3. Условная вероятность и независимость

Допустим, что мы не знаем точный результат (элементарное событие) случайного эксперимента, но знаем, что произошло событие A. Эта информация должна повлиять на переоценку вероятностей всех других событий. Принимая во внимание то, что вероятность события проявляется через частоту его появления, допустим, что при N испытаниях события A, B и AB наблюдались в N_A, N_B и N_{AB} числе случаев, соответственно. Тогда отношение N_{AB}/N_A будет выражать частоту появления события B при условии, что произошло событие A. Поскольку

$$\frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{N_{AB}/N}{N_A/N},$$

то эта частота будет отражением величины $\mathbb{P}(AB)/\mathbb{P}(A)$.

Определение 3.1 *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *— вероятностное пространство и событие* A *имеет положительную вероятность,* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *Тогда для каждого* B *из* $\mathcal{A}$ *под условной вероятностью этого события при условии* A *будем понимать величину*

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{3.1}$$

Условная вероятность $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$, как функция на $\mathcal{A}$, обладает всеми свойствами вероятности. Таким образом, информация о том, что произошло событие A, позволяет перейти к новому вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.

На практике чаще легче бывает вычислить условную вероятность $\mathbb{P}(B|A)$ и тогда, используя равенство (3.1), получить вероятность совместного наступления этих событий

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A). \tag{3.2}$$

Это равенство известно как теорема умножения и имеет следующее обобщение.

Теорема 3.1 *Пусть события* $A_1, \ldots, A_n$ *таковы, что* $\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) > 0$. *Тогда*

$$\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \tag{3.3}$$

Доказательство *Заметим прежде всего, что все условные вероятности в правой части равенства* (3.3) *корректно определены, поскольку* $\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) > 0$ *и* $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ *является подмножеством каждого* *условия. При* $n = 2$ *равенство* (3.3) *совпадает с равенством* (3.2). *Допустим теперь, что равенство* (3.3) *выполняется для всех номеров, вплоть до* $n-1$. *Обозначим* $A = A_1, \ldots, A_{n-1}$, $B = A_n$. *Тогда, используя равенство*(3.2) *и предположение индукции, получаем*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) &= \mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})\mathbb{P}(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).\end{aligned}$$

□

Следующий результат известен как "<*формула полной вероятности*">.

Теорема 3.2 *Пусть* $H_1, \ldots, H_n$ *— события, удовлетворяющие следующим условиям* $H_iH_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, $\mathbb{P}(H_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) = 1$. *Тогда для любого события* A *имеет место равенство*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i). \qquad (3.4)$$

Доказательство *Введем в рассмотрение также событие* $H_0 = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{n} H_i$. *Очевидно, что* $\mathbb{P}(H_0) = 0$ *и* $\mathbb{D} = \{H_0, H_1, \ldots, H_n\}$ *является разбиением. Поскольку*

$$A = A\Omega = AH_0 \cup AH_1 \cup \ldots \cup AH_n$$

представляет собой объединение попарно непересекающихся множеств (попарно несовместных событий) и $\mathbb{P}(AH_0) = 0$, *то*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(AH_i).$$

Применяя теперь к каждому слагаемому в последней сумме теорему умножения $\mathbb{P}(AH_i) = \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)$, *приходим к формуле* (3.4). □

Формула (3.4) является эффективным инструментом при вычислении вероятностей сложных событий. При этом события $H_1, \ldots, H_n$ в этой формуле обычно называют *гипотезами.*

Теорема 3.3 *[Формула Байеса] Пусть события* $H_1, \ldots, H_n$ *удовлетворяют условиям теоремы 3.2 и* $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) > 0$. *Тогда для* $k = 1, \ldots, n$ *имеют место равенства*

$$\mathbb{P}(H_k|A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i)}.$$

Доказательство *Непосредственно из определения условной вероятности и теоремы умножения получаем*

$$\mathbb{P}(H_k) = \frac{\mathbb{P}(H_k A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A|H_k)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Остаётся знаменатель записать по формуле полной вероятности (3.4) *и мы приходим к требуемому утверждению.* □

Вероятности гипотез $\mathbb{P}(H_k)$ называют обычно *априорными* вероятностями, а условные вероятности $\mathbb{P}(H_k|A)$ — *апостериорными*. Таким образом, формула Байеса позволяет ”<переоценить”> априорную вероятность гипотезы при наличии информации, что произошло событие A.

