# 1 Действительные числа

**Определение** Множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называется множество, на котором определены операции сложения и умножения и отношение порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим 16 аксиомам, и которое состоит более, чем из одного элемента.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + b = b + a$;
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a + 0 = a$;
4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$;
5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot b = b \cdot a$;
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot 1 = a$;
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$;
9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
10. $\forall a \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leqslant a$;
11. $\forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leqslant b$ или $b \leqslant a$;
12. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leqslant b$ и $b \leqslant a) \hookrightarrow a = b$;
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leqslant b$ и $b \leqslant c) \hookrightarrow a \leqslant c$;
14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leqslant b \hookrightarrow a + c \leqslant b + c$;
15. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leqslant b$ и $0 \leqslant c) \hookrightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$;
16. Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и $\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$, то $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$

**Пример 1.** Показать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не удовлетворяет аксиоме 16 (аксиоме непрерывности), то есть неверно, что

$$\text{если } A, B \subset \mathbb{Q} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b, \text{то } \exists c \in \mathbb{Q} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b.$$

$\square$Действительно, пусть $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0, b^2 > 2\}$. Множество $A$ лежит левее множества $B$, то есть $\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$. Но при этом не существует рационального числа, разделящего эти множества, то есть такого $c \in \mathbb{Q} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$. Если рассматривать множества $A$ и $B$ как подмножества $\mathbb{R}$, то их разделяет число $\sqrt{2}$, но оно не является рациональным.$\blacksquare$

**Определение.** Расширенной числовой прямой называется множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. Для элементов $-\infty, +\infty$ не определены операции сложения и умножения, но определены операции сравнения: $-\infty < +\infty$ и $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow -\infty < x < +\infty$.

## 2 Супремум и инфимум

**Определение.** Число $M \in \mathbb{R}$ называется конечной верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$ и называется конечной нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant M$.

**Определение.** Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует конечная верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$. Аналогично, множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует конечная нижняя грань этого множества. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

**Замечание.** Если в выражении с кванторами поменять местами кванторы $\forall$ и $\exists$, то смысл выражения, вообще говоря, существенно меняется. Например, если в определении ограниченного сверху множества переставить кванторы, то получится $\forall a \in A \exists M \in \mathbb{R} \hookrightarrow a \leqslant M$. Это условие справедливо для любого, в том числе неограниченного множества.

Из логических соображений следует, что при раскрытии отрицания к условию, содержащему квантор, следует поменять квантор, а знак отрицания поставить после этого квантора и переменной, к которой он относится. Пусть $P(x)$ – некоторое условие, налагаемое на переменную $x$. Тогда

$$\neg(\forall x \in X \hookrightarrow P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg P(x);$$
$$\neg(\exists\ x \in X : P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X \hookrightarrow \neg P(x).$$

**Пример 2.** Написать в кванторах определение того, что множество $A$ неограничено сверху.

$$\neg(A \text{ ограничено сверху}) \Leftrightarrow \neg(\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \hookrightarrow \neg(\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M) \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : \neg(a \leqslant M) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : a > M.$$

**Определение.** Элемент расширенной числовой прямой $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называется верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$ и называется нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A \hookrightarrow a \geqslant M$.

Непосредственно из определения следует что $+\infty$ является верхний гранью, а $-\infty$ нижний гранью любого множества $A \subset \mathbb{R}$.

**Определение** Элемент расширенной числовой прямой $M \in \overline{\mathbb{R}}$ называют точной верхней гранью или супремумом множества $A \subset \mathbb{R}$ и пишут $M = \sup A$, если

1) $M$ является верхней гранью множества $A$ и

2) не существует числа, меньшего, чем $M$ , и являющегося верхней гранью множества $A$, то есть

1) $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M$ и

2) $\neg(\exists M' \in \mathbb{R} : M' < M,$ и $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant M')$.

Перепишем второе условие в форме:

2) $\forall M' \in \mathbb{R} : M' < M \exists a \in A : a > M'$.

