Решения III Онлайн-олимпиады ФАКИ.

Математика

Задача 1. Найти: $arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{1}{7}+arctg\frac{1}{8}$.

Ответ: $\alpha+\beta+\gamma+\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Решение: Пусть $\alpha=arctg\frac{1}{3},\beta=arctg\frac{1}{5},\gamma=arctg\frac{1}{7},\varphi=arctg\frac{1}{8}$. Тогда

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{4}{7},tg(\gamma+\varphi)=\frac{tg\gamma+tg\varphi}{1-tg\gamma tg\varphi}=\frac{3}{11}\Rightarrow$$

$$tg(\alpha+\beta+\gamma+\varphi)=\frac{tg(\alpha+\beta)+tg(\gamma+\varphi)}{1-tg(\alpha+\beta)tg(\gamma+\varphi)}=\frac{\frac{3}{11}+\frac{4}{7}}{1-\frac{3}{11}\cdot\frac{4}{7}}=1\Rightarrow\ \alpha+\beta+\gamma+\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Задача 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases}(x+y+z)(2x+y+z)=9\\(x+y+z)(x+2y+z)=16\\(x+y+z)(x+y+2z)=25\end{cases}$

Ответ: $(x,y,z)=(\pm\frac{7\sqrt{2}}{10},\mp\frac{7\sqrt{2}}{10},\mp\frac{5\sqrt{2}}{2})$.

Решение: Пусть $t=x+y+z$, тогда

$$\begin{cases}t(x+t)= & 9\\t(y+t)= & 16\\t(z+t)= & 25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{9}{t}-t\\y=\frac{16}{t}-t\\z=\frac{25}{t}-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{9-t^2}{t}\\y=\frac{16-t^2}{t}\\z=\frac{25-t^2}{t}\end{cases}\Rightarrow x+y+z=t=\frac{50}{t}-3t$$

$$\Rightarrow \frac{50}{t}=4t,\ t^2=\frac{25}{2},\ \pm t=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{18-25}{2}\right)=\mp\frac{7\sqrt{2}}{10},\ y=\mp\frac{\sqrt{2}}{5}\left(\frac{-32+25}{2}\right)=\pm\frac{7\sqrt{2}}{10},\ z=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 3. Пусть α,β,γ - углы треугольника. Доказать, что $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$.

Доказательство: Одобряются любые варианты верных доказательств. Здесь приведено лишь одно из возможных:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Зафиксируем α и найдем точку экстремума получившейся функции от β:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow\ tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=ctg\frac{\beta}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\ \Rightarrow\ \boxed{\beta=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}$$

Подставляем найденное значение β в исходное выражение:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$$

Теперь найдем максимум по α. Сделаем замену:

$$x=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4},\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-2x,\ 0\le\alpha\le\pi\ \Rightarrow\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\cos 2x\sin^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos 2x\sin^2 x\right)=0=-2\sin 2x\sin^2 x+\cos 2x\sin 2x=\sin 2x(\cos 2x-2\sin^2 x)=$$

$$=\sin 2x(1-4\sin^2 x)=0\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{1}{4},\ \sin x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6};\ \alpha=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3};$$

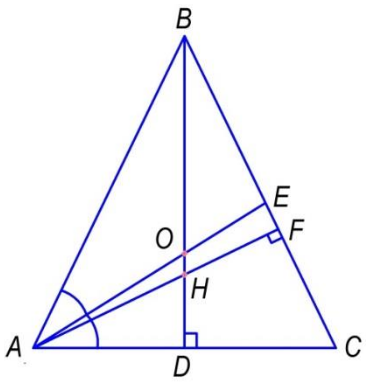
Подставляем полученное значение α :

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$ ч.т.д.

Задача 4. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB=BC*) биссектриса *AE* пересекает высоту *BD* в т. *O*, причем *OB:OD=3:1*. В каком отношении высота *AF* делит высоту *BD*?

