1. Интегрируемые функции

Напомним, что *разбиение* T отрезка $[a,b]$ — это набор точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, *мелкость* разбиения T — число $|T| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

По функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и разбиению $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ можно составить *интегральную сумму*

$$\sigma(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

отметив (выбрав) точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (здесь и далее $\mathbb{T} = (T, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — отмеченное разбиение).

Определение. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема* на $[a,b]$ (пишут $f \in \mathcal{R}[a,b]$), если

$$\exists I \in \mathbb{R}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathbb{T},\ |T| < \delta : \quad |\sigma(f, \mathbb{T}) - I| < \varepsilon.$$

Число I называется *определенным интегралом* функции f и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Важно понимать, что если функция неограничена на $[a,b]$, то она неинтегрируема на $[a,b]$. В тоже время класс $\mathcal{R}[a,b]$ достаточно широк и содержит все функции, ограниченные на $[a,b]$ и имеющие там не более конечного числа точек разрыва (в частности, непрерывные), а также все монотонные на $[a,b]$ функции.

Пример 1. Вычислить по определению интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$, где $0 < a < b$.

Решение. Отметим, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ интегрируема на $[a,b]$, т.к. f непрерывна на этом отрезке.

Рассмотрим $T_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ — последовательность разбиений $[a,b]$ на n равных частей. Из определения вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, \mathbb{T}_n)$ существует, не зависит от выбора отмеченных точек $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ и равен $\int_a^b f(x)dx$. Если положить $\xi_i^{(n)} = \sqrt{x_{i-1}^{(n)} x_i^{(n)}}$ и $\mathbb{T}_n = (T_n, \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)})$, то

$$\sigma(f, \mathbb{T}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i^{(n)}}{x_{i-1}^{(n)} x_i^{(n)}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}^{(n)}} - \frac{1}{x_i^{(n)}} \right) = \frac{1}{x_0^{(n)}} - \frac{1}{x_n^{(n)}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. $\square$

Возникает вопрос: почему в предыдущем примере точки $\xi_i^{(n)}$ были выбраны таким специфическим образом? Дело в том, что при вычислении интегралов по определению возникают пределы от сумм. Даже если известно, что предел существует, его нахождение может оказаться весьма трудоемким. Для "сворачивания"суммы может быть задействована свобода при выборе точек разбиения и отмеченных точек. В этом смысле примеры выглядят искусственными. Универсальный способ вычисления дает формула Ньютона-Лейбница, которая обсуждается ниже.

Если в определении интегральной суммы значение $f(\xi_i)$ заменить на $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ (на $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$), то получим *верхнюю сумму Дарбу* $S_T(f)$ (соот. *нижнюю сумму Дарбу* $s_T(f)$). Важное теоретическое значение имеют величины $I^*(f) = \inf\limits_T S_T(f)$ и

$I_*(f) = \sup\limits_T s_T(f)$, называемые *верхним* и *нижним интегралами Дарбу*: ограниченная функция f интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $I^*(f) = I_*(f)$, при этом $\int_a^b f(x)dx = I^*(f) = I_*(f)$ (*критерий Дарбу*).

Пример 2. Найти верхний и нижний интегралы Дарбу функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ x, \ x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

Решение. Отметим, что $0 \leqslant f(x) \leqslant x$ для всех $x \in [0,1]$. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[0,1]$ и положим $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$ и $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$. Так как каждый невырожденный отрезок содержит рациональное число, то $m_i = 0$ и, значит, нижняя сумма Дарбу $s_T(f) = 0$. Так как каждое число есть предел последовательности иррациональных чисел, то $M_i = x_i$ и, значит, верхняя сумма Дарбу

$$S_T(f) = x_1(x_1 - x_0) + x_2(x_2 - x_1) + \ldots + x_n(x_n - x_{n-1}) = S_T(g),$$

где функция $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Перейдем к точным граням по всем разбиениям T. Тогда получим, что $I_*(f) = \sup\limits_T s_T(f) = 0$ и

$$I^*(f) = \inf_T S_T(f) = I^*(g) = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}$$

(учли, что поскольку g интегрируема на $[0,1]$, то по критерию Дарбу $I^*(g) = I_*(g) = \int_0^1 g(x)dx$).

