1. Пространство элементарных событий. Вероятность

Теория вероятностей представляет математические модели, которые отражают свойства случайных явлений. Как и в любой другой теории (например, классической механике, геометрии и др.), основные понятия теории вероятностей отражают некоторые свойства реального мира, но являются идеальными объектами. Для иллюстрации этого будем исходить из понятия случайного эксперимента, результат которого нельзя заранее предсказать, но сам эксперимент можно провести в одних и тех же условиях любое количество раз. Примеры: подбрасывание монеты, подбрасывание игральной кости. В результате эксперимента мы можем наблюдать те или иные события, которые будем обозначать $A, B, C, \ldots$. Если проводить эксперимент в одинаковых условиях большое количество n раз, то частота n_A/n (n_A — число появления A) появление события A будет стремиться к некоторой величине. Это позволяет предположить, что событие A обладает некоторой скрытой характеристикой, которую называют вероятностью и обозначают $\mathbb{P}(A)$.

1.1. Теоретико–множественная модель

Построение теоретико-множественной модели теории вероятностей связано с выделением пространства Ω *элементарных событий* ω (*исходов*). В результате каждого проведения случайного эксперимента может наблюдаться только одно элементарное событие ω. При этом любое событие A ассоциируется с некоторым подмножеством Ω, т. е. $A \subset \Omega$. Само Ω также рассматривается как событие. Его называют *достоверным* событием, поскольку оно происходит всегда. Наряду с этим пустое множество $\varnothing$ связывают с *невозможным* событием.

Таким образом, результат эксперимента описывается элементарным событием ω. Если $\omega \in A$, то говорят, что событие A произошло, если же $\omega \notin A$, то событие A в этом эксперименте не произошло. Теоретико множественные операции и отношения соответствуют логическим операциям над событиями. Если $A \subset B$, то это означает, что наступление события A влечет наступление события B. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется отрицанием события A. Объединению $A \cup B$ соответствует событие, которое происходит в случае, когда произошло A или B. Пересечению $A \cap B$ соответствует событие, которое происходит лишь в случае, когда происходят одновременно и A и B. Аналогичный смысл имеют объединение и пересечение любого числа событий. Разность $A \setminus B$ означает событие, когда A произошло, но B в этом эксперименте не произошло.

Заметим, что операции объединения и пересечения множеств обладают свойством дистрибутивности

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (AB_i), \qquad A \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} \left(A \bigcup B_i \right).$$

Следующие соотношения известны как правила де Моргана:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Если Ω конечно или счётно, то говорят о дискретной модели теории вероятностей (или случайного эксперимента). Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ конечно или счётно и допустим, что каждому элементарному событию ω_k соответствует вероятность p_k. Тогда $p_k \geq 0$ и $\sum p_k = 1$. Кроме того, для любого события $A \subset \Omega$ вероятность должна определяться как сумма

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \colon \omega_k \in A} p_k.$$

В дискретных моделях особенно выделяется случай *классического определения* вероятности. Допустим, что Ω состоит из конечного числа элементарных событий $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые в силу каких либо причин (например, симметрии) являются ”<равновозможными”>. Такая ситуация возникает при подбрасывании монеты или игральной кости. Тогда $p_k = 1/n$ для всех $k = 1, \ldots, n$, а подсчёт вероятности события $A \subset \Omega$ сводится к вычислению числа $|A|$ элементарных событий, составляющих A. В частности, $|\Omega| = n$, а для $\mathbb{P}(A)$ в этих терминах можно записать формулу

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Эта формула и составляет классическое определение вероятности.

1.2. Элементы комбинаторики

При использовании классического определения вероятности основным инструментом являются комбинаторные методы. Отметим некоторые из них.

Основное правило комбинаторики. Пусть имеется m групп элементов, причём i-тая группа состоит из k_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется равенством

$$N = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

Доказательство легко проводится по индукции.

Выборки. Многие комбинаторные вычисления укладываются в следующую схему. Допустим, что мы имеем занумерованных шаров: $a_1, \dots, a_n$. Осуществляется выборка объёма k из этой совокупности шаров. Нас интересует количество способов, которыми можно осуществить эту выборку. При этом возникает четыре различные ситуации: выборка может быть упорядоченной или неупорядоченной и с возвращением или без возвращения.

