1. Радиус сходимости степенного ряда

Степенной ряд — это функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где a_n, $x_0 \in \mathbb{R}$, x — вещественная переменная.

Со степенным рядом (1) связывается неотрицательное число R (или символ $+\infty$), что для всех $x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0|<R$ ряд (1) сходится, а для всех $x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0|>R$ ряд (1) расходится. Величина R называется *радиусом сходимости*, а $(x_0-R,\, x_0+R) := \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0|<R\}$ — *интервалом сходимости* ряда (1). Радиус сходимости является основной характеристикой степенного ряда.

Через коэффициенты ряда (1) радиус сходимости выражается *формулой Коши-Адамара*

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пример 1. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$.

Решение. Поскольку последовательность $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n}$ имеет два частичных предела: $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} \to e$ и $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} \to 1/e$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$ и, значит, по формуле Коши-Адамара радиус сходимости $R = \frac{1}{e}$. $\square$

Пример 2. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$.

Решение. *I способ.* Члены данного ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2x^2$. Так что ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$, т.е. при всех x: $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, радиус сходимости $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

II способ. Воспользуемся формулой Коши-Адамара. Поскольку

$$a_n = \begin{cases} 2^k, & \text{если } n = 2k; \\ 0, & \text{если } n = 2k-1, \end{cases}$$

имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^k} = \sqrt{2}$$

и, следовательно, радиус сходимости $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Замечание. При решении задачи способом II часто получают ошибочный ответ $R = \frac{1}{2}$, неверно полагая, что $a_n = 2^n$.

Сделаем одно уточнение: если $|x-x_0|<R$, то ряд (1) не просто сходится, а сходится абсолютно; если $|x-x_0|>R$, то последовательность $\{a_n(x-x_0)^n\}$ не является бесконечно малой и, значит, ряд из модулей членов (1) расходится. Так что верно

Предложение 1. *Пусть $R \in [0, +\infty]$ удовлетворяет условию ($\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0|<R$ ряд (1) абсолютно сходится, а $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-x_0|>R$ ряд (1) абсолютно расходится), тогда R — радиус сходимости ряда (1).*

Предложение 1 позволяет при нахождении радиуса сходимости применять признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Пример 3. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{3n}$.

Решение. Обозначим n-й член ряда через u_n. Тогда $\forall\, x \neq 0$

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}|x|^3 = \frac{n+1}{2n+3}|x|^3 \to \frac{|x|^3}{2}, \quad n \to \infty.$$

При $|x| < \sqrt[3]{2}$ ряд сходится абсолютно[1], а при $|x| > \sqrt[3]{2}$ расходится абсолютно по признаку Даламбера. По предложению 1 радиус сходимости $R = \sqrt[3]{2}$. □

Пример 4. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n+9^n} x^{2n-1}$.

Решение. Обозначим n-й член ряда через u_n. Тогда $\forall x \neq 0$

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{9\sqrt[n]{1+(\frac{4}{9})^n}}|x|^{2-\frac{1}{n}} \to \frac{|x|^2}{9}, \quad n \to \infty.$$

Здесь воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^{1/n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+(\frac{4}{9})^n\right)^{1/n} = 1$ (последнее равенство вытекает из $1 < \left(1+(\frac{2}{3})^n\right)^{1/n} < 1+(\frac{2}{3})^n$ и Т о зажатой последовательности).

При $|x| < 3$ ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 3$ расходится абсолютно по признаку Коши. По предложению 1 радиус сходимости $R = 3$. □

Если R — радиус сходимости ряда (1) и $0 < R < +\infty$, то на концах интервала $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ ряд (1) может сходится, а может расходиться.

Пример 5. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - n\sin\frac{1}{n})x^n$.

Решение. Обозначим n-й член ряда через u_n. Зафиксируем $x \neq 0$. Используя представление $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, $t \to 0$, имеем $u_n(x) \sim v_n(x)$ при $n \to \infty$, где $v_n(x) = \frac{x^n}{6n^2}$. Если $|x| \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ абсолютно сходится, а значит, по признаку сравнения абсолютно сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Если $|x| > 1$, то оба расходятся: их общие члены не стремятся к нулю. Так что множество сходимости ряда $[-1, 1]$. □

Пример 6. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{1+\ln n}$.