Ответ: 7:1

Решение:



По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AD}=\frac{OB}{OD}=3,\ AD=x, AB=3x$$

$\triangle AFC$ подобен $\triangle BDC$, т.к. они прямоугольные и $\angle C$ – общий. Далее,

$$\triangle ADH \sim \triangle AFC \Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{AD}{DH}=\frac{BD}{AD}$$

$$AD=x,\ AB=3x,\ BD=\sqrt{9-1}x=x\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow DH=\frac{AD\cdot AD}{BD}=\frac{x}{\sqrt{8}}\Rightarrow BH=BD-DH=x\sqrt{8}-\frac{x}{\sqrt{8}}=\frac{7x}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{DH}=\frac{7x}{\sqrt{8}}:\frac{x}{\sqrt{8}}=7:1.$$

Задача 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases}\sin(x-y)=2\cos x\sin y\\ \cos(2x+y)+\cos(x+y)\cos x=0\end{cases}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\pi k\\ y=arctg\frac{1}{3}+\pi m\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\pi k\\ y=-arctg\frac{1}{3}+\pi m\end{array}\right.,m,k\in Z$

Решение: Принимается любое решение, приводящее к верному ответу.

Физика

Задача 1. Тело массой *M* покоится на поверхности и прикреплено к горизонтальной недеформированной пружине. В начальный момент резким ударом телу быстро придается начальная скорость *V*, и оно начинает двигаться. Найти минимальное расстояние *S*, которое пройдет тело до полной остановки, если M=10 кг, V=6 м/с и коэффициент трения μ между телом и поверхностью, по которому оно скользит, равен 0,1, жесткость пружины k=5 Н/m.

Ответ: S=19,3 м.

Решение: При движении сила трения совершит работу, равную:

$$A = \mu MgS$$

После того, как тело остановится, его кинетическая энергия будет равна нулю, но пружина будет немного растянута или сжата, и будет действовать с силой F на тело. Тогда энергия сжатия пружины W равна:

$$W = \frac{F^2}{2k}$$

Энергия W максимальна в случае, когда сила F равна максимальной силе трения покоя μMg. Из закона сохранения энергии можно записать:

$$\frac{(\mu Mg)^2}{2k} + \mu MgS = \frac{MV^2}{2}$$

Откуда можно найти минимальное расстояние S=19,3 м.

Задача 2. В сосуде с жесткими стенками при стандартных условиях находятся 4 моля водорода, 1 моль кислорода, 10 моль гелия. В результате химической реакции образуется максимально возможное количество молекул воды. Энергия образования 1 моля воды составляет 242 кДж. Определить конечное количество двухатомных молекул водорода, если при температуре 400^{o}C происходит их диссоциация (двухатомные молекулы водорода распадаются на одноатомные), и энергия диссоциации составляет 4,47 электрон-вольт на одну молекулу.

Ответ: 1,07 моль.

Решение: Из одного моля молекул кислорода образуется 2 моля молекул воды, на которые также потребуется 2 моля молекул водорода. После реакции останется только 2 моля молекул водорода, молекул кислорода вообще не останется, но будет 2 моля молекул воды. Гелий как инертный одноатомный газ останется в том же количестве в течение всех процессов.

Тогда выделится следующая энергия W:

$$W = 2 * 242000 = 484000 \text{Дж}$$

Данная энергия пойдет на нагрев и диссоциацию газов.

Энергия, необходимая для нагрева такой смеси газов с комнатной температуры до 400°C можно найти из следующих соотношений:

$$U = (10\frac{3}{2} + 2\frac{5}{2} + 2\frac{6}{2})R\Delta T = 82100\,Дж$$

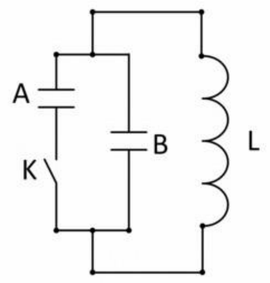
Для диссоциации одного моля молекул водорода необходима следующая энергия:

$$H = 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 4.77\cdot 6.02\cdot 10^{23} = 431000\,Дж$$

Тогда из закона сохранения энергии можно найти количество молей диссоциировавших молекул водорода по следующей формуле:

$$\nu_D = \frac{W-U}{H} = 0.93$$

Задача 3.