**Теорема 1.** Для любого непустого числового множества супремум существует и единственен. Причем, если множество ограничено сверху, то его супремум — это число, а если множество не ограничено сверху, то супремум равен $+\infty$

□ Пусть задано произвольное множество $A \subset \mathbb{R}$. Если множество $A$ не ограничено сверху, то $+\infty$ является единственной верхней гранью $A$. В этом случае $+\infty$ удовлетворяет определению $\sup A$.

Докажем теперь существование $\sup A \in \mathbb{R}$ в случае, когда $A$ ограничено сверху. Пусть $B$ – множество конечных верхних граней $A$:

$$B = \{b \in \mathbb{R} : \forall a \in A \hookrightarrow b \geqslant a\}.$$

Поскольку множество $A$ ограничено сверху, то множество $B$ непусто. Так как $\forall a \in A \forall\, b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$, то в силу аксиомы непрерывности действительных чисел $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$.

Покажем что $c = \sup A$. Так как $\forall a \in A \hookrightarrow a \leqslant c$, то первый пункт определения супремума выполняется. Поскольку $\forall b \in B \hookrightarrow b \geqslant c$, а $B$ – множество всех конечных верхних граней множества $A$, то не существует числа, меньшего, чем $c$, и являющегося верхней гранью множества $A$. Следовательно выполняется и второй пункт определения супремума, а значит, $c = \sup A$.

Докажем единственность в $\overline{\mathbb{R}}$ супремума множества $A$. Предположим противное: пусть два различных элемента $M \in \overline{\mathbb{R}}$ и $M' \in \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяют определению супремума множества $A$. Пусть $M' < M$ (если $M' > M$, то, меняя обозначения, получим $M' < M$). Поскольку $M' < M = \sup A$, то в силу второго второго пункта определения супремума $\exists a \in A : M' < a$, то есть число $M'$ не является верхней гранью множества $A$. Это противоречит первому пункту определения того, что $M'$ есть супремум $A$. Поэтому наше предположение неверно, следовательно, супремум единственен.■

**Определение.** Элемент $m \in \overline{\mathbb{R}}$ называют точной нижней гранью или инфинумом множества $A \subset \mathbb{R}$ и пишут $m = \inf A$, если

1) $\forall a \in A\, a \geqslant m$ и

2) $\forall m' > m\, \exists a \in A : m' > a$.

Аналогично теореме 1 можно доказать существование и единственность инфинума для любого непустого числового множества. Причем если множество ограничено снизу, то его инфинум – это число, а если множество неограничено снизу, то его инфинум равен $-\infty$.

# 3 Принцип вложенных отрезков

**Определение.** Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется последовательностью вложеных отрезков, если

$$\forall n \in N \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

**Теорема 2** (Кантор). Последовательность вложеных отрезков имеет общую точку.

□ Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ – последовательность вложеных отрезков.

Рассмотрим множество левых концов отрезков $[a_n, b_n]$: $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и множество правых концов этих отрезков: $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Из определения вложенных отрезков следует, что

$$\forall n, m \in N : m > n \hookrightarrow a_n \leqslant a_m < b_m \leqslant b_n.$$

Отсюда следует, что при $n \leqslant m$ справедливы неравенства $a_n \leqslant a_m < b_m$, а при $n > m$ – неравенства $a_n < b_n \leqslant b_m$. В любом случае имеем $a_n \leqslant b_m$. Таким образом, $\forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant b$.

Применим аксиому непрерывности действительных чисел к множествам $A$ и $B$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \hookrightarrow a \leqslant c \leqslant b$. Следовательно, $\forall n \in N \hookrightarrow c \in [a_n, b_n]$, то есть $c$ – точка, общая для всех отрезков $[a_n, b_n]$.■

**Замечание.** Система вложенных интервалов может не иметь ни одной общей точки. Например, $\{(0, \frac{1}{n})\}$ – система вложенных интервалов, не имеющая общих точек.

**Определение.** Последовательность вложеных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ называется стягивающейся, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n : b_n - a_n < \varepsilon$.

