# 7. Математическое ожидание

Ранее мы определили математическое ожидание для дискретных случайных величин. В общем случае математическое ожидание (если оно существует) вводится путём аппроксимации случайной величины простыми случайными величинами и предельным переходом.

***Теорема 7.1 (Аппроксимационная)*** *Пусть $\xi$ — неотрицательная случайная величина, определённая на вероятностном пространстве $\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$. Тогда найдётся последовательньость $\{\xi_n\}$ простых неотрицательных случайных величин такая, что $\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$.*

***Доказательство*** *Для каждого натурального $n$ введём разбиение $\mathcal{D}_n = \{\Delta_n, D_1^{(n)}, ..., D_{n\cdot 2^n}^{(n)}\}$, где $\Delta_n = \{\omega : \xi(\omega) \geq n\}$ и*

$$D_k^{(n)} = \left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}, \qquad k = 1, 2, ..., n \cdot 2^n.$$

*Определим*

$$\xi_n = n \cdot \mathbb{1}_{\Delta_n} + \sum_{k=1}^{n\cdot 2^b} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{D_k^{(n)}}.$$

*И покажем, что $\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Докажем вначале монотонность. Пусть $\omega \in \Omega$ фиксированно. Если $\xi(\omega) \geq n$, то $\xi_n(\omega) = n$, а $\xi_{n+1}(\omega) \geq n$, как видно из определения последовательности случайных величин. В случае $\xi(\omega) < n$ найдётся $k \leq n \cdot 2^n$ такое, что $\omega \in D_k^{(n)}$. Но тогда $\xi_n(\omega) = (k-1)2^{-n}$, а*

$$D_k^{(n)} = D_{2k-1}^{(n+1)} \bigcup D_{2k}^{(n+1)}.$$

*Если $\omega \in D_{2k-1}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega) = (2k-2)2^{-(n+1)} = (k-1)2^{-n} = \xi_n(\omega)$, а если $\omega \in D_{2k}^{(n+1)}$, то $\xi_{n+1}(\omega) = (2k-1)2^{-(n+1)} = (k-1)2^{-n} + 2^{-(n+1)} = \xi_n(\omega) + 2^{-(n+1)}$. Монотонность последовательности $\{\xi_n\}$ таким образом доказана. Далее, для фиксированного $\omega \in \Omega$ найдется такое натуральное $N$, что $\xi(\omega) < N$. Из построения последовательности следует, что при $n \geq N$ будут выполнятся неравенства*

$$\xi_n(\omega) \leq \xi(\omega) < \xi_n(\omega) + 2^{-n}.$$

*Отсюда видно, что $\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)$ при $n \to \infty$.*

***Теорема 7.2*** *Пусть $\eta, \xi_1, \xi_2, ...$ — простые неотрицательные случайные величины и $\xi_n(\omega) \nearrow \xi(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда*

$$\mathbb{E}\eta \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n.$$

***Доказательство*** *Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и определяем*

$$A_n = \{\omega : \xi_n(\omega) \geq \eta(\omega) - \varepsilon\}, \qquad n = 1, 2, ...$$

*Поскольку*

$$\xi_n = \xi_n \mathbb{1}_{A_n} + \xi_n \mathbb{1}_{\bar{A}_n} \geq (\eta - \varepsilon)\mathbb{1}_{A_n} = \eta - \varepsilon \mathbb{1}_{A_n} - \eta \mathbb{1}_{\bar{A}_n} \geq \eta - \varepsilon - M \cdot \mathbb{1}_{\bar{A}_n},$$

*где $M = \max \eta$, то*

$$\mathbb{E}\xi_n \geq \mathbb{E}\eta - \varepsilon - M \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_n).$$

*Из монотонности последовательности $\{\xi_n\}$ и условия $\xi \geq \eta$ следует, что $A_n \nearrow \Omega$ при $n \to \infty$. Но тогда $\bar{A}_n \searrow \varnothing$ и в силу непрерывности вероятностной меры $\mathbb{P}(\bar{A}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim \mathbb{E}\xi_n \geq \mathbb{E}\eta - \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon$ выбиралось произвольно, то $\lim \mathbb{E}\xi_n \geq \mathbb{E}\eta$. и теорема доказана.*

***Следствие 7.1*** *Пусть $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ — две последовательности простых неотрицательных случайных величин и $\xi_n \nearrow \xi$, $\eta_n \nearrow \xi$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\xi_n = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\eta_n.$$

***Доказательство*** *Из теоремы следует, что для каждого $k = 1, 2, ...$ выполняется неравенство*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\xi_n \geq \mathbb{E}\eta_k.$$

*Но тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\xi_n \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\eta_n.$$

*Меняя ролями эти последовательности, получим обратное неравенство, что и влечёт требуемое равенство.*

***Определение 7.1*** *Пусть $\xi$ — неотрицательная случайная величина и $\xi_n \nearrow \xi$, где $\{\xi_n\}$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин. Тогда*

$$\mathbb{E}\xi = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\xi_n,$$

*если этот предел конечен.*

Заметим, что существование последовательности $\{\xi_n\}$ следует из теоремы 1, а то, что определение $E\xi$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, следует из теоремы 2 и следствия.

