1 Сравнение функций

Пусть функция $g(x)$ не обращается в ноль в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x\to x_0$ и пишут $f(x)\sim g(x), x\to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть о-малое от функции $g(x)$ при $x\to x_0$ и пишут $f(x) = o(g(x)), x\to x_0$.

Замечание. Формулу $f(x) = o(g(x))$ не следует понимать как равенство в обычном смысле. Выражение $o(g(x))$ следует понимать как класс всех таких функций $\widetilde{f}(x)$, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\widetilde{f}(x)}{g(x)} = 0$, а знак равенства следует понимать как утверждение о том, что функция $f(x)$ принадлежит этому классу. Эту формулу следует читать только слева направо. В частности из того, что $f_1(x) = o(g(x)), x\to x_0$ и $f_2(x) = o(g(x)), x\to x_0$ не следует, что $f_1(x) = f_2(x)$.

Примеры:

$x = o(x^2), x\to\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = 0$.

$x^2 = o(x), x\to 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0$.

Пусть в левой части равенства запись вида $o(f)$ обозначает конкретного представителя класса $o(f)$, $x\to x_0$, $C\neq 0$ – постоянная. Тогда имеют место следующие формулы:

$$o(Cf) = o(f)$$

$$C\cdot o(f) = o(f)$$

$$o(f) + o(f) = o(f)$$

$$o(o(f)) = o(f)$$

$$o(f + o(f)) = o(f)$$

$$o(f)\cdot o(g) = o(fg)$$

$$f^{n-1}o(f) = o(f^n)$$

$$\frac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1}),\ \text{если } \forall x\in\dot{U}_\delta(x_0)\ f(x)\neq 0$$

$$(o(f))^\alpha = o(f^\alpha),\ \alpha > 0$$

Замечание. Приведеннные формулы следует читать только слева направо учитывая, что в левых частях указан конкретный представитель класса, а в правых - класс функций. Некоторые из указанных формул неверны при использовании их справа налево.

2 Производная

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, тогда производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если этот предел существует. Производная функции $f(x)$ обозначается символами $f'(x)$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ или $f_x(x)$.

Введем обозначения: $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Тогда определение производной можно записать в виде $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, тогда она непрерывна в точке x_0.

□Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она определена в некоторой окрестности точки x_0, и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то есть функция непрерывна в точке x_0.■

Теорема 2. Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует такое число A, что $\Delta f = A(\Delta x) + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

□Пусть $f(x)$ имеет производную в точке x_0, тогда обозначим $r(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = 0$, то есть $r(\Delta x) = o(\Delta x)$. Значит $\Delta f = A(\Delta x) + o(\Delta x)$.

Пусть $\Delta f = A(\Delta x) + o(\Delta x)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A(\Delta x)+o(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A$, значит функция f имеет производную в точке x_0, причем $f'(x_0) = A$.■

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^n$.

□По определению производной,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x_0^n + n\Delta x x_0^{n-1} + \Delta x^2(\ldots)\right) - x_0^n}{\Delta x}.$$

В последнем выражении объеденены все слагаемые, которые содержат Δx в степени большей, чем 1. Сократим на Δx:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(nx_0^{n-1} + \Delta x(\ldots)).$$

Выражение в скобках есть многочлен от x_0 и Δx - ограниченная в окрестности x_0 функция. $\Delta x \to 0$, поэтому $\Delta x(\ldots) \to 0$. Значит $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.■

Производные основных элементарных функций:

$c' = 0, \quad c = const;$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x;$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$
$(\sin x)' = \cos x;$
$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

Теорема 3. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0, тогда в этой точке дифференцируемы функции $f + g$, fg и, если $g(x_0) \neq 0$, функция $\frac{f}{g}$, причем

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)'g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема 4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$, где $X, Y \subset \mathbb{R}$ и $f(X) \subset Y$ и пусть f дифференцируема в точке x_0, а g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, тогда композиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = x^x$.

$\square$Преобразуем выражение: $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$. Теперь надем производную, пользуясь правилами дифференцирования, сформулированными в теоремах 3 и 4: $f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(\ln x + 1)$.$\blacksquare$

Пример 3. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$\square$Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Очевидно, что $|g(x)| \leqslant |x|$. Выпишем определение того, что $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x| < \delta \hookrightarrow |g(x)| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда из $0 < |x| < \delta$ следует $|g(x)| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon$, то есть выполнено определение предела. Значит, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. По определению производной, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Значит, функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$.