**Теорема 3.** Стягивающаяся последовательность вложеных отрезков имеет ровно одну общую точку.

□ По теореме Кантора общая точка существует. Пусть существуют две различные общие точки: $\exists c, c' : \forall n \hookrightarrow c, c' \in [a_n, b_n]$. Пусть для определенности $c' > c$. Выберем $\varepsilon = c' - c > 0$. По определению стягивающейся системы $\exists n : b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c < c' \leqslant b_n$. Отсюда $c' - c \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит выбору $\varepsilon$.■

# 4 Предел последовательности

**Определение.** Если каждому натуральному числу $n$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число $x_n$, то говорят, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$.

**Определение.** Говорят, что число $a \in \mathbb{R}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N_\varepsilon$, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Запишем это условие в кванторах:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Дадим определение бесконечных пределов:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Множество $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется $\varepsilon$-окрестностью числа $a \in \mathbb{R}$. $\varepsilon$-окрестности бесконечностей определяются так: $U_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$, $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, $U_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \bigcup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ Тогда определение предела можно переписать в виде $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$. Такой вид удобен, поскольку позволяет единообразно записать предел для всех $a \in \overline{\mathbb{R}} \bigcup \{\infty\}$:

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} \bigcup \{\infty\}\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

**Пример 3.** Проверить по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

□Выпишем определение предела: $\forall\varepsilon > 0\,\exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Решая неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, получим $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Выберем в качестве $N_\varepsilon$ какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, например, $N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]+1$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ будет выполняться условие $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.■

**Пример 4.** Проверить по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$.

□Выпишем определение предела: $\forall\varepsilon > 0\,\exists N_\varepsilon : \forall n \geqslant N_\varepsilon \to |2^{-n} - 0| < \varepsilon$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Решая неравенство $|2^{-n} - 0| < \varepsilon$, получим $n > -\log_2 \varepsilon$

Выберем в качестве $N_\varepsilon$ какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > -\log_2 \varepsilon$, например $N_\varepsilon = [\log_2 \varepsilon] + 1$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ будет выполняться условие $|2^{-n} - 0| = 2^{-n} \leqslant 2^{-N_\varepsilon} < \varepsilon$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$.■

Говорят, что в некотором множестве содержатся почти все члены последовательности, если вне этого множества либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

**Теорема 4.** Число $a$ — предел последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ содержатся почти все члены последовательности $\{x_n\}$.

Поскольку любые две точки в $\overline{\mathbb{R}}$ имеют непересекающиеся окрестности, то справедливо

**Следствие.** Числовая последовательность может иметь только один предел.

**Теорема 5.** Любая сходящаяся последовательность ограничена. Как показывает следующий пример, не любая ограниченная последовательность сходится.

**Пример 5.** Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (-1)^n$, расходится.

□Никакое число $a \neq \pm 1$ не может быть пределом $\{x_n\}$, так как существует $\varepsilon$-окрестность точки а (например, при $\varepsilon = \min(|a+1|, |a-1|)$), не содержащая ни одного члена $\{x_n\}$. Число 1 также не является пределом $\{x_n\}$, так как существует такая $\varepsilon$-окрестность точки 1 ($\varepsilon = 1$), что вне ее содержится бесконечно много членов $\{x_n\}$ (все члены с нечетными номерами). Аналогично, число –1 не является пределом $\{x_n\}$. Таким образом, никакое число не является пределом $\{x_n\}$, то есть она расходится.■

**Теорема 6.** Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $\forall n \in \mathbb{N}\, x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $\forall n \in \mathbb{N}\, x_n > y_n$, то $a \geqslant b$.

Обратим внимание, что если в условии этой теоремы заменить $x_n \geqslant y_n$ на $x_n > y_n$, то соотношение между $a$ и $b$ останется нестрогим. Например, при $x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $x_n > y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

## 5 Признаки существования предела

**Теорема 7.** Если существуют конечные $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n + y_n = a + b$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, при условии, что $y_n \neq 0$ и $b \neq 0$.

**Пример 6.** Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2+5n+1}$.

□Обозначим дробь под знаком предела через $x_n$. В числителе и знаменателе $x_n$ стоят неограниченные (а значит, не имеющие конечного предела) последовательности, поэтому пункт в) предыдущей теоремы здесь неприменим. Поступим следующим образом: разделим числитель и знаменатель на $n^2$, получим $x_n = \frac{1+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, то теперь $x_n$ записано как отношение двух сходящихся последовательностей и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{1} = 1$. Такого рода рассуждения обычно делаются устно.■

**Пример 7.** Найти ошибку в рассуждениях: для любой последовательности $\{x_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}nx_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(nx_n) = 0\cdot\lim_{n\to\infty}(nx_n) = 0.$$

□Конечно же, утверждение в общем случае не верно.

