Несобственные интегралы

Определение.

Несобственный интеграл на конечном промежутке. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b), a, b \in \mathbb{R}$ и интегрируема на любом отрезке $[a, \xi], \xi \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx$. Если существует конечный предел $\lim_{\xi \to b-0} F(\xi) = \lim_{\xi \to b-0} \int\limits_a^\xi f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае говорят также, что этот несобственный интеграл сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$. Если же не существует конечного предела, то говорят, что несобственный интеграл расходится, а функцию $f(x)$ называют неинтегрируемой в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$. Аналогично определяется интеграл на промежутке $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$.

Несобственный интеграл на бесконечном промежутке. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty), a \in \mathbb{R}$ и интегрируема на любом отрезке $[a, \xi], \xi < +\infty$. Рассмотрим функцию $F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\xi \to +\infty} F(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} \int\limits_a^\xi f(x)dx,$$

то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Аналогично определяется интеграл на $(-\infty, a]$ Понятия сходимости и расходимости интеграла определяются аналогично случаю конечного промежутка.

Если функция интегрируема в несобственном смысле на промежутках $[a, c)$ и $(c, b]$, то она называется интегрируемой в несобственном смысле на $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то говорят, что интеграл в левой части расходится.

Величину несобственного интеграла от неотрицательной функции можно интерпретировать как площадь (вообще говоря, неограниченной) криволинейной трапеции под ее графиком.

Для несобственных интегралов справедливы следующие свойства:

1. Линейность. Если сходятся интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$, то для любых чисел α и β сходится интеграл $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$, причем $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и пусть $F(x)$ — ее первообразная, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_a^{b-0} = \lim\limits_{\xi\to b-0} F(\xi)-F(a)$.

3. Формула замены переменной. Пусть функция $f(x)$ - непрерывна на $[a,b)$, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, причем $a=\varphi(\alpha)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(\beta-0)=b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

4. Формула интегрирования по частям. Если $u(x), v(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a,b)$ функции и существует $\lim\limits_{x\to b-0}(uv)$, то $\int\limits_a^b udv = uv|_a^{b-0}-\int\limits_a^b vdu$.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

□Для любого $c>0$ интеграл $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ существует как интеграл Римана, поэтому в данном случае особой точкой будет точка 0. Легко указать первообразную подынтегральной функции:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha\neq 1\\ \ln x, & \alpha=1.\end{cases}$$

Зная первообразную, несложно вычислить интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Но часто не требуется вычислять саму величину интеграла, а достаточно просто выяснить сходится он или расходится. Для этого достаточно выяснить, имеет ли первообразная конечный предел в особой точке:

Пусть $\alpha<1$, тогда $\lim\limits_{x\to+0}F(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=0$. Значит, интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится и равен $F(1)-F(0+0)=\frac{1}{1-\alpha}$.

Пусть $\alpha>1$, тогда $\lim\limits_{x\to+0}F(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=\infty$. Значит, интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ расходится.

Пусть $\alpha=1$, тогда $\lim\limits_{x\to+0}F(x)=\lim\limits_{x\to+0}\ln x=\infty$. Значит, интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ расходится.

Итого, интеграл $\int\limits_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant 1$.■

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx.$$

□Для любого $1 < c < +\infty$ интеграл $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^\alpha}$ существует как интеграл Римана, особой точкой будет точка $+\infty$. Первообразная подынтегральной функции:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1 \\ \ln x, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Выясним, имеет ли первообразная конечный предел в особой точке:
Пусть $\alpha < 1$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \infty$.
Пусть $\alpha > 1$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = 0$.
Пусть $\alpha = 1$, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \infty$.
Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.■

Признак сравнения.

Пусть функции f и g удовлетворяют неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a,\xi], \xi \in (a,b)$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость$\int\limits_a^b g(x)dx$.

Следствие из признака сравнения. Пусть $f(x) \geqslant 0$, а $g(x) > 0$ на $[a,b)$, f и g интегрируемы на каждом отрезке $[a,\xi], \xi \in (a,b)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$. Тогда интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. В этом случае говорят, что эти интегралы эквивалентны по сходимости и пишут $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_a^b g(x)dx$.

Следствие. Если $f, g > 0$ и $f \sim g$ при $x \to b-0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_a^b g(x)dx$.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

□Поскольку $|\sin t| \leqslant 1$, то $0 \leqslant \frac{\sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. В силу результата из примера 1, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится по признаку сравнения.■

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^{\frac{3}{2}})}{x \operatorname{sh} x}dx$.