Для произвольной случайной величины $\xi$ рассматриваются две неотрицательные случайные величины

$$\xi^+ = \max\{\xi, 0\}, \qquad \xi^- = \max\{-\xi, 0\}.$$

Очевидно, что $\xi = \xi^+ - \xi^-$. В случае, когда $\mathbb{E}\xi^+$ и $\mathbb{E}\xi^-$ конечны, будем говорить, что  имеет конечное математическое ожидание

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$$

.

Введённое математическое ожидание сохраняет основные свойства, которые были установлены для простых случайных величин:

1. Линейность: $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$.
2. Монотонность: Если $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0 \implies \xi = 0$.
3. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$

Кроме того, если $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, то $\xi = \prod_{k=1}^n \xi_k$ также имеет конечное математическое ожидание и выполняется равенство

$$\mathbb{E}\xi = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\xi_k.$$

В действительности, определение $\mathbb{E}\xi$, приведённое выше, является интегралом Лебега от функции $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ по мере $\mathbb{P}$ и

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Как ранее отмечалось, с каждой случайной величиной $\xi$ ассоциируется новое вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$, где $\mathcal{B}$ — борелевская $\sigma$-алгебра на $\mathbb{R}$, а $\mathbb{P}_\xi$ — распределение вероятностей (борелевская мера) случайной величины $\xi$. Все вычисления, связанные со случайной величиной $\xi$ мы можем перенести на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$. В частности, если $\xi$ имеет конечно математическое ожидание $\mathbb{E}\xi$, то

$$\mathbb{E}\xi = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_\xi(x).$$

Кроме того, если $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — борелевская функция (для любого борелевского множества $B$ прообраз $\varphi^{-1}(B)$ также является борелевским множеством), то $\eta = \varphi(\xi)$ также будет случайной величиной. При этом, если $\eta$ имеет конечное математическое ожидание $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\varphi(\xi)$, то

$$\mathbb{E}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mathbb{P}_\xi(x). \tag{7.1}$$

Эта формула даёт $\mathbb{E}\xi$ при $\varphi(x) = x$. Таким образом формула 7.1 является основной при вычислениях, связанных со случайной величиной $\xi$. В частности, для вычисления дисперсии $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ требуется существование интерала

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mathbb{P}_\xi(x).$$

В случае дискретной случайной величины $\xi = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{1}_{\mathbb{D}_k}$ формула 7.1 принимает вид

$$\mathbb{E}\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)\mathbb{P}_\xi(x_k) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)\mathbb{P}(\xi = x_k).$$

Если же распределение вероятностей случайной величины $\xi$ описывается плотностью $f_\xi$, то формула 7.1 записывается в виде

$$\mathbb{E}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x) dx.$$

Интуитивно этот интеграл можно трактовать как бесконечную «сумму» произведений значений $\varphi(x)$ случайной величины $\varphi(\xi)$ на вероятность $f_\xi(x)dx$, с которой эти значения принимаются.

Отметим, что определение математического ожидания, по существу, воспроизводит конструкцию интеграла Лебега по счётно-аддитивной мере. Кроме того, если $\xi$, $\eta$ — две случайные величины, определённые на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, то мы можем рассмотреть измеримое отображение $(\xi, \eta) : (\Omega, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ — минимальная $\sigma$-алгебра подмножеств в $\mathbb{R}^2$, порождённая открытыми множествами. Как и в сучае одной случайной величины, мы можем определить на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ меру посредством равенства

$$\mathbb{P}_{\xi,\eta}(B) = \mathbb{P}((\xi, \eta) \in B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

$\mathbb{P}_{\xi,\eta}$ — совместное распределение случайных величин $\xi$ и $\eta$, или распределение вероятностей случайного вектора $(\xi, \eta)$. Посредством совместной функции $F_{\xi,\eta}(x, y)$ легко определяются вероятности прямоугольников $(a, b] = \{(x, y) : a_1 < x \leq b_1, a_2 < y \leq b_2\}$, $a, b \in \mathbb{R}^2$. В случае абсолютно непрерывного распределения $\mathbb{P}_{\xi,\eta}$, когда существует плотность $f_{\xi,\eta}(x,y)$, вероятность попадания случайной точки $(\xi,\eta)$ в область $D \subset \mathbb{R}^2$ определяется двойным интегралом

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in D) = \iint_D f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy.$$

Если $\varphi(x,y)$ — борелевская функция и $\zeta = \varphi(x,y)$ имеет конечное мат.ожидание, то

$$\mathbb{E}\varphi(\xi,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy.$$

В частности,

$$\mathbb{E}\xi\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy.$$