Ф7.1 Куб объёмом $V = 1$ м^3 разделили на кубики объёмом $V_0 = 1$ мм^3 каждый. Какой длины L получится прямолинейная цепочка из этих кубиков, плотно уложенных друг к другу?

Решение. Число кубиков объемом $V_0 = 1$ мм^3 в кубе объемом $V = 1$ м^3: $N = \dfrac{V}{V_0} = 10^9$.

Длина ребра одного кубика объемом V_0 равна $l_0 = 1$ мм. Длина цепочки $l = N \cdot l_0 = 10^9$ мм$= 10^3$ км.

Ф7.2 Экспедиция Магеллана совершила кругосветное путешествие за $t_1 = 3$ года, а первый в мире космонавт Юрий Гагарин облетел земной шар за $t_2 = 108$ мин. Путь, пройденный Магелланом, можно считать приблизительно вдвое большим пути, который пролетел Гагарин. Во сколько раз средняя скорость полета космонавта превышает среднюю скорость плавания Магеллана?

Решение. Скорость плавания Магеллана: $V_1 = \dfrac{2L}{t_1}$. Скорость полёта Гагарина $V_2 = \dfrac{L}{t_2}$.

Их отношение $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{t_1}{2t_2} = \dfrac{3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60}{2 \cdot 108} = 7300$.

Ф7.3 Длина пути от Мишиного дома до школы $L = 1500$ м. Время, оставшееся до начала занятий, $t_1 = 30$ минут. С какой скоростью должен равномерно двигаться в школу Миша, чтобы наверняка не попасть к концу первого урока (длительностью $t_2 = 45$ мин) и не получить двойку за контрольную по алгебре?

Решение. Скорость не должна превышать $V < \dfrac{L}{t_1 + t} = 0{,}33$ м/с.

Ф7.4 Масса пустой бутылки $m_0 = 450$ г. Масса этой же бутылки, полностью наполненной водой, $m_1 = 950$ г. Масса бутылки, полностью наполненной целебной водой, $m_2 = 980$ г. Зная плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, определите плотность целебной воды.

Решение. В первом случае $m_1 = m_0 + \rho_1 V$, а во втором $m_2 = m_0 + \rho_2 V$, откуда, приравнивая V, найдем $\dfrac{m_2 - m_0}{\rho_2} = \dfrac{m_1 - m_0}{\rho_1}$. Окончательно получаем $\rho_2 = \dfrac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0}\rho_1 = 1{,}06$ г/см^3.

Ф8.1 Автомобилист первую треть пути ехал со скоростью $V_1 = 90$ км/ч, вторую треть пути — со скоростью $V_2 = 70$ км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью, вдвое большей средней скорости на первых двух участках пути. Чему равна средняя скорость автомобилиста на всем пути?

Решение. Средняя скорость на первых двух участках равна $V_{\text{ср}12} = \dfrac{\frac{2}{3}S}{\frac{S}{3V_1} + \frac{S}{3V_2}} = \dfrac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} = 78{,}8$ км/ч.

Средняя скорость на всём пути $V_{\text{ср}} = \dfrac{S}{\frac{S}{3V_1} + \frac{S}{3V_2} + \frac{S}{3\cdot 2V_{\text{ср}12}}} = \dfrac{3}{\frac{V_1+V_2}{V_1V_2} + \frac{V_1+V_2}{2\cdot 2V_1V_2}} = \dfrac{12}{5}\dfrac{V_1V_2}{V_1 + V_2} = 94{,}5$ км/ч.

Ф8.2 В жидкости плавает шайба массой m с площадью основания S. Основание шайбы параллельно поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на нижнюю поверхность шайбы. Атмосферное давление равно P_0.

Решение. Из уравнения баланса сил находим искомую силу давления $PS = mg + P_0S$.

Ф8.3 Если бы удалось полностью использовать энергию, выделившуюся при остывании стакана воды от $t_1 = 100°C$ до $t_2 = 20°C$, то на какую высоту можно было бы поднять груз массой $m = 4 \cdot 10^3$ кг? Объём стакана воды $V = 250 \cdot 10^{-6}$ м^3. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Запишем условие перехода всей энергии остывания в потенциальную энергию груза: $mgh = cm(t_1 - t_2) = c\rho V(t_1 - t_2)$, откуда $h = \dfrac{c\rho V(t_1 - t_2)}{mg} = 2{,}1$ м.

Ф8.4 Сила сопротивления движению катера пропорциональна квадрату скорости. Во сколько раз надо увеличить мощность мотора катера, чтобы скорость его возросла в 2 раза?

