

## Условия задач по математике и физике

### «52-й выездной физико-математической олимпиады МФТИ»

**М1.** Решить неравенство  $\frac{\log_9 x + 4}{\log_9 x + 1} \leq 4 \log_x 3 - 1$ .

**М2.** Решить неравенство  $\sqrt{\log_5 (31 - 6 \cdot 5^{2-x^2})} > x$ .

**М3.** Решить уравнение  $\sqrt{2 \cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x \sqrt{\sin x}$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**М4.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} \cos 2x - 2 \operatorname{tg}^4 y = -4 \\ \sin x + \frac{1}{\cos^2 y} = 3 \end{cases}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

**М5.** В прямоугольном треугольнике известны отрезки  $a$  и  $b$ , на которые точка касания вписанного в треугольник круга делит гипотенузу. Найти площадь этого треугольника.

**М6.** На плоскости лежат три равных шара радиуса  $R$ , попарно касающиеся друг друга. Четвертый шар касается плоскости и каждого из первых трех шаров. Найти радиус четвертого шара.

**Ф1.** Вагонетку массы 3 т поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту составляет  $30^\circ$ . Какую работу совершила сила тяги на пути в 50 м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением  $0,2 \text{ м/сек}^2$ ? Коэффициент трения принять равным 0,1;  $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$ .

Рис. Ф2.	Рис. Ф3.	Рис. Ф5.

**Ф2.** Два идеально гладких стержня радиуса  $R$  подвешены на нитях, образующих между собой угол  $2\alpha$  (рис. Ф2). На стержни положили цилиндр радиуса  $R$  и массы  $2M$  так, что вся система находится в равновесии. Определить расстояние между центрами стержней, если масса каждого из них равна  $M$ .

**Ф3.** На гладком горизонтальном столе лежит шар массы  $M$ , прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости  $k$  (рис. Ф3). В шар попадает пуля массы  $m$ , имеющая в момент удара скорость  $v_0$ , направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду  $A$  и период  $T$  колебаний шара.

**Ф4.** В закрытом латунном калориметре массы  $200\text{ г}$  находится  $1\text{ кг}$  льда при температуре  $(-10^\circ\text{C})$ . В калориметр впускают  $200\text{ г}$  пара, имеющего температуру  $110^\circ\text{C}$ . Какая температура установится в калориметре? Удельную теплоемкость паров воды в интервале от  $100^\circ\text{C}$  до  $110^\circ\text{C}$  считать равной  $0,4\text{ ккал/г}\cdot\text{град}$ . Удельная теплоемкость воды равна  $1,0\text{ ккал/кг}\cdot\text{K}$ , льда -  $0,5\text{ ккал/кг}\cdot\text{K}$ , латуни -  $0,09\text{ ккал/кг}\cdot\text{K}$

**Ф5.** Контур, представляющий собой квадрат с диагональю, изготовлен из медной проволоки сечением  $1\text{ мм}^2$  и подключен к источнику постоянного напряжения  $110\text{ в}$ , как указано на рисунке Ф5. Плоскость квадрата расположена параллельно магнитному полю с индукцией  $17\text{ гс}$ . Определить величину и направление силы, действующей со стороны поля на контур.

**Ф6.** Светящаяся точка, находящаяся в среде с показателем преломления  $n_1$  рассматривается невооруженным глазом из среды с показателем преломления  $n_2$ . Каково будет кажущееся расстояние точки до границы раздела сред, если точка находится от этой границы на расстоянии  $h_0$ , а глаз расположен так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами?