2. Алгебры событий и свойства вероятности

В случае, когда пространство элементарных событий Ω не является конечным или счётным, нет удовлетворительного способа определить вероятность на всех его подмножествах. Поэтому возникает необходимость выяснить свойства класса подмножеств Ω, которые будут отвечать событиям. Как мы видели, теоретико множественные операции соответствуют логическим операциям над событиями. Поэтому такой класс подмножеств Ω должен быть замкнут относительно теоретико множественных операций.

Определение 2.1 *Класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если $\Omega \in \mathcal{A}$ и он замкнут относительно операций объединения, пересечения и взятия дополнения.*

Следующее утверждение оказывается полезным при проверке, является ли выделенный класс подмножеств Ω алгеброй.

Предложение 2.1 *Пусть $\mathcal{A}$ — класс подмножеств Ω, для которого выполняются следующие условия:*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(ii) Если $A \in \mathcal{A}$, то $\overline{A} \in \mathcal{A}$;

(iii) Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Тогда $\mathcal{A}$ является алгеброй подмножеств Ω.

Доказательство *Нам нужно показать, что $\mathcal{A}$ замкнуто относительно всех теоретико множественных операций. Из условий (ii) и (iii) следует, что класс $\mathcal{A}$ замкнут относительно операции взятия дополнения и объединения. Остаётся показать, что класс $\mathcal{A}$ также замкнут относительно операции пересечения. Пусть A и B из $\mathcal{A}$. Тогда в силу условия (ii) дополнения $\overline{A}$, $\overline{B}$ принадлежат $\mathcal{A}$. Представление*

$$AB = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

и условие (iii) доказывают принадлежность пересечения AB классу $\mathcal{A}$. $\square$

Приведём один важный пример получения алгебры событий (множеств).

Определение 2.2 *Совокупность событий $\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ будем называть разбиением, если $D_i D_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{n} D_i = \Omega$. Множества D_i называются в этом случае атомами разбиения $\mathbb{D}$.*

Пусть $\mathbb{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ — некоторое разбиение. Через $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ обозначим класс событий, который включает $\varnothing$ и всевозможные объединения атомов разбиения. Очевидно, что $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ представляет собой алгебру, которую мы будем называть *алгеброй, порождённой разбиением* $\mathbb{D}$.

Анализируя свойства частоты и примеры, приходим к выводу, что вероятность $\mathbb{P}$ есть функция, определённая на некоторой алгебре $\mathcal{A}$ событий, которая обладает следующими свойствами:

1°. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ для всех A из $\mathcal{A}$ (неотрицательность);

2°. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (нормированность);

3°. Если A и B — два события из $\mathcal{A}$ и $AB = \varnothing$, то $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (аддитивность).

Эти простые три свойства вероятности приводят к более сложным свойствам.

Следствие 2.1 *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств Ω и $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая свойствам $1° - 3°$. Тогда имеют место утверждения:*

1. *Для любого $A \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;*
2. *Если $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subset B$, то $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathsf{A}$;*
3. *Если $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subset B$ то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;*
4. *Для любого $A \in \mathcal{A}$ имеют место неравенства $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;*
5. *Для любых $A, B \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB). \tag{2.1}$$

Доказательство *Пусть $A \in \mathcal{A}$. Из равенства $\Omega = A \cup \overline{A}$ и в силу свойств $2°, 3°$ имеем $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$, что и доказывает первое утверждение. В частности, $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = 0$.*

Допустим теперь, что $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subset B$. Тогда $B = A \cup (B \setminus A)$ и снова в силу свойства $3°$ получаем $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$. Отсюда следует второе утверждение.

Третье утверждение следует из равенства $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$ и неотрицательности вероятности.

Непосредственно из третьего утверждения, которое составляет свойство монотонности вероятности, следует

$$0 = \mathbb{P}(\varnothing) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Пусть теперь A, B — произвольные из алгебры $\mathcal{A}$. Заметим, что $A \cup B$ можно представить в виде объединения трех непересекающихся множеств

$$A \cup B = (A \setminus (AB)) \cup (B \setminus (AB)) \cup (AB).$$

Но тогда по свойству аддитивности вероятности с использованием второго утверждения получаем

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB),$$

и равенство (2.1) *доказано.* □

Равенство (2.1) допускает обобщение на случай произвольного числа событий.

Теорема 2.1 (Сложения) *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные события, т. е. принадлежат алгебре $\mathcal{A}$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Доказательство *В случае $n = 2$ доказываемое утверждение совпадает с равенством* (2.1). *Допустим теперь, что наше утверждение верно для всех натуральных чисел вплоть до $n - 1$ и покажем, что оно тогда будет верным и для n. Используя вначале равенство* (2.1), *а затем предположение индукции, получаем*

$$\mathbb{P}\left(A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_n A_i\right)$$

$$= \mathbb{P}(A_n) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})\right]$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_n A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} \mathbb{P}(A_n A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-2} \mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Теорема доказана. □

Следующий результат выражает свойство полуаддитивности вероятности для произвольного набора событий.

Предложение 2.2 *Пусть $A_1, \dots, A_n$ — произвольные события. Тогда*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Доказательство *Рассмотрим события $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2\overline{A_1}, \dots, B_n = A_n\overline{A_1} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}}$. Очевидно, что $B_iB_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Кроме того, поскольку $B_i \subset A_i$, то в силу свойства монотонности вероятности $\mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$. Используя эти неравенства и свойство аддитивности, получаем*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

$\square$

В дальнейшем под элементарной вероятностной моделью мы будем понимать тройку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где Ω — некоторое множество (пространство элементарных событий), $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств Ω и $\mathbb{P}$ — функция (вероятность), определённая на $\mathcal{A}$ и удовлетворяющая условиям $1^\circ - 3^\circ$. Коротко тройку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ будем называть *вероятностное пространство.* Вскоре мы несколько расширим понятия вероятностной модели и вероятностного пространства.