1. Основные понятия

Определение. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность. Выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *рядом* с n-м членом a_n. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ существует и конечен, то его называют *суммой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и говорят, что ряд *сходится* (к этой сумме). В противном случае говорят, что ряд *расходится*. Сумму $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называют *n-й частичной суммой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Решение. Заметим, что n-й член ряда можно записать в виде $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Тогда n-я частичная сумма ряда

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Откуда сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$. $\square$

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства.

Свойство 1 (*необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Свойство 2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся соответственно к суммам A и B, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+\sqrt[n]{n}}$.

Решение. Поскольку существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то последовательность $\{a_n\}$ членов ряда имеет два различных частичных предела — 1 и -1, и следовательно, расходится. По необходимому условию ряд расходится. $\square$

Применяя критерий Коши к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ получим *критерий Коши сходимости ряда.*

Теорема 1. *Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}: \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Следствие. *Изменение конечного числа членов ряда не меняет его сходимости.*

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$.

Решение. Покажем, что ряд удовлетворяет отрицанию условия Коши. При этом будем использовать следующее замечание: числа $|\sin n|$ и $|\sin(n+1)|$ не могут принимать одновременно маленькие значения, точнее, если $|\sin n| < \sin\frac{1}{4}$, то $|\cos n| = \sqrt{1-\sin^2 n} >$

$> \sqrt{1-\sin^2\frac{1}{4}} = \cos\frac{1}{4}$ и, значит,

$$|\sin(n+1)| \geqslant |\cos n \sin 1| - |\sin n \cos 1| > \cos\frac{1}{4}\sin 1 - \sin\frac{1}{4}\cos 1 = \sin\frac{3}{4}.$$

Поэтому сумма любой пары $|\sin n| + |\sin(n+1)| > \sin\frac{1}{4}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \frac{|\sin k|}{k} \geqslant \frac{1}{3n}\sum_{m=1}^{n}(|\sin(n+2m-1)| + |\sin(n+2m)|) > \frac{\sin\frac{1}{4}}{3} > 0.$$

По критерию Коши ряд расходится. □

Замечание. В дальнейшем (пример 12) будет приведено еще одно решение данного примера.

2. Ряды с неотрицательными членами

Если члены ряда неотрицательны, то последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ нестрого возрастает и, значит, (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует. Этот предел конечен (что эквивалентно сходимости ряда) только в случае ограниченности $\{S_n\}$. Отсюда нетрудно установить следующий факт.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда*

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Следствие. *Если $a_n > 0$, $b_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$ (в частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$), то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Следующие ряды можно рассматривать как эталонные.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$; $\quad \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ сходится $\Leftrightarrow$ ($\alpha > 1$, β – любое) или ($\alpha = 1$, $\beta > 1$).

Пример 4. Исследовать на сходимость ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{1}{n})$.

Решение. а) Поскольку n-й член $a_n = \frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot(2n)} \geqslant \frac{1}{2n}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ расходится, то данный ряд расходится по признаку сравнения.

б) Перепишем n-й член ряда в виде $a_n = 2\sin^2\frac{1}{2n}$. Для его оценки воспользуемся неравенством $|\sin t| < t$ при всех $t > 0$, откуда $a_n < \frac{1}{2n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ сходится, поэтому данный ряд сходится по признаку сравнения. □

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{\sqrt{n}}}$.

Решение. Так как $e^{\sqrt{n}} \to +\infty$ быстрее любой степени n, это наводит на мысль, что ряд сходится. Для обоснования сравним его с каким-нибудь сходящимся рядом, например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{\sqrt{n}}} = 0$$

и, значит, $\frac{n}{e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{1}{n^2}$ при всех достаточно больших n. Ряд сходится по признаку сравнения. $\square$