Решение. Радиус сходимости данного ряда равен 1, поэтому ряд (абсолютно) сходится при всех x: $|x-1| < 1$, т.е. на интервале $(0, 2)$, и расходится при всех x: $|x-1| > 1$. При $x = 2$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$ расходится по признаку сравнения: его общий член эквивалентен члену расходящегося ряда $\frac{1}{\ln n}$. При $x = 0$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln n}$ сходится по признаку Лейбница: последовательность $\{\frac{1}{\ln n}\}$ монотонно убывая стремится к нулю. Так что множество сходимости ряда $[0, 2)$. □

Отметим, что если ряд сходится условно (для степенного ряда это возможно лишь на концах интервала сходимости), то замена последовательности его членов на эквивалентную может привести к потере сходимости.

2. Ряды Тейлора

[1] При $x = 0$ это, очевидно, выполняется. Вообще, при $x = x_0$ ряд (1) сходится абсолютно: все его члены, начиная со второго, равны нулю.

В этом пункте займемся вопросом представления функции степенным рядом.

Теорема. *Если функция f в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 разлагается в ряд по степеням $x-x_0$, т.е. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ для всех $x\in U(x_0)$, то f бесконечно дифференцируема в $U(x_0)$ и коэффициенты разложения $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Другими словами, единственным степенным рядом, представляющим f в окрестности точки x_0, является *ряд Тейлора* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Отсюда вытекает, что необходимым условием разложимости в ряд по степеням $x-x_0$ является наличие у функции f в некоторой окрестности точки x_0 производных любого порядка. Как показывают следующие примеры, это условие не является достаточным.

Пример 7. Показать, что функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определенная по формуле

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0,\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ с $f^{(n)}(0)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}_0$.

Решение. Существование производных любого порядка в точке $x\neq 0$ следует из Т о производной сложной функции. Более того, для n-й производной имеем $f^{(n)}(x)=0$ при $x<0$ и $f^{(n)}(x)=p_n(1/x)e^{-1/x}$ при $x>0$, где $p_n(t)$ — многочлен степени $2n$. Последнее утверждение можно установить по индукции: дифференцирование $f^{(n)}$ показывает, что p_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$p_{n+1}(t)=t^2[p_n(t)-p_n'(t)],\qquad p_0(t)=1.$$

Индукцией по n покажем, что $f^{(n)}(0)=0$. Рассмотрим $f'(0)$. Очевидно левая производная $f'_-(0)=0$, т.к. $f(h)=0$ при $h\leqslant 0$. Правая производная

$$f'_+(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{e^{-1/h}}{h}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0.$$

Если предположить, что $f^{(n)}(0)=0$, то очевидно $(f^{(n)})'_-(0)=0$ и

$$(f^{(n)})'_+(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{p_n(1/h)e^{-1/h}}{h}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tp_n(t)}{e^t}=0,$$

т.к. по правилу Лопиталя $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^m}{e^t}=0$ для всех $m\in\mathbb{N}_0$. Получаем $f^{(n+1)}(0)=0$, что завершает доказательство.

Итак, для функции f ряд Тейлора в точке $x_0=0$ нулевой, но он не сходится к f ни в какой окрестности нуля. $\square$

Другим препятствием разложимости функции f по степеням $x-x_0$ является расходимость ряда Тейлора при $x\neq x_0$.

Пример 8. Показать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}\cos(n^2x)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, однако ее ряд Тейлора в точке $x_0=0$ имеет нулевой радиус сходимости.

Решение. Исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}\cos(n^2x)$ и почленно продифференцированный ряд $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n}n^2\sin(n^2x)$ сходятся равномерно на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса: их общие члены оцениваются по модулю членом сходящегося ряда $2^{-n}n^2$. Отсюда по Т о дифференцировании функционального ряда заключаем, что функция f непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ с $f'(x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}n^2\sin(n^2x)$.

Рассуждения можно повторить для f' и, далее, индукцией по $k \in \mathbb{N}$ заключить, что

$$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}n^{4k-2}\sin(n^2x), \qquad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}n^{4k}\cos(n^2x).$$

Поэтому $f^{(2k-1)}(0) = 0$ и $|f^{(2k)}(0)| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}n^{4k}$ и, значит,

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|x^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2x}{2k}\right)^{2k} 2^{-n},\ x \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Если положить $n = 2k$, получим

$$\frac{|f^{(2k)}(0)|x^{2k}}{(2k)!} > (kx)^{2k} > 1$$

при $x \neq 0$ и $k > \frac{1}{|x|}$, откуда следует, что ряд Маклорена функции f расходится при $x \neq 0$.

Приведем одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Пример 9. Пусть функция f в окрестности $U_\rho(x_0)$ точки x_0 имеет производные любого порядка и существует такое число C, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Cn!}{\rho^n}$ для всех $n = 0, 1, \ldots$ и всех $x \in U_\rho(x_0)$. Показать, что f на $U_\rho(x_0)$ разлагается в ряд по степеням $x - x_0$.