Отметим, что $I^*(f) \neq I_*(f)$ и, значит, функция f неинтегрируема на $[0,1]$. $\square$

2. Интеграл с переменным пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. *Пусть функция f определена на интервале I и интегрируема на любом отрезке $[a,b] \subset I$, точка $x_0 \in I$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ непрерывна на I. Если сама f непрерывна на I, то функция F дифференцируема на I с $F'(x) = f(x)$.*

В последнем случае справедлива *формула Ньютона-Лейбница* $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(b)$, где Φ — первообразная f на I.

Пример 3. Найти интервалы возрастания функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{1-t^2}{2+t^4}dt$.

Решение. Достаточно найти интервалы, на которых производная $f' > 0$.

Функция $f = g \circ h$, где $g(u) = \int\limits_0^{u} \frac{1-t^2}{2+t^4}dt$ и $h(x) = x^2$. Поскольку функция h дифференцируема всюду и по предыдущей теореме функция g дифференцируема всюду с $g'(u) = \frac{1-u^2}{2+u^4}$, то по Т о производной сложной функции f дифференцируема на $\mathbb{R}$ и

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{2x(1-x^4)}{2+x^8}.$$

Откуда находим, что f возрастает на промежутках $(-\infty, 1)$ и $(0,1)$. $\square$

Пример 4. Показать, что если f непрерывна на $\mathbb{R}$, то

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

Решение. Положим $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du$ и $G(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$. Требуется показать, что функции F и G совпадают.

Поскольку подынтегральные функции непрерывны, то по предыдущей теореме G и F дифференцируемы на $\mathbb{R}$ с $G'(x)=\int_0^x f(t)dt$ и

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du\right)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

Следовательно, функция $F-G$ дифференцируема и ее производная всюду равна нулю. Значит, разность $F-G$ постоянна на $\mathbb{R}$. Поскольку $F(0)=G(0)=0$, то $F-G=0$ и функции F и G совпадают. $\square$

Пример 5. Верно ли равенство $\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$?

Решение. Равенство, хотя по виду и напоминает формулу Ньютона-Лейбница, не является таковой. Более того, приведенное равенство неверно.

Сделаем некоторые уточнения. Поскольку $f(x)=\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$ при $x\neq 0$, будем считать, что $f(0)=-1$. Функция $F(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ имеет неустранимый разрыв в точке $x=0$ и, следовательно (даже после доопределения при $x=0$), не является первообразной никакой функции на отрезке $[-1,1]$.

Найдем правильное значение интеграла. Можно поступить следующим образом. Функция

$$\Phi(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x>0,\\ \frac{\pi}{2},\ x=0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x<0\end{cases}$$

является первообразной функции f на $[-1,1]$ (в проверке нуждается только равенство $\Phi'(0)=f(0)$, которое может быть установлено по определению при помощи правила Лопиталя). Тогда

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}.\quad\square$$

3. Вычисление определенных интегралов

Теорема (интегрирование по частям). *Если функции u и v дифференцируемы на $[a,b]$, а их производные u', $v'\in\mathcal{R}[a,b]$, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Метод интегрирования по частям является одним из основных методов в теории интегрирования. Проиллюстрируем его применение на примерах.

Пример 6. Вычислить $\int\limits_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\,dx$.

Решение. Положим $u(x)=\operatorname{arctg}x$ и $v'(x)=x$. Тогда $u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ и $v(x)=\frac{x^2}{2}$ (берем одну из первообразных). Тогда

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}}+\int_0^{\sqrt{3}}x\operatorname{arctg}x\,dx=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-0\right)-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} - 0\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx$.