При $x \neq 0$ функция $f(x)$ разрывна, а значит, недифференцируема.$\blacksquare$

Пример 4. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\square$По определению $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$. Этот предел не существует, следовательно $f(x)$ недифференцируема в точке $x = 0$.$\blacksquare$

Пример 5. Исследовать в точке $x = 0$ на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\square$По определению $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$. Функция $x \sin \frac{1}{x}$ — бесконечно малая, как произведение бесконечно малой и ограниченной функций, поэтому $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Следовательно $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$.$\blacksquare$

3 Теоремы о среднем

Теорема 5 (Ферма). Пусть функция f определена на $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0 и принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема 6 (Ролля). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Теорема 7 (Лагранжа). Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема 8 (Коши). Пусть функции f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g' \neq 0$ на (a, b). Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Определение. Пусть функция f определена на промежутке I.

Говорят, что функция f нестрого возрастает (строго возрастает) на I, если $\forall x, y \in I : x < y \to f(x) \leqslant f(y) (\forall x, y \in I : x < y \to f(x) < f(y))$.

Говорят, что функция f нестрого убывает (строго убывает) на I, если $\forall x, y \in I : x < y \to f(x) \geqslant f(y) (\forall x, y \in I : x < y \to f(x) > f(y))$.

Теорема 9. Пусть функция $f : I \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во внутренних точках I. Тогда

1. f нестрого возрастает на $I \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ во всех внутренних точках I;
2. f нестрого убывает на $I \Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ во всех внутренних точках I;
3. f постоянна на $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ во всех внутренних точках I.

$\square$Докажем пункт 1. Пусть f нестрого возрастает на I, а x_0 — внутренняя точка I. Тогда

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \to \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

Пусть $f'(x) \geqslant 0$. Выберем любые $x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. По предположению $f'(c) \geqslant 0$, а в силу выбора $x_1, x_2, \quad (x_2 - x_1) \geqslant 0$. Следовательно, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

Пункт 2 доказывается аналогично. Пункт 3 является следствием предыдущих утверждений.$\blacksquare$

Теорема 10. Пусть функция f определена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Пусть также f дифференцируема на $(a, b) \setminus \{x_0\}$ и непрерывна в точке x_0. Тогда

1. если существуют числа $\alpha, \beta \in (a, b) : \alpha < x_0 < \beta :$ такие, что $f'(x) \geqslant 0$ на (α, x_0) и $f'(x) \leqslant 0$ на (x_0, β), то x_0 - точка локального максимума функции f;
2. если существуют числа $\alpha, \beta \in (a, b) : \alpha < x_0 < \beta :$ такие, что $f'(x) \leqslant 0$ на (α, x_0) и $f'(x) \geqslant 0$ на (x_0, β), то x_0 - точка локального минимума функции f.

$\square$Если функция f удовлетворяет условиям пункта 1, то по предыдущей теореме она нестрого возрастает на $[\alpha, x_0]$ и нестрого убывает на $[x_0, \beta]$. Тогда $\forall x \in (\alpha, \beta) : f(x) \leqslant f(x_0)$, то есть x_0 - точка локального максимума функции f.

Пункт 2 доказывается аналогично.$\blacksquare$

Пример 6. Исследовать функцию $f(x) = x^2e^x$ на возрастание и убывание, найти ее экстремумы.

$\square$Вычислим производную: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$.

Производная неотрицательна ($f'(x) \geqslant 0$), при $x \in (-\infty, -2] \bigcup [0, +\infty)$. На промежутках $(-\infty, -2]$ и $[0, +\infty)$ функция f возрастает.

Производная неположительна ($f'(x) \leqslant 0$), при $x \in [-2, 0]$. На этом промежутке функция f убывает.

В правой полуокрестности точки $x = -2$ функция f возрастает, а в левой полуокрестности — убывает, значит точка $x = -2$ — локальный максимум. Аналогично, точка $x = 0$ — локальный минимум.$\blacksquare$

Пример 7. Доказать, что $e^x > 1 + x$.