□Подынтегральная функция неотрицательна и непрерывна на $(0,1]$, единственная особая точка $x = 0$. Для исследования интеграла на сходимость воспользуемся следствием из признака сравнения. Для этого найдем функцию вида x^λ, эквивалентную подынтегральной. Например, разложим числитель и знаменатель по формуле Тейлора:

$$\ln(1+x^{\frac{3}{2}}) = x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}}) \sim x^{\frac{3}{2}}, x \to 0,$$

$$\operatorname{sh} x = x + o(x) \sim x, x \to 0,$$

$$x \operatorname{sh} x \sim x^2, x \to 0.$$

Откуда получаем, что, $\frac{\ln(1+x^{\frac{3}{2}})}{x \operatorname{sh} x} \sim \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ при $x \to 0$, и, значит, $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^{\frac{3}{2}})}{x \operatorname{sh} x} dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ сходится, следовательно и исходный интеграл сходится.■

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$$

□Рассмотрим три возможных случая: $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$.

- Первый случай: $\alpha > 1$.

  Если $\alpha > 1$, то $\alpha = 1 + 2\delta$, где $\delta > 0$. Сравним подынтегральную функцию $f(x)$ и $\frac{1}{x^{1+\delta}}$. Для этого представим $f(x)$ в следующем виде:

  $$f(x) = \frac{1}{x^{1+\delta}} g(x), \text{ где } g(x) = \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x}$$

  Известно, что при $\delta > 0$ и любом β $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\delta \ln^\beta x = +\infty$. Следовательно $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, следовательно существует число $x_0 > 2$ такое, что $\forall x \geqslant x_0 \hookrightarrow 0 < g(x) < 1$. Поэтому $0 < f(x) < \frac{1}{x^{1+\delta}}$ при всех $x \in [x_0, +\infty)$ и из сходимости интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}}$, где $x_0 > 2$, $\delta > 0$ следует сходимость интеграла от f на промежутке $[x_0, +\infty)$, а это равносильно сходимости интеграла J.

- Второй случай: $\alpha = 1$.

  Сделав в интеграле $J = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ замену $x = e^t$, получим $J = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$. Поэтому при $\alpha = 1$ интеграл J сходится, если $\beta > 1$, и расходится при $\beta \leqslant 1$.

- Третий случай: $\alpha < 1$.

  Если $\alpha < 1$, то $\alpha = 1 - 2\delta$, где $\delta > 0$. Запишем подынтегральную функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \frac{g(x)}{x^{1-\delta}}$, где $g(x) = \frac{1}{x^{-\delta} \ln^\beta x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$, откуда следует, что $g(x) > 1$ при $x \geqslant x_0 > 2$. Поэтому $f(x) > \frac{1}{x^{1-\delta}}$ при $x \geqslant x_0$, из расходимости интеграла $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1-\delta}}$, где $\delta > 0$, следует расходимость интеграла f на промежутке $[x_0, +\infty)$, откуда заключаем, что интеграл J расходится.

Итак, интеграл сходится при $\alpha > 1$ и любом β или при $\alpha = 1$, $\beta > 1$ и расходится при других значениях α и β.■

Упражнение. Показать, что $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится при $\alpha < 1$ и любом β или при $\alpha = 1$, $\beta > 1$ и расходится при других значениях α и β.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx$$

□Подынтегральная функция $f(x) = \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha}$ положительна при $x > 0$, так как $e^x > 1 + x$ при $x > 0$, и непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$. Интеграл имеет две особые точки: 0 и $+\infty$. Разобьем его на сумму интегралов $J_1 = \int_0^1 f(x)dx$ и $J_2 = \int_1^{+\infty} f(x)dx$ и исследуем каждый из них на сходимость.

1. Особая точка $x = 0$.

Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$, $\ln(1+t) = t + o(t)$ при $t \to 0$, то $\ln(e^x - x) = \ln\bigl(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x\bigr) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, поэтому $f(x) \sim \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$ при $x \to 0$. Следовательно, интеграл J_1 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha - 2 < 1$, т.е. при $\alpha < 3$.

2. Особая точка $+\infty$.

Так как $e^x - x = e^x(1 - xe^{-x}) = e^x(1 + o(1))$, то $\ln(e^x - x) = x + \ln(1 + o(x)) = x + o(1)$ при $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ при $x \to +\infty$. Так как интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$, то интеграл J_2 сходится тогда и только тогда, когда $1 - \alpha > 1$, т.е. при $\alpha > 2$.