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\cos\frac{1}{n}}{(\sqrt[n]{2}-1)^{\alpha}}$ при всех значениях $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решение. Выделим «главную» часть n-го члена ряда a_n. Для этого воспользуемся следующими разложениями по формуле Тейлора $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $\ln(1+t) = t + o(t)$, $e^t = 1 + t + o(t)$ при $t \to 0$. Имеем

$$\ln\cos\frac{1}{n} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при } n \to \infty,$$

$$\sqrt[n]{2} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1 = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } \ n \to \infty.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{-\frac{1}{2n^2}(1+o(1))}{\left(\frac{\ln 2}{n}\right)^{\alpha}(1+o(1))^{\alpha}} \sim \frac{C(\alpha)}{n^{2-\alpha}} \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $C(\alpha)$ — ненулевая константа, зависящая от α. По следствию из признака сравнения данный ряд сходится $\Leftrightarrow 2 - \alpha > 1$, т.е. при $\alpha < 1$. $\square$

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n+n^2\ln n}$.

Решение. Поскольку $a_n = \frac{\ln n}{n^2\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n\ln n}} = 1$, то n-й член $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$ — члену сходящегося ряда. По следствию из признака сравнения данный ряд сходится. $\square$

Сравнением ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ (сходящимся только при $|q| < 1$), получаются следующие два признака.

Признак Коши. Пусть все $a_n \geqslant 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ расходится.

Признак Даламбера. Пусть все $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится, а при $q > 1$ расходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$.

Решение. а) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 < 1$, то ряд сходится по признаку Коши.

б) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\frac{(1+1/n)^n}{(1+2/n)^n} = \frac{3}{e} > 1$, то ряд расходится по признаку Коши. $\square$

Пример 9. Исследовать на сходимость ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^n n!}$.

Решение. а) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, то ряд сходится по признаку Даламбера.

б) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{3(n+1)} = \frac{2}{3} < 1$, то ряд сходится по признаку Даламбера. $\square$

3. Ряды с произвольными членами

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Важно понимать, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Решение. Поскольку

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}},$$

то данный ряд сходится абсолютно по признаку сравнения. Значит, он сходится. □

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он *сходится условно.*

Теорема 3 (признак Дирихле). *Если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничены (т.е. для некоторого числа* C *неравенство* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant C$ *верно при всех* $n \in \mathbb{N}$*),* $b_n \to 0$ *монотонно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Следствие (признак Лейбница). *Если* $b_n \to 0$ *монотонно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ *сходится.*

Пример 11. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$.

Решение. Обозначим $\varphi(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}+2}$. Так как $\varphi'(x) = -\frac{x-4\sqrt{x}+3}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+1)^2}(\sqrt{x}+2)^2}$, то $\varphi'(x) < 0$ при $x > \sqrt{3}$. Поэтому последовательность $\{\varphi(n)\}$ стремится к нулю монотонно (по крайней мере при $n \geqslant 2$). Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\varphi(n)$ сходится по признаку Лейбница.

Поскольку $\varphi(n) \sim \frac{1}{n^{1/6}}$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ расходится и, следовательно, данный ряд не сходится абсолютно. □

Замечание. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = (-1)^n\frac{2\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$. Ряд расходится: n-й член $a_n = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$ представим в виде разности члена сходящегося и члена расходящегося ряда. Сделаем два комментария. Во-первых, отметим, что к данному ряду не применим признак Дирихле (Лейбница): нарушено условие монотонности $\{|a_n|\}$. Во-вторых, отметим, что a_n эквивалентен члену сходящегося ряда $\frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}$, так что для общих рядов признак сравнения не применим.

Пример 12. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Решение. Покажем, что данный ряд сходится по признаку Дирихле. Действительно, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно убывая стремится к нулю. Осталось проверить ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin k$. Для этого рассмотрим вспомогательную сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

Тогда при $x = 1$ имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \frac{|\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}|}{2\sin\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

В примере 3 показано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ расходится. Приведем еще одно доказательство. Воспользуемся неравенством $\sin^2 t \leqslant |\sin t|$. Тогда

$$\frac{|\sin n|}{n} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos 2n}{n}\right) =: s_n \geqslant 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ сходится по признаку Дирихле (ограниченность сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos 2n$ доказывается рассмотренным выше приемом), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n$ также расходится. Заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ расходится по признаку сравнения.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ сходится условно. $\square$

Пример 13. Показать, что при $p > 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^p}$.

