6. Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства

Напомним, что под алгеброй подмножеств Ω мы понимаем такой класс подмножеств Ω, который замкнут относительно конечного числа теоретико-множественных операций. При работе с бесконечными множествами часто приходится иметь дело с последовательностями подмножеств и производить с ними счётное число операций. Например, если $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность множеств, то естественно возникают верхний и нижний пределы этой последовательности

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k, \qquad A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Если $A_1, A_2, \ldots$ интерпретировать как события, то верхний предел A^* выражает то, что произошло бесконечно много событий последовательности, а нижний предел A_* соответствует тому, что произошли все события последовательности, за исключением, быть может, конечного числа. В случае $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ последовательность $\{A_n\}$ называется монотонно возрастающей и тогда $A^* = A_* = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Аналогично, в случае $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ последовательность $\{A_n\}$ называется монотонно убывающей и $A^* = A_* = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. В общем случае последовательность $\{A_n\}$ называется сходящейся, если $A^* = A_*$.

Определение 6.1 *Класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если он является алгеброй и замкнут относительно счётных объединений.*

Замечание 6.1 *Класс $\mathcal{A}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй в том и только том случае, если выполнены следующие условия:*

1°. $\Omega \in \mathcal{A}$;

2°. *Если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$;*

3°. *Если $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Другими словами, σ-алгебра замкнута относительно счётного числа теоретико-множественных операций. Действительно, замкнутость относительно счётных объединений содержится в пункте 3°, а замкнутость относительно счётных пересечений выводится с использованием правил де Моргана.

Определение 6.2 *Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс подмножеств Ω. Тогда под $\sigma(\mathcal{K})$ будем понимать σ-алгебру подмножеств Ω, которая удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $\mathcal{K} \subset \sigma(\mathcal{K})$;

(ii) *Если* $\mathcal{F}$ *—* σ*-алгебра подмножеств* Ω *и* $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, *то* $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$.

В силу условия (ii) σ-алгебру $\sigma(\mathcal{K})$ называют *минимальной* σ*-алгеброй, порождённой* $\mathcal{K}$. Поскольку 2^{Ω}, множество всех подмножеств Ω, является σ-алгеброй и пересечение любой совокупности σ-алгебр также является σ-алгеброй, то для любого семейства $\mathcal{K}$ подмножеств Ω существует и единственна $\sigma(\mathcal{K})$.

Если $\Omega = \mathbb{R}$, а $\mathcal{K}$ — совокупность открытых множеств в $\mathbb{R}$, то в качестве $\sigma(\mathcal{K})$ мы получаем *борелевскую* σ-алгебру подмножеств $\mathbb{R}$. Её обычно обозначают через $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ или $\mathcal{B}$. Множества из $\mathcal{B}$ называют *борелевскими* множествами.

Замечание 6.2 *Если* $\mathcal{T}$ *— класс полуинтервалов вида* $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, *то* $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}$.

Действительно, $\sigma(\mathcal{T})$ должна содержать полуинтервалы вида $(a, b]$, поскольку $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$. Но тогда замкнутость $\sigma(\mathcal{T})$ относительно счётных объединений влечёт принадлежность и интервалов $(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b - \varepsilon/n]$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. С другой стороны, любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить в виде объединения не более, чем счётного числа интервалов. Это влечёт равенство $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}$.

Определение 6.3 *Пусть* Ω *— некоторое множество и* $\mathcal{A}$ *— некоторая* σ*-алгебра его подмножеств. Пара* $(\Omega, \mathcal{A})$ *называется измеримым пространством.*

Введём ещё несколько определений, связанных с понятием вероятности.

Определение 6.4 *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A})$ *— измеримое пространство. Неотрицательная функция* $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ *называется аддитивной, если* $\mu(\varnothing) = 0$ *и для всех* $A, B \in \mathcal{A}$ *таких, что* $AB = \varnothing$, *выполняется равенство* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. *Функция* $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ *называется счётно-аддитивной, если* $\mu(\varnothing) = 0$ *и для любой последовательности* $\{A_N\} \subset \mathcal{A}$ *такой, что* $A_i A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *выполняется равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Определение 6.5 *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A})$ *— измеримое пространство. Функция* $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ *называется мерой на* $(\Omega, \mathcal{A})$, *если она счётно-аддитивна. Тройка* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *в этом случае называется пространством с мерой. Мера* μ *на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *называется вероятностной мерой, если* $\mu(\Omega) = 1$.