$\square$Пусть $x > 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = e^t$ на отрезке $[0, x]$. В силу теоремы Лагранжа существует такое $c \in (0, x)$, что

$$e^x - e^0 = f'(c)(x - 0);$$

$$e^x - 1 = e^c x;$$

$c > 0$, значит, $e^c > 1$, тогда $e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x$.

Случай $x < 0$ рассматривается аналогично.$\blacksquare$

Пример 8. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[1, 2]$. Доказать, что на отрезке $[1, 2]$ существует такая точка c, что

$$f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c).$$

$\square$Рассмотрим функцию $g(x) = -\frac{2}{x}$. К функциям $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[1, 2]$ применим теорему Коши:

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$g(2) - g(1) = 1, \quad g'(x) = \frac{2}{x^2}$, следовательно $f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c)$.$\blacksquare$

4 Правила Лопиталя

Теорема 11 (о неопределенности $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

1. дифференцируемы на (a, b),
2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$,
3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b),
4. $\exists \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема 11 (о неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

1. дифференцируемы на (a, b),

2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = \pm\infty,$

3. $g'(x) \neq 0$ на (a, b),

4. $\exists \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание. Правила Лопиталя дают достаточные, но не необходимые условия существования предела. Например, предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ существует, но его нельзя найти с помощью правила Лопиталя.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x$, где $\alpha > 0$.

$\square$Преобразуя функцию и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \ln x = 0$, при $\alpha < 0$.$\blacksquare$

Пример 10. Доказать, что при $\alpha > 0, a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

$\square$Пусть n — наименьшее натуральное число, что $\alpha - n < 0$. Применяя правило Лопиталя n раз, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x \ln^n a} = 0.\blacksquare$$

Упражнение. Доказать, что для любого β

$$\lim_{x\to-\infty} a^x x^\beta = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ \infty, & a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x x^\beta = \begin{cases} \infty, & a > 1, \\ 0, & a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln^\beta x = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ \infty, & \alpha < 0; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \ln^\beta x = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases}$$

5 Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную во всех точках интервала (a, b). Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in (a, b)$, то ее производную называют второй производной или производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначают $f''(x_0), f^{(2)}(x_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0), f_{xx}(x_0)$.

Аналогично определяются производные более высоких порядков: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Заметим, что под производной нулевого порядка понимают саму функцию: $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Пример 11. Найти $f'(0), f''(0), f'''(0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geqslant 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$$

$\square$При $x \neq 0$ функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда по определению $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$.

При $x \neq 0$ функция $f'(x)$ дифференцируема и $f''(x) = \begin{cases} -\sin x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 0$.

При $x \neq 0$ $f'''(x) = \begin{cases} -\cos x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

$$\frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \begin{cases} \frac{-\sin x}{x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f''(x)-f''(0)}{x}$ не существует (односторонние пределы не равны). Следовательно, $f'''(0)$ не существует.$\blacksquare$

Для вычисления производных высших порядков часто используют следующие формулы:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a;$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right);$$

$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right);$$

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)(ax+b)^{\alpha - n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)};$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Последняя формула называется формулой Лейбница.

Пример 12. Найти $((x^2+x+2)\sin 3x)^{(n)}$.

$\square$Обозначим $f(x) = x^2+x+2$, $g(x) = \sin 3x$. Найдем все производные функций f и g:

$f^{(0)} = x^2+x+2;$
$f^{(1)} = 2x+1;$
$f^{(2)} = 2;$
$f^{(n)} = 0, n > 2;$
$g^{(n)} = 3^n \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right).$

У функции f есть только три ненулевые производные, поэтому в правой части формулы Лейбница останется слагаемые с номерами $k = 0, 1, 2:$

$$((x^2+x+2)\sin 3x)^{(n)} = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} =$$

$$= (x^2+x+2)3^n \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) + n(2x+1)3^{n-1}\sin\left(3x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) +$$

$$+\frac{n(n-1)}{2} 2\cdot 3^{n-2}\sin\left(3x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right). \blacksquare$$

6 Формула Тейлора

Теорема 12 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0)$, тогда для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ существует точка ξ, принадлежащая интервалу с концами x и x_0, такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Пример 13. Доказать, что $\forall t \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\sin t - t| \leqslant \frac{t^2}{2}$.