Решение. Поскольку $\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|} \leqslant \frac{\sqrt[n]{C}}{\rho} \to \frac{1}{\rho}$, то по формуле Коши-Адамара радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ не меньше ρ. Покажем, что этот ряд сходится к f. Для этого воспользуемся формулой Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$$

и остаточный член запишем в форме Лагранжа $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где точка ξ лежит между x и x_0. Так как для $f^{(n+1)}(\xi)$ справедлива оценка, заявленная в условии, то

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{C}{\rho^{n+1}}|x-x_0|^{n+1} = C\left|\frac{x-x_0}{\rho}\right|^{n+1}.$$

Поскольку $|x - x_0| < \rho$, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, что завершает доказательство. □

Пример 10. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x - x_0| < R$, и $f(x_n) = 0$, где $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Показать, что $f \equiv 0$ при $|x - x_0| < R$.

Решение. Воспользуемся тем, что функция f бесконечно дифференцируема на интервале сходимости с $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$. Для доказательства достаточно показать, что все коэффициенты a_k равны нулю. Сделаем это по индукции. Имеем $a_0 = f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Пусть утверждение верно для $k \geqslant 0$, т.е. $a_k = 0$ и в интервале сходимости существует последовательность точек $x_n^{(k)} \neq x_0$, что $f^{(k)}(x_n^{(k)}) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0$. Тогда по Т Ролля для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n^{(k+1)} \in (x_n^{(k)}, x_{n+1}^{(k)})$, что $f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0$. Имеем $x_n^{(k+1)} \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(k+1)} = x_0$ и

$$a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} \lim_{n\to\infty} f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)}) = 0. \ \square$$

3. Приемы разложения функций в степенной ряд

Изложенные ниже приемы опираются на следующие утверждения:

1) Каким бы способом функция f не была бы разложена в степенной ряд, этот ряд будет ее рядом Тейлора (единственность разложения).

2) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R_1$, и $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < R_2$, и $R = \min\{R_1,\ R_2\}$. Тогда при $|x-x_0| < R$ указанные ряды можно складывать/вычитать и перемножать, при этом получим разложения функций $f \pm g$ и fg соответственно

$$(f \pm g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n, \quad (fg)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)(x-x_0)^n.$$

Кроме того, если $R_1 \neq R_2$, то R является радиусом сходимости ряда с коэффициентами $a_n \pm b_n$.

3) Почленно проинтегрированный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ и почленно продифференцированный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ имеют тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд, причем при $|x-x_0| < R$ суммами этих рядов являются $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ и $f'(x)$ соответственно.

Будем использовать следующие стандартные разложения.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty, \tag{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad |x| < +\infty, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < +\infty, \tag{3 - 4}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{\alpha}^n x^n, \quad |x| < 1, \ \text{ где } C_{\alpha}^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \ \alpha \notin \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1. \tag{6}$$

Пример 11. Разложить функцию $f(x) = \sin x \cos 3x$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Поскольку $f(x) = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$, то

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (2^{2n+1}-1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Поскольку вычитались ряды, сходящиеся всюду, радиус сходимости итогового ряда $R = +\infty$. $\square$

Пример 12. Разложить функцию $f(x) = \frac{5x+4}{2x^2-x-6}$ в ряд по степеням $x+1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Сделав замену $x+1 = t$, получим $f(x) = \frac{5t-1}{2t^2-5t-3} = \frac{5t-1}{(2t+1)(t-3)} =: g(t)$. Представим функцию g в виде суммы элементарных дробей:

$$g(t) = \frac{2}{t-3} + \frac{1}{2t+1} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{3}} + \frac{1}{1+2t} = g_1(t) + g_2(t).$$

Поскольку

$$g_1(t) = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{3^n}, \quad |t| < 3; \qquad g_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n t^n, \quad |t| < \frac{1}{2},$$

то при $|t| < \frac{1}{2}$ имеем представление $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n - \frac{2}{3^{n+1}}\right)t^n$. Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n - \frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+1)^n, \quad R = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Пример 13. Используя дифференцирование степенного ряда, найти разложение функции $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ в ряд по степеням x.

Решение. Функция $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x-2}\right)$ и при $|x| < 2$ справедливо разложение $\frac{1}{2-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$. Почленно продифференцированный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)$ имеет тот же радиус сходимости и на интервале сходимости сходится к $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2-x}\right)$. В итоге получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n, \quad |x| < 2. \quad \square$$

Пример 14. Найти разложение функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд по степеням x.