Таким образом, интеграл J сходится тогда и только тогда, когда выполняются условия $\alpha < 3$ и $\alpha > 2$, то есть при $2 < \alpha < 3$.■

Применяя критерий Коши существования предела функции к $F(\xi) = \int\limits_a^\xi f(x)dx, \quad a \leqslant \xi < b$, получим критерий Коши сходимости несобственных интегралов:

Теорема 3. Для сходимости несобственного интеграла

$$J = \int\limits_a^b f(x)dx$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши сходимости несобственного интеграла:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon \in (a, b) :\, \forall \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \to \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Замечание Для расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ с особой точкой b необходимо и достаточно выполнение отрицания условия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 :\, \forall \delta_\varepsilon \in (a, b)\, \exists \xi', \xi'' \in (\delta_\varepsilon, b) \to \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пример 7. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx.$$

□Если $\alpha > 1$, то интеграл J сходится, так как $0 \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$.

Докажем, что при $\alpha \leqslant 1$ интеграл расходится. Для $\delta > 1$ выберем число $n \in \mathbb{N}$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\pi n > \delta$, и возьмем $\xi'_\delta = \pi n$, $\xi''_\delta = 2\pi n$, тогда

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\right| = \int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx \geqslant \int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 x}{x}dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4\pi n}\pi n = \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

По критерию Коши интеграл J расходится при $\alpha \leqslant 1$.■

Интегралы от знакопеременных функций.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\xi], \xi < b$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ тоже сходится.

Определение. Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно.

Если интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится, а $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то говорят, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится условно.

Теорема 5 (признак Дирихле.) Пусть функция f непрерывна, а g — непрерывно дифференцируема на $[a,b)$ и выполнены условия:

1. функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ (первообразная f) ограничена на $[a,b)$;
2. функция g монотонна на $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример 8. Исследуем на абсолютную и условную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

□1. Исследуем абсолютную сходимость. Так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant |\sin x| \leqslant 1$, то при $\alpha \leqslant 1$ из расходимости интеграла из примера 7 следует, что интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ расходится, а при $\alpha > 1$ из сходимости $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ следует, что $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ сходится. Таким образом, при $\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится абсолютно, а при $\alpha \leqslant 1$ он не сходится абсолютно.

2. Исследуем условную сходимость при $\alpha \leqslant 1$. Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. Воспользуемся признаком Дирихле, положив $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Первообразная $f(x)$ есть $F(x) = -\cos x$ — ограниченая функция. Функция $g(x)$, очевидно, монотонна и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$. Следовательно, при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл сходится. Ввиду пункта 1 заключаем, что сходимость условная.

3. Пусть $\alpha \leqslant 0$. Покажем, что в этом случае интеграл удовлетворяет отрицанию условия Коши. Для любого числа $b > 1$ выберем натуральное n такое, что $2\pi n > b$ и положим $\xi_1 = 2\pi n, \quad \xi_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$. Тогда $\left|\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx\right| = \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \geqslant \int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\sin x dx = 1.$

Следовательно, $\exists\varepsilon = 1 > 0 : \forall b \in (1, +\infty)\, \exists \xi_1 = 2\pi n > b, \quad \xi_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2} > b \to \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon$. По критерию Коши интеграл расходится.

Итого, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leqslant 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 0$.■

Теорема. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b)$, то есть интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится. Тогда интегралы $\int\limits_a^b g(x)dx$ и $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба условно сходятся, либо оба расходятся.

Пример 9. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x - x - 1)^\alpha}dx.$$

□Подынтегральная функция непрерывна на $(0, +\infty)$, особые точки 0 и $+\infty$. Разобьем J на два интеграла: $J = \int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}dx = J_1 + J_2$.

Рассмотрим интеграл J_1. Особая точка 0, подынтегральная функция знакопостоянна, поэтому будем заменять ее на эквивалентную, раскладывая по формуле Тейлора в окрестности точки 0:

$$\sin 2x = 2x + o(x) \sim 2x,\ x \to 0,$$
$$x + 1 \sim 1,\ x \to 0,$$
$$(e^x - x - 1)^\alpha = (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - 1)^\alpha \sim (\frac{x^2}{2})^\alpha = \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha},\ x \to 0.$$

Следовательно, $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}dx \overset{\text{сх.}}{\approx} \int\limits_0^1 \frac{2x}{\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}dx \overset{\text{сх.}}{\approx} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{2\alpha-1}}$. Последний интеграл, как следует из примера 1, сходится при $2\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$ и расходится в противном случае.

Рассмотрим интеграл J_2.

1. Пусть $\alpha > 0$. Докажем, что в таком случае интеграл J_2 сходится абсолютно.

