Ответ: $x = l\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$.

2) В прямоугольный высокий сосуд налита жидкость плотности ρ. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты h, в которое вдвинута на расстояние l невесомая пробка того же сечения. Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. При какой высоте уровня жидкости над пробкой жидкость не сможет ее вытолкнуть? Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен k. Атмосферное давление равно P_0. Трением пробки о стенки сосуда пренебречь.

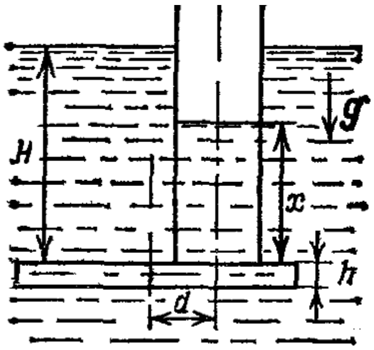
3) В сосуде, наполненном водой плотности ρ_0, на дне, представляющем собой наклонную плоскость, стоит металлический кубик плотности ρ. Найти силу давления кубика на дно. Расстояние от верхнего ребра кубика до поверхности воды равно h, угол наклона дна к горизонту равен α. Между дном и нижней гранью кубика вода не проникает. Ребро кубика равно l.

Ответ: $F = \rho g l^3 \cos\alpha + \rho_0 g l^2 [h + (l/2)\sin\alpha]$ первое слагаемое составляющая силы тяжести, действующей на кубик, второе — сила давления столба воды над кубиком; эта сила давления направлена по нормали к грани.

4) На дне сосуда на одной из своих боковых граней лежит треугольная призма. В сосуд налили жидкость плотности ρ_0, причем ее уровень сравнялся с верхним ребром призмы. Какова плотность материала призмы, если сила давления призмы на дно сосуда увеличилась в три раза? Жидкость под призму не подтекает.

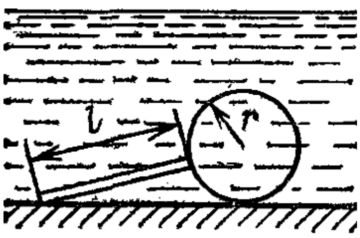
5) а) Трубка радиуса r, закрытая снизу алюминиевой пластинкой, имеющей форму цилиндра радиуса R и высоты h, погружена в воду на глубину H. Расстояние между осями трубки и пластинки равно d. Давление воды прижимает пластинку к трубке. До какой высоты следует налить воду в трубку, чтобы пластинка отделилась от трубки? Плотность воды равна ρ_0, алюминия — ρ.

б) Алюминиевая пластинка заменена деревянной. До какой высоты следует налить в трубку воду, чтобы пластинка всплыла? Плотность дерева равна p.



6) В U — образную трубку, имеющую сечение S, налита жидкость плотности ρ. На сколько поднимется уровень жидкости в правом колене трубки по отношению к первоначальному уровню, если в левое колено опустили тело массы m и плотности, меньшей плотности жидкости, которое может свободно в нем плавать? Капиллярными явлениями пренебречь.

7) На горизонтальном дне бассейна под водой лежит невесомый шар радиуса r с тонкой тяжелой ручкой длины l, опирающейся о дно. Найти наименьшую массу ручки, при которой шар еще лежит на дне. Плотность жидкости равна ρ_0.

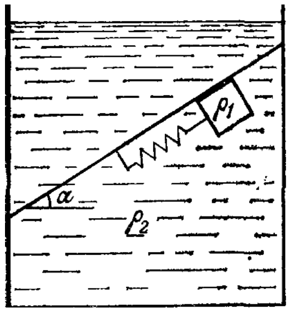


8) С какой силой Давит на стенку цилиндрического стакана палочка массы m, наполовину погруженная в воду и не достающая до дна? Угол наклона палочки к горизонту равен α. Трением пренебречь.

Ответ: $N = \dfrac{mg}{2} \operatorname{ctg}\alpha.$

9) Кубик плотности ρ_1 удерживается в равновесии невесомой пружиной под наклонной стенкой, угол на- наклона которой равен α, в жидкости плотности $\rho_2 > \rho_1$. Между стенкой и кубиком —

тонкий слой жидкости. Найти длину пружины, если в ненагруженном состоянии ее длина равна l_0, а в нагруженном состоянии, когда кубик подвешен к пружине в отсутствие жидкости, ее длина равна l.



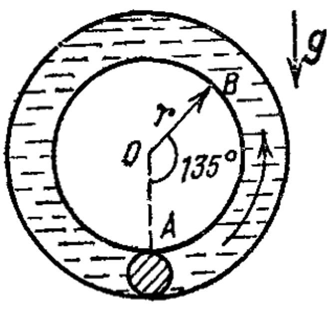
10) Заполненный водой цилиндрический сосуд радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. На дне его лежит шар радиуса $r < R/2$ и плотности ρ. С какой силой шар давит на боковую стенку цилиндра? Ось цилиндра вертикальна, плотность воды равна ρ_0.

Ответ: В отсутствие воды для движения центра шара вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω необходимо, чтобы со стороны цилиндрического сосуда на шар действовала сила

$F = (4\pi/3)r^3\rho\omega^2(R - r)$.

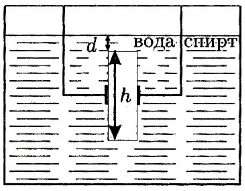
Если сосуд наполнен водой, то $F = (4\pi/3)r^3(\rho - \rho_0)\omega^2(R - r)$.

11) Трубка, диаметр которой много меньше длины, свернута в кольцо радиуса l и заполнена водой вся, за исключением небольшого участка в нижней точке трубки (точка A), заполненного маслом. Плоскость кольца вертикальна. В начальный момент масляная пробка начинает всплывать в направлении к точке B. Найти ее скорость в момент, когда она проходит мимо точки B, $\angle AOB = 135°$. Плотность масла равна ρ, плотность воды ρ_0. Длина масляной пробки $l \ll r$. Трением о стенки трубки пренебречь. Просачивание воды сквозь пробку отсутствует.



12) В U — образной трубке постоянного сечения колеблется жидкость плотности ρ. Жидкость занимает участок трубки длины l. Найти давление на глубине H в вертикальном участке правого колена в момент, когда уровень жидкости в правом колене выше, чем в левом, на величину h.

13) Малый сосуд удерживают внутри большого так, как показано на рисунке. В дне малого сосуда есть отверстие со втулкой, в которое вставлен цилиндр. Высота цилиндра h = 21 см, он может перемещаться относительно втулки без трения и только по вертикали. В малом сосуде находится вода, в большом — спирт, и при этом цилиндр покоится. На какой глубине d под водой находится верхнее основание цилиндра? Плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/$м^3$, плотность спирта ρ_c = 790 кг/$м^3$, плотность цилиндра ρ = 600 кг/$м^3$.


d
вода
спирт
h

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[5] Г.Ф.Меледин, Физика в задачах: Экзамеционные задачи с решениями,2-е изд., 1990 .

[6] Мякишев. Г. Я., Физика, Механика, 10 класс, профильный уравень.