$\square$Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $\sin t$ при $n = 2, x_0 = 0$. Получим $\sin t = t + \frac{-\sin\xi}{2!}t^2$, откуда следует, что $|\sin t - t| = \left|\frac{t^2}{2}\sin\xi\right| \leqslant \frac{t^2}{2}.\blacksquare$

Теорема 13 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0.$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$, $x \to 0$ и называется формулой Маклорена.

Приведем разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \text{ при } x \to 0;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \text{ при } x \to 0;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \text{ при } x \to 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \text{ при } x \to 0;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \text{ при } x \to 0;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), \text{ при } x \to 0;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \text{ при } x \to 0;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \text{ при } x \to 0;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \text{ при } x \to 0;$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

Пример 14. Рассмотрим вычисление формулы Тейлора для функций, представимых в виде отношения двух функций с известным разложением, например найдем разложение $\operatorname{tg} x$ до $o(x^5)$.

☐Выпишем разложения функций $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Рассмотрим отдельно равенство $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}$. Сделав замену $t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, получим $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+t}$. Если $x \to 0$, то и $t \to 0$. Разложим выражение $\frac{1}{1+t}$ по формуле Тейлора при $t \to 0$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) =$$

$$= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3 + o(t^3).$$

Раскроем скобки, при этом все члены, являющиеся $o(x^5)$, мы сразу объединим:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).$$

Для получения разложения функции $\operatorname{tg} x$ просто перемножим разложения функций $\sin x$ и $\frac{1}{\cos x}$. После чего снова раскроем скобки, объединяя члены, являющиеся $o(x^5)$:

$$\operatorname{tg} x = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5 + o(x^5).\blacksquare$$

Пример 15. Рассмотрим вычисление разложения функции по известной формуле Тейлора для ее производной на примере разложения $f(x) = \arcsin x$ до $o(x^6)$.

$\square$Представим функцию $f'(x)$ формулой Тейлора:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5).$$

Для получения разложения функции $f(x)$ проинтегрируем левую и правую части этого равенства. При этом возникает константа интегрирования, несложно понять, что она равна $f(0)$. Учитывая, что $\arcsin(0) = 0$, получим

$$f(x) = f(0) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).\blacksquare$$

Пример 16. Разложить функцию $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ до $o(x^{2n})$.

$\square$Пусть $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Тогда

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся известной формулой для разложения $(1+x)^\alpha$:

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-k+\frac{1}{2})}{k!} x^{2k} + o(x^{2n}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} + o(x^{2n}).$$

Интегрируем:

$$g(x) = g(0) + x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}), \quad g(0) = 0.$$

Тогда

$$f(x) = x^2 g(x) = x^3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+3} + o(x^{2n+3}) =$$

$$= x^3 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+3} + o(x^{2n}).\blacksquare$$

7 Использование формулы Тейлора для вычисления пределов

7.1 Предел функции вида $\frac{f(x)}{g(x)}$

Предел функции вида $\frac{f(x)}{g(x)}$ можно вычислить следущим способом. Разложим числитель и знаменатель по формуле Тейлора до первого ненулевого члена. Пусть $f(x) = ax^n + o(x^n), g(x) = bx^m + o(x^m)$, тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax^n + o(x^n)}{bx^m + o(x^m)} = = \begin{cases} \frac{a}{b}, & m = n; \\ 0, & n > m; \\ \infty, & n < m. \end{cases}$$

Пример 17. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x}{\ln(1-x^3)}.$$

$\square$Данный предел имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель по формуле Тейлора до первого члена с ненулевым коэффицентом:

$$\ln(1-x^3) = -x^3 + o(x^3),$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x}{\ln(1-x^3)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}.\blacksquare$$

Заметим, что такого рода пределы можно решать с помощью правила Лопиталя, но иногда это сложнее, чем с использованием формулы Тейлора. Например, в этом примере правило Лопиталя пришлось бы применить три раза.