Решение. Поскольку последовательность $\left\{\frac{1}{pn+1}\right\}$ монотонно убывая стремится к нулю, то данный ряд сходится по признаку Лейбница. Найдем его сумму. Для n-й частичной суммы ряда справедливо представление:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{pk}dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{pk}\right) dx = \int_0^1 \frac{1-(-x^p)^{n+1}}{1+x^p}dx.$$

Следовательно,

$$\left|S_n - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{p(n+1)}}{1+x^p}dx \leqslant \int_0^1 x^{p(n+1)}dx = \frac{1}{p(n+1)+1}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}$.

В частности, при $p = 1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2,$$

а если положить $p = 2$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \ \square$$

В заключение докажем *формулу Стирлинга*, выражающую асимптотику $n!$. Эта формула бывает часто необходима в задачах на числовые ряды.

Пример 14. Показать, что $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n \to \infty$.

Решение. Поскольку функция ln строго возрастает на луче $(0,+\infty)$, то для каждого $k\in\mathbb{N}$ справедлива оценка $\int_{k-1}^{k}\ln x dx<\ln k<\int_{k}^{k+1}\ln x dx$. Суммируем эти неравенства по k от 1 до n, тогда $\int_0^n \ln x dx<\ln n!<\int_1^{n+1}\ln x dx$. Первообразная $\ln x$ есть $x\ln x-x$, поэтому

$$n\ln n-n<\ln n!<(n+1)\ln(n+1)-n.$$

Это дает грубую оценку на $\ln n!$: расхождение с требуемой формулой порядка $\ln n$.

Следующая идея состоит в переходе от функции ln к функции $g\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$, где $g(x)=[\ln(k+1)-\ln k](x-k)+\ln k$ на $[k,k+1]$, $k\in\mathbb{N}$. График g представляет собой ломаную, вписанную в график ln. При этом разность интегралов от этих функций остается ограниченной. Действительно, с помощью производной нетрудно установить, что на каждом отрезке $[k,k+1]$ справедлива оценка

$$\ln k+\frac{x-k}{k+1}\leqslant g(x)\leqslant \ln x\leqslant \ln k+\frac{x-k}{k}$$

(для обоснования первого неравенства можно еще воспользоваться тем, что $(1+\frac{1}{k})^{k+1}\geqslant e$). Отсюда следует

$$0\leqslant\int_k^{k+1}[\ln x-g(x)]dx\leqslant\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\int_k^{k+1}(x-k)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Суммируя полученные неравенства по k от 1 до $n-1$, получим

$$0\leqslant\int_1^n[\ln x-g(x)]dx\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Обозначим $c_n=\int\limits_1^n[\ln x-g(x)]dx$, тогда заключаем, что последовательность $\{c_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит, имеет предел.

Покажем, как $\{c_n\}$ связана с нашей задачей. Так как $\int_k^{k+1}g(x)xdx=\frac{1}{2}(\ln k+\ln(k+1))$, то $\int_1^n g(x)xdx=\ln n!-\frac{1}{2}\ln n$. Интеграл $\int_1^n\ln xdx=n\ln n-n+1$, поэтому окончательно $c_n=\ln\frac{n^{n+1/2}}{e^n n!}+1$. Поскольку последовательность $\{c_n\}$ имеет предел, то последовательность $\left\{\frac{n^{n+1/2}}{e^n n!}\right\}$ имеет (положительный) предел, обозначим его через $1/C$.

Итак, имеем

$$n!=C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+\alpha_n),\qquad \alpha_n\to 0.$$

Константу C находим с помощью формулы Валлиса:

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Действительно, из полученного представления $n!$ имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{C\sqrt{n}(1+\alpha_n)^2}{\sqrt{2}(1+\alpha_{2n})}$$

и, значит,

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{C^2n(1+\alpha_n)^4}{2n(1+\alpha_{2n})^2}=\frac{C^2}{2},$$

поэтому $C=\sqrt{2\pi}$ и формула установлена. □