В дальнейшем под *вероятностным пространством* будем понимать тройку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, а $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{A})$. Это определение вероятностного пространства составляет *аксиоматику Колмогорова.*

Определение 6.6 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Функция $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ называется непрерывной, если $\mu(\varnothing) = 0$ и для всякой монотонной исчезающей последовательности $H_n \searrow \varnothing$ в $\mathcal{A}$ выполняется условие*

$$\mu(H_n) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Теорема 6.1 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство и $\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}_+$ — аддитивная функция. Для того, чтобы μ была счётно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной.*

Доказательство *Допустим, что μ является счётно-аддитивной и $\{H_n\} \subset \mathcal{A}$ — исчезающая последовательность. Определим $A_1 = H_1\bar{H}_2, A_2 = H_2\bar{H}_3, \ldots$. Поскольку $H_n \searrow \varnothing$, то $A_1, A_2, \ldots$ образуют последовательность попарно непересекающихся множеств в $\mathcal{A}$. При этом для $n = 1, 2, \ldots$ выполняется равенство $H_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. В силу счётной аддитивности получаем*

$$\mu(H_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)$$

и $\mu(H_n) \to 0$ при $n \to \infty$ как остаток сходящегося ряда.

Следствие 6.1 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — монотонная последовательность с $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Тогда $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Доказательство *Докажем это для монотонно возрастающей последовательности $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. В этом случае $H_n = A \setminus A_n$, $n = 1, 2, \ldots$ образует исчезающую последовательность и, следовательно, $\mu(H_n) = \mu(A) - \mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Уточним теперь понятие величины, определённой на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Естественно исходить из того, что случайная величина — это функция от элементарного события, то есть $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Однако такое понятие о случайной величине требует уточнения. Чтобы можно было говорить о вероятности того, что случайная величина ξ примет значение из интервала (a, b), необходимо, чтобы $\xi^{-1}((a, b)) = \{\omega : \xi(\omega) \in (a, b)\}$ было событием, то есть принадлежало σ-алгебре $\mathcal{A}$. Поскольку минимальным классом подмножеств $\mathbb{R}$, замкнутым относительно счетного числа теоретико-множественных операций и содержащим интервалы, является борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, то мы естественно приходим к следующему определению.

Определение 6.7 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Функция $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ называется случайной величиной, определённой на этом вероятностном пространстве, если для всякого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$ выполняется условие:*

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

то есть $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Поскольку операция взятия прообраза обладает свойствами

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \xi^{-1}(E_{\alpha}), \qquad \xi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} \xi^{-1}(E_{\alpha}),$$

то $\sigma(\xi) = \{A \subset \xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ является σ-алгеброй подмножеств Ω и $\sigma(\xi) \subset \mathcal{A}$.

Теорема 6.2 *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$. Тогда ξ — случайная величина.*

Доказательство *Нам нужно показать, что $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Обозначим $\mathcal{F} = \{B \subset \mathbb{R} : \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ и покажем, что $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй подмножеств . Действительно, $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ поскольку $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A}$. Если $B \in \mathcal{F}$, то $\xi^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \Omega \setminus \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ и $\mathbb{R} \setminus B$ также принадлежит $\mathcal{F}$. Наконец, если $B_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, ...$, то $\xi^{-1}(\cup_n B_n) = \cup \xi^{-1}(B_n)$ принадлежит $\mathcal{A}$, то есть $\cup_n B_n$ принадлежит $\mathcal{F}$. Таким образом выполнены условия, из которых следует, что $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй. Далее, по условию теоремы совокупность $\mathcal{I}$ полуинтервалов $(-\infty, x]$ содержится в $\mathcal{F}$. Но тогда и $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.*

Замечание 6.3 *В условиях теоремы полуинтервалы $(-\infty, x]$ можно заменить полуинтервалами любого из трёх видов: $(-\infty, x)$, (x, ∞), $[x, \infty)$.*

Определение 6.8 *Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, называются независимыми, если независимы σ-алгебры $\sigma(\xi_1), ..., \sigma(\xi_n)$, то есть для любых борелевских множеств $B_1, ..., B_n$ выполняется*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega : \xi_1(\omega) \in B_1, ..., \xi_n(\omega) \in B_n\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{\omega : \xi_k(\omega) \in B_k\}\right).$$

Случайную величину ξ, определённую на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, можно рассматривать как измеримое отображение измеримых пространств $(\Omega, \mathcal{A})$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. При этом вероятностную меру $\mathbb{P}$, определённую на $\mathcal{A}$, можно перенести на борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ посредством равенства

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in B\}), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что $\mathbb{P}_\xi$ является вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Действительно, $\mathbb{P}_\xi(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{R}\})$, а если $B_1, B_2, ...$ — попарно непересекающиеся борелевские множества, то

$$\mathbb{P}_\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\xi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-}1(B_n)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\xi^{-}1(B_n)\right)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\xi\left(B_n\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что множества (события) $\xi^{-}1(B_1), \xi^{-}1(B_2), ...$ также попарно не пересекаются.

Таким образом, каждая случайная величина ξ порождает вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$. При этом мера $\mathbb{P}_\xi$ называется распределением вероятностей случайной величины ξ.