Пример 18. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}\operatorname{sh}x-\operatorname{arctg}x}.$$

□Разложим сначала знаменатель.

$$\operatorname{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Для разложения сложной функции $\operatorname{tg}\operatorname{sh}x$ по формуле Тейлора подставим разложение функции $\operatorname{sh}x$ в разложение функции $\operatorname{tg}t$, раскроем скобки и объединим все слагаемые, которые есть $o(x^3)$:

$$\operatorname{sh}x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\operatorname{tg}t = t+\frac{t^3}{3}+o(t^3),$$

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(t^3)=x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

Итого, знаменатель:

$$x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

В разложении знаменателя первое ненулевое слагаемое имеет степень 3. Тогда числитель также будем раскладывать до $o(x^3)$:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\sin t = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3),$$

$$t=\frac{x}{1-x}=x\frac{1}{1-x}=x(1+x+x^2+x^3+o(x^3))=x+x^2+x^3+x^4+o(x^4),$$

$$\sin\frac{x}{1-x}=\left(x+x^2+x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(x+x^2+x^3+o(x^3)\right)^3+o(t^3)=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

Заметим, что раскладывая функцию $\frac{1}{1-x}$ до $o(x^3)$ мы получили разложение сложной функции $x\frac{1}{1-x}$ до $o(x^4)$. В данном случае мы просто отбросили слагаемое x^4 и получили разложение до $o(x^3)$. Иногда встречаются обратные ситуации, когда для разложения сложной функции до $o(x^3)$ внутреннюю функцию нужно раскладывать до $o(x^4)$.

Итого, числитель:

$$x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) + \Big(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) - \frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{3}{5}.\blacksquare$$

Замечание. Типичной ошибкой является разложение числителя и знаменателя до недостаточно большой степени. Если, например, в этом примере раскладывать числитель и знаменатель не до $o(x^3)$, а до меньшей степени, скажем до $o(x^2)$, то получится выражение $\frac{0+o(x^2)}{0+o(x^2)}$, которое не позволяет вычислить предел.

Обычно с первого взгляда сложно определить нужную степень, поэтому рекомендуется делать следующее. Разложим функции до какой-нибудь степени, например до 2 или 3. Если в результате в числителе и знаменателе все слагаемые сократились и получились выражения вида $0 + o(x^n)$, то степень недостаточная, разложим до большей степени. Если же осталось несколько слагаемых, то есть получились выражения вида $ax^n + \alpha x^{n+1} + \ldots + \gamma x^m + o(x^m)$, то степень разложения избыточная, просто отбросим ненужные слагаемые и получим выражения вида $ax^n + o(x^n)$.

7.2 Предел функции, представимой в виде $f(x)^{g(x)}$

Пусть $f(x) = 1 + ax^n + o(x^n), g(x) = \frac{1}{bx^n + o(x^n)}$, тогда

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^{\frac{a}{b}}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0}(1+ax^n+o(x^n))^{\frac{1}{bx^n+o(x^n)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{bx^n+o(x^n)}\ln(1+ax^n+o(x^n))} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^n+o(x^n)}} = e^{\frac{a}{b}}.$$

Пример 19. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}(2\cos^{\frac{3}{3}} x - \frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x})^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x}}.$$

$$\square \operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Тогда показатель:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x} = \frac{x}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{\frac{x^2}{6} + o(x^2)}.$$

Поскольку показатель представлен в виде $\frac{1}{bx^2+o(x^2)}$, то можно ожидать, что основание представимо в виде $1 + ax^2 + o(x^2)$.

$$(\cos x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3x^2}{4} + o(x^2).$$

Будем раскладывать $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \Big(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\Big) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Заметим, что для получения разложения дроби до $o(x^2)$, необходимо раскладывать внутренние функции $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$. Если раскладывать их до $o(x^2)$, то после сокращения на x останется $o(x)$.

Основание:

$$2(1 - \frac{3x^2}{4} + o(x^2)) - 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 - \frac{5}{3}x^2 + o(x^2).$$

Итого:

$$\lim_{x \to 0} (2\cos^{\frac{3}{3}} x - \frac{\sin x}{\arcsin x})^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x}} = \lim_{x \to 0} (1 - \frac{5}{3}x^2 + o(x^2))^{\frac{1}{\frac{x^2}{6}} + o(x^2)} = e^{-10}. \blacksquare$$