Решение. Поскольку на промежутках $[1/e, 1)$ и $(1, e]$ функция $\ln$ принимает отрицательные и положительные значения соответственно, то по свойству аддитивности интеграла имеем

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx = -\int_{1/e}^{1} \ln x\, dx + \int_1^e \ln x\, dx.$$

Для вычисления интегралов в правой части воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая $u(x) = \ln x$ и $v'(x) = 1$. Тогда $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$ и, следовательно,

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx = -\left(x \ln x\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} dx\right) + \left(x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx\right) = -(2/e - 1) + 1 = 2 - 2/e. \quad \square$$

Другим важным методом вычисления интегралов являются замены переменных, позволяющие сводить одни интегралы к другим.

Теорема (замена переменной). *Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке I и $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ — дифференцируемая функция с $\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

В зависимости от того, как читать формулу: слева направо или справа налево, вытекает два способа ее применения.

I способ. В исходном интеграле вводим новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$ с целью упрощения подынтегрального выражения. Новые пределы интегрирования α и β находим из уравнений $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Решение. Сделаем замену $x = \operatorname{tg} t$. В качестве промежутка изменения t можно взять $[0, \frac{\pi}{4}]$. При такой замене подкоренное выражение (представляющее основную трудность) преобразуется по формуле $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)^3}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\, dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

II способ. Представляем подынтегральную функцию в виде $f(x) = g(\omega(x))\omega'(x)$ и вводим новую переменную $t = \omega(x)$. Тогда интеграл от f по отрезку $[a, b]$ сводится к интегралу от функции g по отрезку с концами $t_1 = \omega(a)$ и $t_2 = \omega(b)$.

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^a \frac{xdx}{e^{x^2} + e^{-x^2}}$, где $a = \sqrt{(\ln 3)/2}$.

Решение. Подынтегральную функцию f можно записать в виде $f(x) = \frac{xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$. Теперь становится ясным, что можно ввести новую переменную $t = e^{x^2}$, т.к. $t' = 2xe^{x^2}$. Находим новые пределы интегрирования: $t_1 = e^0 = 1$ и $t_2 = e^{a^2} = \sqrt{3}$. Поэтому

$$\int_0^a \frac{xdx}{e^{x^2} + e^{-x^2}} = \int_0^a \frac{xe^{x^2}dx}{1 + e^{2x^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}. \quad \square$$

Пример 10. Показать, что $\int\limits_0^\pi xe^{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi e^{\sin x}dx$.

Решение. В интеграле I, стоящем в левой части, сделаем замену $x = \pi - t$, тогда

$$I = \int_\pi^0 -(\pi - t)e^{\sin(\pi - t)}dt = \int_0^\pi (\pi - t)e^{\sin t}dt = \pi\int_0^\pi e^{\sin t}dt - I.$$

Следовательно, $2I = \pi\int\limits_0^\pi e^{\sin x}dx$. Поделив обе части на 2, получим искомое равенство. $\square$

Пример 11. Найти $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение. По свойству линейности интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^3 - x}{\cos^2 x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

В силу нечетности функции $y = \frac{2x^3 - x}{\cos^2 x}$ первый интеграл в правой части равен нулю. Для вычисления второго интеграла воспользуемся четностью функции $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. Тогда

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^3 - x + 1}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/3} = 2\sqrt{3}. \quad \square$$

4. Оценки интегралов

Поскольку первообразная непрерывной функции не всегда является элементарной функцией, может оказаться, что точное значение интеграла (по формуле Ньютона-Лейбница) найти затруднительно. Получение качественных оценок для интегралов обусловлено практикой. Первым шагом в этом направлении является оценка

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Здесь мы также обсудим оценки, основанные на следующем свойстве.

Теорема. *Если $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \geqslant g$ на $[a,b]$, f и g непрерывны в точке $x_0 \in [a,b]$ и $f(x_0) > g(x_0)$, то $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$.*

Пример 12. Доказать неравенство $\ln 2 < \int\limits_0^{3/4} \frac{2^x}{\sqrt{1+x^2}}dx < \frac{1}{\ln 2}$.