♣ Количество упорядоченных выборок с возвращением (или размещений из n по k с повторениями) равно n^k. Это сразу же следует из основного правила комбинаторики.

♣ Количество упорядоченных выборок без возвращения (или размещений из n по k без повторений) равно

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Эта формула также следует из основного правила комбинаторики.

♣ Количество неупорядоченных выборок без возвращения (или сочетаний из n по k без повторений) равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

♣ Количество неупорядоченных выборок с возвращением (или сочетаний из n по k без повторений) равно C_{n+k-1}^k.

Для подсчета числа таких выборок воспользуемся следующей конструкцией. Каждую такую выборку однозначно мы можем представить упорядоченной цепочкой нулей и единиц следующим образом. Вначале напишем столько единиц, сколько в выборке присутствует a_1, после чего поставим нуль; затем напишем столько единиц, сколько в выборке присутствует a_2, после чего снова поставим нуль и так далее. Таким образом, каждой выборке будет соответствовать последовательность из k единиц и $n-1$ нулей. Чтобы зафиксировать выборку, достаточно указать места расположения единиц. Это эквивалентно осуществлению неупорядоченной выборке из $n+k-1$ элементов объёма k, т. е. их количество равно C_{n+k-1}^k.

Полученные результаты можно представить в виде таблицы.

Размещение частиц по ячейкам. В физических приложениях приведенная выше комбинаторная схема встречается в другой интерпретации. Размещается k частиц по n ячейкам. В статистической физике в качестве частиц могут быть электроны, протоны, а в качестве ячеек, например, энергетические уровни. Здесь также выделяется четыре случая: различимые или неразличимые частицы и размещение с ограничением (не

выборки	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
неупорядоченные	$C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

более одной частицы в одной ячейке) или без ограничений. Размещению без ограничений различимых частиц соответствует статистика Максвелла"—Больцмана, размещению без ограничений неразличимых частиц соответствует статистика Бозе"—Эйнштейна, а размещению с ограничениями неразличимых частиц соответствует статистика Ферми"—Дирака. Случай размещений с ограничениями различимых частиц в статистической физике не используется.

Размещение частиц по ячейкам легко сводится к выборкам. Будем считать, что ячейки занумерованы: $a_1, \ldots, a_n$. Тогда под размещением можно понимать назначение каждой частице номера ячейки. В результате приходим к следующему результату.

♠ Количество размещений без ограничений различимых частиц (статистика Максвелла"—Больцмана) равно n^k.

♠ Количество размещений без ограничений неразличимых частиц (статистика Бозе"—Эйнштейна) равно C_{n+k-1}^k.

♠ Количество размещений с ограничением неразличимых частиц (статистика Ферми"—Дирака) равно C_n^k.

♠ Количество размещений с ограничениями различимых частиц равно A_n^k.

1.3. Геометрические вероятности

Рассмотрим теперь задачу, в которой пространство элементарных событий не является даже счётным. Допустим, что два лица X и Y условились встретиться между 14 и 15 часами в определённом месте. Пришедший первым ждёт другого в течение 10 минут, а затем уходит. Какова вероятность их встречи, если приход каждого лица в любой момент времени из условленного промежутка равновероятен?

Выберем в качестве единицы измерения один час и пусть x — промежуток времени (в долях часа) от 14 часов до момента прихода X, а y — промежуток времени от 14 часов до момента прихода Y. Тогда пространством элементарных событий будет квадрат

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\},$$

а событие A, которое отвечает встрече, представляет собой подмножество Ω, выделяемое условием: $|x - y| \le 1/6$.

В этой задаче нельзя построить вероятностную модель, просто приписав вероятность каждому элементарному событию. С другой стороны, логично считать, что вероятность события A равняется отношению её площади к площади всего Ω. Поскольку площадь Ω равна 1, а площадь A равна

$$1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{36},$$

то $\mathbb{P}(A) = 11/36$.

В общем случае, когда пространство элементарных событий Ω представляет собой область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, и все элементарные события считаются равновероятными, вероятность события $A \subset \Omega$ будем вычислять по формуле

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)},$$

где под $\mathrm{mes}(A)$ понимается мера Жордана множества A, хотя в дальнейшем мы выясним, что для более сложных множеств, чем области в $\mathbb{R}^n$, следует рассматривать меру Лебега.