Решение. Функцию f нельзя представить в виде комбинации "стандартных"разложений, однако

$$\operatorname{arctg}' t = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}, \quad |t| < 1.$$

Интегрируя от 0 до x, получим

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

При интегрировании радиус сходимости не меняется, так что полученное разложение имеет место при $|x| < 1$. $\square$

Пример 15. Разложить функцию $f(x) = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ в ряд по степеням $x-1$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Сделав замену $x-1=t$, получим $f(x)=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) =: g(t)$. Далее,

$$g'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-1/2}^{n}(t^2)^n, \quad |t|<1.$$

Проинтегрируем полученное разложение. Учитывая, что $C_{-1/2}^{n}=\frac{(-\frac12)(-\frac32)\ldots(-\frac12-n+1)}{n!}= =\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$, получим

$$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(u)du=t+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-1/2}^{n}\int_0^t u^{2n}du=t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}t^{2n+1}.$$

Так как при интегрировании радиус сходимости не меняется, то радиус сходимости полученного ряда также равен 1. В итоге

$$f(x)=x-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}(x-1)^{2n+1}, \quad R=1. \quad \square$$

Пример 16. Разложить функцию $f(x)=\int\limits_0^{2x}\operatorname{arctg}(t^2/2)dt$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

Решение. Функция f есть композиция функций $F(u)=\int\limits_0^{u}\operatorname{arctg}(t^2/2)dt$ и $u(x)=2x$. Учитывая, что $F'(u)=\operatorname{arctg}(u^2/2)$, по Т о производной сложной функции имеем

$$f'(x)=F'(u(x))u'(x)=2\operatorname{arctg}(2x^2).$$

Ввиду примера 14 $\operatorname{arctg}(2x^2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(2x^2)^{2n+1}$, причем ряд сходится при $2x^2<1$ и расходится при $2x^2>1$. Откуда заключаем, что радиус сходимости полученного ряда равен $\frac{1}{\sqrt2}$. Проинтегрируем полученное разложение для f':

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^{n+1}}{(2n+1)(4n+3)}x^{4n+3}, \quad R=\frac{1}{\sqrt2}. \quad \square$$

Пример 17. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решение. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Радиус сходимости этого ряда равен 1, в точках $x=\pm1$ ряд также сходится, поэтому его сумма f определена на отрезке $[-1,1]$. Необходимо найти $f(-1)$. На $[-1,1]$ член ряда по модулю оценивается членом сходящегося ряда $\frac{1}{n(n+1)}$, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно и, значит, функция f непрерывна на этом отрезке.

На интервале $(-1,1)$, ввиду (6), справедлива формула

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).$$

Проинтегрировав это равенство, получим $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$, $|x|<1$. В силу непрерывности f в точке $x=-1$ имеем $f(-1)=2\ln2-1$. $\square$

Степенные ряды имеют широкий спектр приложений. Мы ограничимся одним примером применения степенных рядов в теории дифференциальных уравнений.

Пример 18. Найти для $m \in \mathbb{N}$ частное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0.$$

Решение. Решение уравнения будем искать в виде степенного ряда $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Имеем

$$x^2y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n, \quad xy' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n, \quad x^2 y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n,$$

тогда, подставляя эти выражения в исходное уравнение и приводя подобные слагаемые, получим

$$a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n - m^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

откуда, ввиду единственности разложения, $a_0 = a_1 = 0$, $(n^2 - m^2)a_n = -a_{n-2}$. Так что $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2-m^2}$ при $n \neq m$ и, значит, если m четно (нечетно), то все нечетные (четные) коэффициенты $a_n = 0$, т.к. с точностью до ненулевого множителя они совпадают с a_1 (соответственно с a_0). По этой же причине $a_n = 0$ при $n < m$ и n той же четности, что и m. Для оставшихся коэффициентов имеем

$$a_{m+2k} = -\frac{a_{m+2k-2}}{(2k+m)^2 - m^2} = \frac{(-1)^k a_m}{((2k+m)^2 - m^2)((2k+m-2)^2 - m^2) \cdot \ldots \cdot ((m+2)^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{(-1)^k a_m}{2k(2k+2m)\,(2k-2)(2k+2m-2) \cdot \ldots \cdot 2(2m+2)} = \frac{(-1)^k a_m m!}{k!(m+k)!2^{2k}}.$$

Решение с условием $a_m = \frac{1}{m!}$ называется *функцией Бесселя m-го порядка* и обозначается $J_m(x)$. Таким образом,

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится на всей числовой прямой.

Известно, что любое решение уравнения Бесселя, ограниченное в окрестности нуля, пропорционально $J_m(x)$. $\square$