Решение. Поскольку $\frac{2^x}{\sqrt{1+x^2}} < 2^x$ на $(0, 3/4)$, то

$$\int_0^{3/4} \frac{2^x}{\sqrt{1+x^2}}dx < \int_0^{3/4} 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^{3/4} = \frac{\sqrt[4]{8} - 1}{\ln 2} < \frac{1}{\ln 2}.$$

С другой стороны, $\frac{2^x}{\sqrt{1+x^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ на $(0, 3/4)$ и, значит,

$$\int_0^{3/4} \frac{2^x}{\sqrt{1+x^2}}dx > \int_0^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big|_0^{3/4} = \ln 2. \quad \square$$

Пример 13. Доказать неравенство $\left|\int\limits_x^{x+1} \sin(t^2)\,dt\right| < \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Решение. Обозначим исходный интеграл через $I(x)$. Сделаем в I замену $z = t^2$, тогда $I(x) = \int\limits_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin z}{2\sqrt{z}} dz$. Далее применим формулу интегрирования по частям, полагая в полученном интеграле $u = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ и $v' = \sin z$. Тогда

$$I(x) = -\frac{\cos z}{2\sqrt{z}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos z}{4\sqrt{z^3}} dz = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos z}{4\sqrt{z^3}} dz.$$

Для последнего интеграла справедлива оценка

$$\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos z}{4\sqrt{z^3}} dz\right| \leqslant \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{|\cos z|}{4\sqrt{z^3}} dz < \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dz}{4\sqrt{z^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{z}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Поэтому

$$I(x) < \frac{1+\cos x^2}{2x} - \frac{1+\cos(x+1)^2}{2(x+1)} \leqslant \frac{1+\cos x^2}{2x} \leqslant \frac{1}{x}$$

и, с другой стороны,

$$I(x) > \frac{-1+\cos x^2}{2x} + \frac{1-\cos(x+1)^2}{2(x+1)} \geqslant \frac{-1+\cos x^2}{2x} \geqslant -\frac{1}{x},$$

так что $|I(x)| < \frac{1}{x}$ и неравенство установлено. $\square$

В следующих двух задачах обсуждается приближенный метод вычисления интеграла от дифференцируемой функции с помощью интегральной суммы.

Пример 14. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Показать, что существует интегральная сумма f относительно T, в точности равная $\int_a^b f(x)\,dx$.

Решение. Применим теорему о среднем на каждом отрезке разбиения T. Тогда найдется точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, что $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = f(\xi_k)\Delta x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Просуммировав по всем таким k, получим $\int_a^b f(x)\,dx = \sigma(f, \mathbb{T}_0)$ для отмеченного разбиения $\mathbb{T}_0 = (T, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. $\square$

Пример 15. Предположим, что f' существует и $|f'(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$. Показать, что для любой интегральной суммы $\sigma(f, \mathbb{T})$ относительно произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ справедлива оценка

$$\left|\sigma(f, \mathbb{T}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a)|T|.$$

Решение. Пусть $\mathbb{T} = (T, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, где $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ и $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. По предыдущей задаче существует отмеченное разбиение $\mathbb{T}_0 = (T, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, что $\int_a^b f(x)\,dx = \sigma(f, \mathbb{T}_0)$. Тогда

$$\left|\sigma(f, \mathbb{T}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = |\sigma(f, \mathbb{T}) - \sigma(f, \mathbb{T}_0)| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\eta_k) - f(\xi_k)|\Delta x_k \leqslant |T| \sum_{k=1}^n |f(\eta_k) - f(\xi_k)|.$$

Применим Т Лагранжа к функции f на отрезке с концами η_k и ξ_k, тогда для некоторой точки c_k между ними имеем

$$|f(\eta_k) - f(\xi_k)| = |f'(c_k)||\eta_k - \xi_k| \leqslant M\Delta x_k.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$, получаем искомую оценку. $\square$