Независимость. Понятие независимости относится к одному из основных в теории вероятностей. С информационной точки зрения под независимостью события B от события A естественно понимать то, что знание о наступлении события A не влияет на вероятность наступления события B. Это выражается равенством $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. При таком определении мы должны предполагать, что $\mathbb{P}(A) > 0$. Если при этом и $\mathbb{P}(B) > 0$, то из независимости B от A следует

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Это означает, что тогда и событие A не зависит от события B, т. е. свойство независимости двух событий является симметричным. Кроме того, независимость событий A и B в названном выше смысле сразу же следует из равенства

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{3.5}$$

Определение 3.2 *Для произвольных двух событий $A, B \in \mathcal{A}$ будем говорить, что они независимы, если выполняется равенство* (3.5).

Заметим, что в отличие от «информационного» подхода к определению независимости мы здесь не требуем условия положительности вероятностей событий A и B.

Предложение 3.1 *Если события A и B независимы, то независимы также пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B,* □

Доказательство *Утверждение достаточно доказать для пары A и $\overline{B}$. Используя равенство* (3.5), *получаем*

$$\mathbb{P}(A\overline{B}) = \mathbb{P}(A \setminus AB) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

□

Определение 3.3 *Будем говорить, что события $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, если для любых $k = 2, \dots, n$ и $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ выполняются соотношения*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}). \tag{3.6}$$

Заметим, что из попарной независимости событий не следует, вообще говоря, независимость в совокупности. Кроме того, при проверке независимости в совокупности не достаточно ограничиться проверкой лишь самых длинных цепочек в равенстве (3.6). Сказанное подтверждается следующими двумя примерами.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, где все элементарные события ω_i равновероятны. Определим $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$. Эти события попарно независимы, но не выполняется равенство

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Пример 2. Подбрасывается две игральные кости. Рассмотрим три события:

$$A = \{\text{на первой кости выпала «единица», «двойка» или «пятерка»}\},$$
$$B = \{\text{на первой кости выпала «четверка», «пятерка» или «шестерка»}\},$$
$$C = \{\text{сумма выпавших очков на двух игральных костях равна девяти}\}.$$

В этом случае выполняется равенство

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C),$$

но нет даже попарной независимости.

Определение 3.4 *Классы событий $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ называются независимыми, если для любого набора $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ события $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности.*

Заметим, что условие независимости алгебр $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ можно сформулировать просто: для любых $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ должно выполняться равенство

$$\mathbb{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n).$$

В действительности, здесь содержатся все цепочки из формулы (3.6), поскольку выбор в качестве одного или нескольких событий $A_1, \dots, A_n$ достоверного события Ω приводит к более короткой цепочке.

Теорема 3.4 *Пусть $\mathbb{D}_1 = \{D_1^{(1)}, \dots, D_{k_1}^{(1)}\}, \dots, \mathbb{D}_n = \{D_1^{(n)}, \dots, D_{k_n}^{(n)}\}$ — разбиения пространства Ω и $\mathcal{A}(\mathbb{D}_1), \dots, \mathcal{A}(\mathbb{D}_n)$ — порождённые ими алгебры событий. Тогда $\mathcal{A}(\mathbb{D}_1), \dots, \mathcal{A}(\mathbb{D}_n)$ независимы, если для любых $i_1, \dots, i_n$, $1 \le i_1 \le k_1$, ..., $1 \le i_n \le k_n$, выполняются равенства*

$$\mathbb{P}(D_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot D_{i_n}^{(n)}) = \mathbb{P}(D_{i_1}^{(1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(D_{i_n}^{(n)}). \tag{3.7}$$

Доказательство *Нам нужно доказать, что если* $A_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_1), \ldots, A_n \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_n)$, *то выполняется равенство*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

Согласно условию теоремы, это равенство выполняется в случае, когда в качестве $A_1, \ldots, A_n$ *выбраны атомы разбиений. Поскольку любое событие алгебры в нашем случае представляет собой объединение атомов соответствующего разбиения, а сами атомы одного разбиения взаимно не пересекаются, то для доказательства теоремы достаточно установить, что при выполнении равенств*

$$\mathbb{P}(AH_1 \ldots H_m) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m),$$

$$\mathbb{P}(BH_1 \ldots H_m) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m)$$

для некоторых $H_1, \ldots, H_m$ *и двух непересекающихся* A, B *следует*

$$\mathbb{P}((A \cup B)H_1 \ldots H_m) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m).$$

Последнее очевидно, поскольку при этих условиях

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B)H_1 \ldots H_m) &= \mathbb{P}(AH_1 \ldots H_m) + \mathbb{P}(BH_1 \ldots H_m) = \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m) = \\ &= \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(H_1)\ldots\mathbb{P}(H_m)\end{aligned}$$

и теорема доказана. □