Рассмотрим выражение $\frac{e^x-x-1}{e^x} = 1 - \frac{x+1}{e^x}$. Напомним, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^\beta = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x+1}{e^x}\right) = 1$. Значит в некоторой окрестности $+\infty$ выполнено неравенство $1 - \frac{x+1}{e^x} > \frac{1}{2}$, следовательно $e^x - x - 1 > \frac{e^x}{2}$. Из этого неравенства и из неравенств $|\sin 2x| \leqslant 1, \quad x + 1 > 1$ следует, что

$$\left|\frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x - x - 1)^\alpha}\right| < \frac{1}{(e^x - x - 1)^\alpha} < \frac{1}{\left(\frac{e^x}{2}\right)^\alpha} = \frac{2^\alpha}{e^{\alpha x}}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2^\alpha}{e^{\alpha x}}dx$ сходится при $\alpha > 0$, следовательно интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}\right|$ сходится, а значит, интеграл J_2 сходится абсолютно.

2. Пусть $\alpha = 0$, тогда $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x+1}dx$. Этот интеграл можно исследовать аналогично тому, как мы исследовали интеграл в примере 7 и можно показать, что интеграл J_2 сходится условно.

3. Пусть $\alpha < 0$. Обозначим $g(x) = \frac{1}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}$, тогда $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x+1)(e^x-x-1)^\alpha}dx = \int\limits_1^{+\infty} g(x)\sin 2x dx$. Из того, что $\forall\alpha < 0\,\forall\beta \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}x^\beta = +\infty$ следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Поэтому $\exists\delta_1\forall x > \delta_1 \hookrightarrow g(x) > 1$.

Покажем, что интеграл J удовлетворяет отрицанию условия Коши. Для любого $\delta_2 > 1$ можно подобрать такое натуральное n, что числа $\xi' = \pi n$ и $\xi'' = \pi n + \frac{\pi}{4}$ будут больше, чем $\max(\delta_1, \delta_2)$. На отрезке $[\xi', \xi'']$ выполнено $g(x) > 1$, а $\sin 2x \geqslant 0$.

Тогда $\left|\int\limits_{\xi'}^{\xi''} g(x)\sin 2x dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\frac{\pi}{4}} g(x)\sin 2x dx > \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\exists\varepsilon = \frac{1}{2} : \forall\delta_2 \in (1, +\infty)\,\exists\xi' = \pi n > \delta_2,\ \xi'' = \pi n + \frac{\pi}{4} > \delta_2 \to \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon$. По критерию Коши интеграл J_2 расходится.

Объединяя результаты изучения интегралов J_1 и J_2, получим: интеграл J сходится абсолютно при $\alpha \in (0, 1)$, сходится условно при $\alpha = 0$ и расходится в остальных случаях.■

Пример 10. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

□Особая точка $+\infty$. В окрестности $+\infty$ выражение $\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$ под знаком синуса в подынтегральной функции стремится к 0, при $x \to +\infty$. Разложим этот синус по формуле Тейлора: $\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{6}\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)$, при $x \to +\infty$. Тогда интеграл J можно представить как $J = \int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx - \frac{1}{6}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}dx + \int\limits_1^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right) dx = J_1 + J_2 + J_3$. Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности.

1. $J_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$. В силу результата примера 8, этот интеграл сходится условно.

2. $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}dx$. Докажем, что этот интеграл сходится абсолютно. Очевидно, что $0 \leqslant \left|\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ сходится, следовательно интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right| dx$ сходится, следовательно интеграл J_2 сходится абсолютно.

3. $J_3 = \int\limits_1^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right) dx$. Из определения $o(.)$ следует, что в некоторой окрестности $+\infty$ выполнено $\left|o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)\right| < \left|\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right|$, откуда следует, что $0 \leqslant \left|o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{x^{3/2}}$, а значит, интеграл J_3 тоже сходится абсолютно.

Итого, в сумме $J_1 + J_2 + J_3$ один интеграл сходится условно, а все остальные — сходятся абсолютно, значит интеграл J сходится условно.■

Пример 11. Исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx.$$

$\square$Особая точка $+\infty$. Преобразуем подынтегральную функцию: $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$. Выражение $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ стремится к 0, при $x \to +\infty$. Разложим вторую дробь по формуле Тейлора: $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}}\right)$. Рассмотрим интеграл от каждого слагаемого в отдельности.

1. $J_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$. В силу результата примера 8, этот интеграл сходится условно.

2. $J_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$. В силу результата примера 7, этот интеграл расходится.

3. $J_3 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^{3/2}} dx$ и $J_4 = \int\limits_1^{+\infty} o\left(\frac{\sin^3 x}{x^{3/2}}\right) dx$. В примере 10 доказано, что эти интегралы сходятся абсолютно.

Итого, в сумме $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ один интеграл расходится, а все остальные — сходятся, значит интеграл J расходится.$\blacksquare$

Замечание. При исследовании интегралов от знакопеременных функций на сходимость нельзя применять признак сравнения или следствие из него. Действительно, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, x \to +\infty$, при этом интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x) dx$ сходится.