Определение 6.9 *Функцию $F_\xi = \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\})$, определённую на $\mathbb{R}$, называют функцией распределения случайной величины ξ.*

Посредством функции распределения F_ξ сразу же определяется мера полуинтервалов $\mathbb{P}\xi((a, b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. С полуинтервалов мера $\mathbb{P}_\xi$ однозначно продолжается до меры на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Отметим характеристические свойства функции распределения:

1. $F_\xi(x)$ не убывает на $\mathbb{R}$;

2. $F_\xi(x)$ непрерывна справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$;

3. $F_\xi(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \qquad F_\xi(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$

Доказательство *Монотонность функции F_ξ следует из монотонности меры $\mathbb{P}_\xi$. Действительно, если $x' < x''$, то $(-\infty, x'] \subset (-\infty, x'']$ и $\mathbb{P}_\xi((-\infty, x']) \leq \mathbb{P}_\xi((-\infty, x''])$, то есть $F_\xi(x') \leq F_\xi(x'')$. Допустим теперь, что $x_n \searrow x$ при $n \to \infty$. Тогда $(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x]$ и по свойству непрерывности меры $\mathbb{P}_\xi$ имеем*

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\xi((-\infty, x_m]) = \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]) = F_\xi(x).$$

Тем самым доказана непрерывность справа функции F_ξ. Свойство 3 также следует из непрерывности меры $\mathbb{P}_\xi$, поскольку $(-\infty, x_m] \searrow \varnothing$ при $x_n \to -\infty$ и $(-\infty, x_m] \nearrow \mathbb{R}$ при $x_n \to \infty$.

Заметим, что любая функция F, определённая на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условиям 1-3, может рассматриваться, как функция распределения некоторой случайной величины.

В случае дискретной случайной величины ξ её функция распределения является ступенчатой. Среди непрерывных функций распределения выделяются абсолютно непрерывные, которые определяются плотностью

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$$

В качестве плотности может выступать любая неотрицательная функция f на $\mathbb{R}$, которая интегрируема на всей числовой оси и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)du = 1$$

В терминах плотности f_ξ просто выражаются следующие вероятности

$$\mathbb{P}(a < \xi < b) = \mathbb{P}(a \le \xi \le b) = \int_a^b f_\xi(x)dx.$$

Кроме того, в точках непрерывности плотности функция F_ξ дифференцируема и выполняется равенство

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x),$$

Среди наиболее часто встречающихся в приложениях абсолютно непрерывных распределений:

- Нормальное (или гауссовское) с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \qquad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

- Равномерное на $[a, b]$:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

- Показательное $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. $\lambda > 0$.
- Коши $f_\xi = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}$.

Совместное распределение случайных величин также можно описать функцией распределения. Пусть ξ и η — две случайные величины, определённые на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Тогда под их совместной функцией распределения понимают

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \mathbb{P}\left(\{\omega : \xi(\omega) \le x, \eta(\omega) \le y\}\right),$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Отметим свойства $F_{\xi,\eta}(x, y)$, как функции двух переменных.

1. $F_{\xi,\eta}(x,y)$ не убывает по каждому аргументу (переменной);
2. $F_{\xi,\eta}(x,y)$ непрерывна справа по каждой переменной и $F_{\xi,\eta}(-\infty,y) = F_{\xi,\eta}(x,-\infty) = 0$, $F_{\xi,\eta}(\infty,\infty) = 1$;
3. Для всех $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\Delta x \geq 0$, $\Delta y \geq 0$ выполняется неравенство
$$F_{\xi,\eta}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{\xi,\eta}(x, y+\Delta y) - F_{\xi,\eta}(x+\Delta x, y) + F_{\xi,\eta}(x,y) \geq 0.$$

Свойства 1-3 являются характеристическими для совместной функции распределения. Кроме того, совместная функция распределения содержит в себе индивидуальные (одномерные) функции распределения

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y), \qquad F_\eta(y) = \lim_{x\to\infty} F_{\xi,\eta}(x,y).$$

Важный класс непрерывных совместных функций распределения составляют абсолютно непрерывные, которые определяются плотностью распределения

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)du\,dv.$$

В терминах плотности удобно вычислять вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в область $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in D) = \iint_D f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy.$$

В качестве плотности совместного распределения двух случайных величин можно рассматривать любую неотрицательную функцию $f(x,y)$, для которой:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy = 1.$$

В точках непрерывности плотности $f_{\xi,\eta}(x,y)$ выполняется равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\xi,\eta}(x,y).$$

Если $F_{\xi,\eta}(x,y)$ является абсолютно непрерывной, то таковы F_ξ и F_η. При этом

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy, \qquad f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx.$$

Отметим также, что случайные величины ξ и η независимы в том и только том случае, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$. В абсолютно непрерывном случае это эквивалентно равенству $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$. Аналогично рассматривается совместное распределение n случайных величин.