МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_2(8x)} = \frac{x^7}{8}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 3x - \sin x \sin 3x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$$

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 2 : 3$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $CS : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_3\left(27x^2\right)}=\frac{x^9}{81}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x-\frac{1}{2}\right|=\cos^2 3x+\cos x\cos 3x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что k^2+k делится нацело на 505.

4. Решите систему

$$\begin{cases}2x\geq 14+y,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+144-40x^2-40y^2=128xy.\end{cases}$$

5. На ребре SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $BL:LS=2:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS:CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 7. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2-a,\\ x^2+y^2+8b^2=4b(y-x)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1=4$, $CK_2=8$, и $BC=18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_2\left(0{,}25x^3\right)} = 512x^4 .$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 x + \sin x \sin 5x .$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + y + 8 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$$

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 1 : 4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS : BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$, и $BC = 16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ______________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение
$$x^{\log_5(0{,}008x)}=\frac{125}{x^5}.$$

2. Решите уравнение
$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x-\frac{1}{2}\right|=\cos^2 x+\cos x\cos 5x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что k^2-k делится нацело на 505.

4. Решите систему
$$\begin{cases} x+3y+14\le 0, \\ x^4+2x^2y^2+y^4+64-20x^2-20y^2=8xy. \end{cases}$$

5. На ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $CL:LS=1:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.
а) Найдите отношение $AS:AB$.
б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 6. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система
$$\begin{cases} y=x^2+a, \\ x^2+y^2+2b^2=2b(x-y)+1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=6$, $AK_2=8$, и $AC=21$.
а) Найдите длину отрезка CK.
б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.