Два одинаковых конденсатора A и B, каждый с ёмкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены, как показано на рисунке. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Конденсатор B не заряжен и ток в катушке отсутствует. Определить максимальное значение силы тока в катушке после замыкания ключа**.**

Ответ: $I_{\max} = U\sqrt{\frac{C}{2L}}.$

Решение: Если бы не было конденсатора *B*, то после замыкания ключа в контуре возникли бы электромагнитные колебания. Из закона сохранения энергии можно было бы сразу найти максимальный ток. Но при наличии конденсатора *B* сначала произойдет перераспределение заряда между конденсаторами и лишь потом в контуре установятся колебания. Действительно, участок цепи, состоящий из двух конденсаторов и соединительных проводов, тоже можно считать колебательным контуром. Но его индуктивность – индуктивность проводов – очень мала (по сравнению с *L*), поэтому собственная частота колебаний в этом контуре будет очень большой (намного больше собственной частоты колебаний в контуре, который образуют конденсаторы и катушка индуктивности). Конечно, этот контур обладает и активным сопротивлением, но оно мало по сравнению, например, с индуктивным сопротивлением. Поэтому в течение некоторого времени после замыкания ключа колебания в контуре можно считать незатухающими. В контуре, состоящем из конденсаторов и проводов, произойдет много колебаний тока за то время, пока ток в катушке еще можно будет считать равным нулю. Из-за сопротивления проводов колебания в этом контуре будут затухающими. Это приведет к быстрому установлению равновесия и перераспределению зарядов поровну между конденсаторами (емкости конденсаторов одинаковы). При этом часть энергии электрического поля заряженного конденсатора *A* перейдет во внутреннюю энергию.

Найдем, какая часть энергии остается в контуре после быстрого перераспределения заряда между конденсаторами. Первоначальный заряд конденсатора был равен

$$Q = CU.$$

После перераспределения заряда между конденсаторами их заряды стали равны $\frac{Q}{2}$, а энергия –

$$W = \frac{Q^2}{8C} = \frac{CU^2}{8}.$$

Следовательно, полная энергия, которая останется в контуре, равна

$$\frac{CU^2}{8} + \frac{CU^2}{8} = \frac{CU^2}{4}.$$

Так как до замыкания ключа энергия в контуре была равна

$$W_0 = \frac{CU^2}{2},$$

то во внутреннюю энергию перешла половина первоначальной энергии конденсатора *A*.

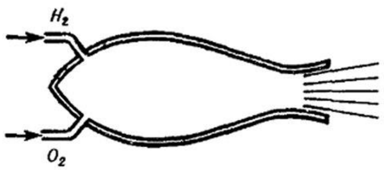
Теперь рассмотрим контур, состоящий из конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке будет максимальным, когда конденсаторы полностью разрядятся и их энергия перейдет в энергию магнитного поля в катушке. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{4} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_{\max} = U\sqrt{\frac{C}{2L}}.$$

Задача 4.



В камеру сгорания реактивного двигателя поступает в секунду масса *m* водорода и необходимое для полного сгорания количество кислорода. Площадь сечения выходного отверстия сопла *S*, давление в этом сечении *p*, абсолютная температура *T*. Определить реактивную силу.

Ответ: $F = \dfrac{81m^2RT}{pSM_n}.$

Решение: Найдем массу водяных паров, образующихся при сгорании массы *m* водорода. Из уравнения реакции горения водорода

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

видно, что две молекулы водорода соединяются с одной молекулой кислорода. В результате получается две молекулы водяного пара. Это означает, что для сгорания одного киломоля водорода необходима половина киломоля кислорода и в результате реакции получается один киломоль воды. При сгорании $\nu = \dfrac{m}{M_в}$ киломоля водорода получится столько же киломолей водяного пара (где $M_в$ = 2 кг/кмоль). Поэтому при сгорании массы *m* водорода получается масса

$$m_1 = \nu M_n = \frac{18}{2}m = 9m$$

водяного пара (где $M_n =$ 18 кг/кмоль). Эта масса водяных паров вылетает из двигателя за 1 с. Так как площадь выходного сопла двигателя известна, можно найти скорость $\vec{v}$ газа, выходящего из сопла. За 1 с из сопла двигателя будет выброшен объем пара $V = vS$. Если плотность пара равна ρ, то масса этого объема пара будет равна

