8. Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева позволяет оценить вероятность отклонения случайной величины от её математического ожидания на заданную величину в терминах дисперсии.

Теорема 8.1 *Пусть случайная величина ξ имеет конечную дисперсию (конечный второй момент). Тогда для $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}, \tag{8.1}$$

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}. \tag{8.2}$$

Доказательство *Из очевидного неравенства*

$$|\xi| = |\xi|\mathbb{1}_{\{|xi|\geq\varepsilon\}} + |\xi|\mathbb{1}_{\{|xi|<\varepsilon\}} \geq \varepsilon\mathbb{1}_{\{|xi|\geq\varepsilon\}}$$

И свойства монотонности математического ожидания получаем

$$\mathbb{E}|\xi| \geq \varepsilon\mathbb{P}(|xi| \geq \varepsilon),$$

Откуда следует неравенство 8.1. Доказательство неравенства 8.2 основывается на доказанном неравенстве 8.1.

Действительно,

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство 8.1 иногда называют неравенством Маркова. Для его выполнения достаточно конечности первого момента, то есть $\mathbb{E}|\xi| < \infty$. Конечность второго момента, то есть $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, влечёт и конечность первого момента. Это следует из неравенства Шварца

$$(\mathbb{E}\xi\eta)^2 \leq (\mathbb{E}\xi^2)(\mathbb{E}\eta^2),$$

которое легко переносится с простых случайных величин на произвольные. Неравенство 8.2 известно как неравенство Чебышева.

Приведем одно из приложений неравенства Чебышева, известное, как «правило трёх сигм». Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием $m = \mathbb{E}\xi$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi$. Тогда применение неравенства Чебышева с $\varepsilon = 3\sigma$ даёт

$$\mathbb{P}(|\xi - m| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$$

Это общее неравенство существенно улучшается в случае конкретных распределений. В частности, если случайная величина ξ имеет нормальное распределение, то вероятность отклонения ξ от m очень близка к нулю.

Теорема 8.2 (Закон больших чисел Чебышева) *Пусть* $\xi_1, \xi_2, ...$ — *последовательность независимых случайных величин, для которых* $\mathbb{D}\xi_n \leq C$, $n = 1, 2, ...$, *при некотором* $C > 0$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \qquad S_n = \xi_1 + ... + \xi_n.$$

Доказательство *Применяя неравенство Чебышева 8.2 , получаем*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}S_n}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Поскольку случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ *независимы, то*

$$\mathbb{D}S_n = \mathbb{D}\xi_1 + ... + \mathbb{D}\xi_n \leq C \cdot n.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C \cdot n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{C}{\varepsilon^2 n} \to 0$$

При $n \to \infty$.

Следствие 8.1 *Пусть* $\xi_1, \xi_2, ...$ — *последовательность независимых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями* $\mathbb{E}\xi_n = a$ *и одинаковыми дисперсиями* $\mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$, $n = 1, 2, ...$ *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Предельные соотношения в теореме 2 и следствии принято называть законами больших чисел. Содержание закона больших чисел состоит в том, что среднее арифметическое суммы независимых случайных величин становится близким к постоянной с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, при числе слагаемых, стремящимся к бесконечности. Один из первых законов больших чисел был получен Бернулли.

Теорема 8.3 (Бернулли) *Пусть* S_n — *число успехов в серии из* n *независимых испытаний с вероятностью* p, $0 < p < 1$, *в отдельном испытании. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Доказательство *Пусть ξ_k — индикатор успеха в k-ом испытании, то есть $\xi_k = 1$, если в k-ом испытании произошёл успех, и $\xi_k = 0$ в противном случае. Тогда $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. При этом*

$$\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{E}\xi_k = p, \quad \mathbb{D}\xi_k = p(1-p).$$

Применяя к этой последовательности следствие, получаем требуемое утверждение.

Замечая, что в условиях предыдущей теоремы S_n — количество успехов в n испытаниях, а S_n/n — частота появления успеха, приходим к теоретическому обоснованию того, что вероятность события проявляется через частоту его появления.