Ошибка заключается в переходе $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}nx_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n)$. Здесь мы пытаемся применить утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, не убедившись, что пределы в правой части существуют.■

**Теорема 8** (о трех последовательностях). Если $\forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow\ x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\in\mathbb{R}$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

**Пример 8.** Найдти $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Обозначим $\alpha_n = \sqrt[n]{n}-1$. Очевидно, $\alpha_n\geq 0$.

Возведем равенство $\sqrt[n]{n} = 1+\alpha_n$ в степень $n$, получим $n=(1+\alpha_n)^n = 1 + n\cdot\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2+....$ Все слагаемые в последней сумме неотрицательны, поэтому $n=(1+\alpha_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}\cdot\alpha_n^2\geq\frac{n^2}{4}\alpha_n^2$. Таким образом, $n\geq\frac{n^2}{4}\alpha_n^2$, следовательно $\alpha_n^2\leq\frac{4}{n}$ или $\alpha_n\leq\frac{2}{\sqrt{n}}$. Таким образом, $0\leq\alpha_n\leq\frac{2}{\sqrt{n}}$, причем последовательности 0 и $\frac{2}{\sqrt{n}}$ имеют одинаковый предел 0. В силу теоремы о трех последовательностях, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

**Теорема 9.** Если $\{x_n\}$ монотонно неубывает и ограничена сверху, то она сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$. Если $\{x_n\}$ монотонно невозрастает и ограничена снизу, то она сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

**Пример 9.** Найти предел последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентно: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n+6}$.

□Индукцией по $n$ докажем, что $\forall n\hookrightarrow x_n>3$. Имеем $x_1=5>3$ и если $x_n>3$, то $x_n+6>9$, тогда $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}>3$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 3.

Докажем, что $\{x_n\}$ монотонно убывает. Имеем $x_{n+1}<x_n\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_n+6}<x_n\Leftrightarrow(x_n+6)^2<x_n^2\Leftrightarrow x_n^2-x_n-6>0$. Поскольку $x_n>3$, то $x_n^2-x_n-6>0$, значит, $x_{n+1}<x_n$.

Таким образом, $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Следовательно, она имеет предел; обозначим $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}\Rightarrow x_{n+1}^2 = x_n+6$. Перейдем в этом рекуррентном соотношении к пределу. Последовательность $\{x_{n+1}\}$ есть подпоследовательность $\{x_n\}$, поэтому она тоже сходится и имеет тот же предел a. Получим $a^2=a+6$. Решая это уравнение, находим корни $a=-2, a=3$. Поскольку члены последовательности $\{x_n\}$ неотрицательны, она не может сходится к отрицательному числу, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.■

**Утверждение.** Последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ сходится. Ее предел называется числом $e$: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2,71...$

# 6 Подпоследовательности, частичные пределы

**Определение.** Пусть задана последовательность $\{x_n\}$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, то есть такую, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ Тогда последовательность $\{y_k\}$, где $y_k = x_{n_k}$, называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$. Если $\{y_k\}$ имеет конечный или бесконечный предел $a$, то $a$ называется частичным пределом $\{x_n\}$.

**Теорема 10.** Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

**Теорема 11** (критерий частичного предела). Элемент $a \in \overline{\mathbb{R}}$ является частичным пределом $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности числа a лежат бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Приведем примеры последовательностей, имеющих разное количество частичных пределов:

а) Последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет два частичных предела. В любой окрестности числа 1 лежат все четные члены последовательности, то есть бесконечно много членов. Значит число 1 - частичный предел последовательности $\{(-1)^n\}$. Аналогично, число $-1$ - частичный предел последовательности $\{(-1)^n\}$.

б) Последовательность $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ имеет ровно 3 частичных предела, доказательство аналогичное.