$$m_1 = \rho v S.$$

Отсюда

$$v = \frac{m_1}{\rho S} = \frac{9m}{\rho S}.$$

Из уравнения Клайперона-Менделеева

$$pV = \frac{m_1}{M_n} RT$$

(где R – газовая постоянная) находим неизвестную плотность пара:

$$\rho = \frac{m_1}{V} = \frac{pM_n}{RT}.$$

Так как за время Δt из сопла ракеты выбрасывается масса пара $m_i \Delta t$ с импульсом $m_i \Delta t \cdot \vec{v},$ то на газ действует сила

$$\vec{F_1} = \frac{m_i \Delta t \cdot \vec{v}}{\Delta t} = m_1 \vec{v}.$$

Такая же по модулю сила, но направленная в противоположную сторону, действует на двигатель. Полная сила, действующая на двигатель (сила тяги двигателя), равна сумме реактивной $-\vec{F_1}$ и силы статического давления $F_2 = pS,$ т.е.

$$F = m_1 v + pS \approx \rho v^2 S = \frac{81 m^2 RT}{pSM_n}.$$

Обычно сопла ракетных двигателей устроены так, что давление p газа, выходящего из сопла, мало. Поэтому второй член в выражении для силы тяги двигателя мал по сравнению с первым и при расчетах им можно пренебречь.

Задача 5. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту, т.е. круговую орбиту, очень близкую к поверхности Луны, в момент наибольшего сближения с Луной включается тормозной двигатель.

Определить, насколько изменится скорость движения корабля при выполнении этого маневра. Ускорения свободного падения тел на поверхности Луны $g = 1.7 \frac{м}{с^2},$ радиус Луны $R = 1.7 \cdot 10^6 м.$

Дополнительный вопрос: Попробуйте оценить, какую часть первоначальной массы корабля должно составить сожженное горючее, если тормозной двигатель выбрасывает продукты сгорания с относительной скоростью $v = 4 \cdot 10^3 \frac{м}{с}$.

Ответ: $\Delta v \approx 0.7 \cdot 10^3 \frac{м}{с}$, $\Delta m \approx 0.15\, m$.

Решение: При движении по параболической траектории космический корабль имеет вточке, наиболее приближенной к Луне, такую кинетическую энергию, которая позволяет ему улететь затем «бесконечно» далеко от Луны. На бесконечно большом расстоянии от Луны кинетическая энергия корабля равна нулю. Так можно принять равной нулю и потенциальную энергию корабля. Это означает, что на большом расстоянии от Луны будет равна нулю полная механическая энергия корабля. ИЗ закона сохранения энергии следует, что и в точке, наиболее близкой к Луне, полная механическая энергия корабля также должна быть равна нулю; следовательно,

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{M_л m}{R_л} = 0,$$

откуда

$$v = \sqrt{2G\frac{M_л}{R_л}}.$$

Так как

$$\frac{GM_л}{R_л^2} = g_л,$$

то

$$v_0 = \sqrt{g_л R_л} \approx 2.4 \cdot 10^3 \frac{м}{с}.$$

В процессе торможения скорость корабля должна уменьшиться до первой космической скорости v_1 движения по круговой орбите радиуса $R_л$. Так как при движении по круговой орбите радиуса $R_л$ центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R_л}$$

кораблю сообщает сила тяготения

$$F = mg_л,$$

то

$$\frac{mv_1^2}{R_л} = g_л m,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{g_л R_л} \approx 1.7 \cdot 10^3 \frac{м}{с}.$$

Следовательно

$$\Delta v = v_0 - v_1 \approx 0.7 \cdot 10^3 \frac{м}{с}.$$

Для оценки массы Δm сгоревшего топлива предположим, что время сгорания топлива очень мало и что продукты сгорания были выброшены одной порцией. По закону сохранения импульса

$$(m - \Delta m)\Delta v = \Delta m \cdot v,$$

откуда

$$\Delta m = \frac{\Delta v}{v + \Delta v} m \approx 0.15\ m.$$