в) Последовательность $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$ имеет бесконечно много частичных пределов. Каждое натуральное число является членом этой последовательности для бесконечного сножества номеров, значит, в силу критерия частичного предела, каждое натуральное число является её частичным пределом.

**Пример 10.** Привести пример последовательности для которой множество частичных пределов совпадает с $\mathbb{R}$.

$\square$Известно, что рациональных чисел счетное множество, то есть можно построить биекцию между натуральными и рациональными числами. Рассмотрим эту биекцию как последовательность $\{x_n\}$. Возьмем произвольное действительное число $a$. Любая окрестность числа $a$ — это интервал, а на любом интервале лежит бесконечно много рациональных чисел. Таким образом, в любой окрестности числа $a$ лежат бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, значит, $a$ — частичный предел $\{x_n\}$. Это верно для любого действительного $a$, значит, $\{x_n\}$ имеет все действительные числа в качестве своих частичных пределов.$\blacksquare$

**Теорема 12** (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Определение.** Рассмотрим $L$ — множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$. Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называют число $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup L$, нижним пределом — число $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \inf L$.

**Упражнение.** Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

$\square$Число 1 является частичным пределом $\{x_n\}$, так как оно является пределом подпоследовательности $x_{2n} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)$. Никакое число $a > 1$ не является частичным пределом $\{x_n\}$, так как существует $\varepsilon$-окрестность точки $a$ (например, при $\varepsilon = a-1$), не содержащая ни одного члена $\{x_n\}$. Значит, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup L = 1$. Аналогично, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.■

# 7 Критерий Коши

**Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называют фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\forall\,n \geqslant N_\varepsilon, \forall\,m \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon, \text{или в другом виде,}$$

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\forall\,n \geqslant N_\varepsilon, \forall\,p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$$

**Утверждение.** Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограниченна.

□Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда согласно условию Коши найдется номер $N_1$ такой, что для любого $n \geqslant N_1$ и любого $m \geqslant N_1$ справедливо неравенство $|x_n - x_m| < 1$, и, в частности, $|x_n - x_{N_1}| < 1$.

Так как $|x_n| = |(x_n - x_{N_1}) + x_{N_1}| \leqslant |x_{N_1}| + |x_n - x_{N_1}| < |x_{N_1}| + 1$ для всех $n \geqslant N_1$, то при всех $n$ справедливо неравенство $|x_n| \leqslant C$, где $C = \max(|x_1|, \ldots, |x_{N_1-1}|, |x_{N_1}| + 1)$. Это означает, что $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность.■

**Утверждение.** Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она имеет конечный предел.

□По определению фундаментальной последовательности:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N_\varepsilon :\, \forall n \geqslant N_\varepsilon \forall m \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу предыдущего утверждения, фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ ограниченна. Тогда, по теореме Больцано-Вейерштрасса, она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть ее предел равен $a$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что число $a$ является пределом исходной последовательности $\{x_n\}$. По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists K_\varepsilon :\, \forall k \geqslant K_\varepsilon \hookrightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\overline{N} = \max(N_\varepsilon, n_{K_\varepsilon})$. Фиксируем в подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ номер $n_k \geqslant \overline{N}$. (Такой номер найдется, так как $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$). Тогда перепишем условие фундаментальности при $m = n_k$ и при всех $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\overline{N} : m = n_k \forall n \geqslant \overline{N} \hookrightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что при всех $n \geqslant \overline{N}$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.■

**Утверждение.** Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она фундаментальна.

□Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда по определению предела

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N_\varepsilon : \forall p \geqslant N_\varepsilon \hookrightarrow |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая сначала $p = n$, затем $p = m$, получаем:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ и любого $m \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$, то есть выполняется условие Коши и последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.■

Из двух последних утверждений следует

**Теорема 13** (критерий Коши). Для того, чтобы последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна.

**Пример 11.** Докажем, что расходится последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

□Последовательность расходится, если не выполняется условие Коши, то есть

$$\exists\,\varepsilon > 0\,\forall\,k \in \mathbb{N}\,\exists\,n \geqslant k, \exists\,m \geqslant k \to |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда для любого k положим $n = 2k,\ m = k$. Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_{2k} - x_k| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geqslant \frac{1}{2k}k = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, в силу критерия Коши, последовательность расходится.■