Решение. Сила тяги $F_T = F_{\text{сопр}} = \alpha V^2$.

Полезная мощность $N = F_TV = \alpha V^3$, откуда $\dfrac{N_2}{N_1} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^3 = 8$.

Ф8.5 Тело, имеющее форму прямого цилиндра, плавает в жидкости так, что основание цилиндра параллельно поверхности жидкости. Плавая в первой жидкости, тело погружается на глубину $h_1 = 30$ мм, а во второй жидкости — на глубину $h_2 = 70$ мм. Плотность третьей жидкости равна среднему арифметическому плотностей первых двух жидкостей. Какова глубина погружения тела в третьей жидкости?

Решение. Баланс сил, действующих на цилиндр, в трёх случаях: $\begin{cases} mg = \rho_1 Sh_1 g; \\ mg = \rho_2 Sh_2 g; \\ mg = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} Sh_3 g. \end{cases}$

Из третьего уравнения $\dfrac{2m}{h_3} = (\rho_1 + \rho_2)S$ и из суммы первых двух находим $m \cdot \left(\dfrac{h_2 + h_1}{h_1 \cdot h_2}\right) = (\rho_1 + \rho_2)S$.

Тогда $\dfrac{2m}{h_3} = m\dfrac{h_2 + h_1}{h_1 \cdot h_2}$, откуда $h_3 = \dfrac{2h_1 \cdot h_2}{h_1 + h_2} = 42$ мм.

Ф9.1 Электропоезд двигался на каждом из участков пути равномерно со своей скоростью, хотя длины участков относились как 3 : 1 : 4 : 2, а промежутки времени их прохождения находились в отношении 4 : 2 : 3 : 1. На последнем участке скорость электропоезда была равна $V = 100$ км/ч. Найти среднюю скорость движения электропоезда на всем пути.

Решение. Пусть длина второго участка равна ΔS, а время движения по четвертому участку есть Δt. Тогда $S_1 = 3\Delta S$, $S_3 = 4\Delta S$, $S_4 = 2\Delta S$, а времена $\Delta t_2 = 2\Delta t$, $\Delta t_3 = 3\Delta t$.

Известна скорость движения поезда на последнем участке $V = \dfrac{2\Delta S}{\Delta t}$. Тогда искомая средняя скорость $V_{\text{ср}} = \dfrac{S_1+S_2+S_3+S_4}{t_1+t_2+t_3+t_4} = \dfrac{(3+1+4+2)\Delta S}{(4+2+3+1)\Delta t} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{V}{2} = 50$ км/ч.

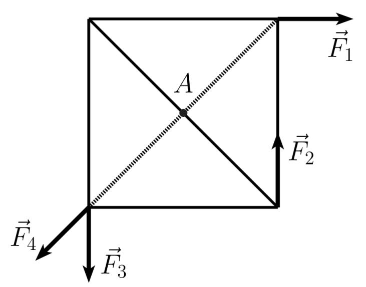
Ф9.2 Определить массу топлива, необходимую реактивному самолету, чтобы преодолеть путь в $S = 10^4$ км, если у него 4 двигателя. Каждый двигатель во время полета развивает силу тяги $F_{\text{Т}} = 40$ кН, а КПД двигателя $\eta = 40\%$. Удельная теплота сгорания топлива $q = 40$ МДж/кг.

Решение. Полезная работа $A = 4\cdot F_T\cdot S$ равна $\eta m q$, откуда $m = \dfrac{4F_TS}{\eta q} = 10^5$ кг.

Ф9.3 Полый шар из материала плотностью ρ_1 плавает в жидкости с плотностью ρ_2 так, что 2/3 его объёма находятся над поверхностью жидкости. Чему равен объём воздушной полости внутри шара, если радиус шара $R = 0{,}03$ м? ($\rho_1 = 0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3; $\rho_2 = 1\cdot10^3$ кг/м^3).

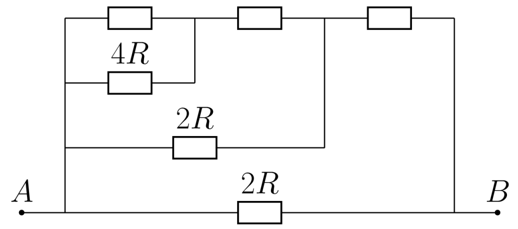
Решение. Согласно формуле объема шара $V_{\text{ш}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ находим $m_{\text{ш}} = \dfrac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho_1$, где r — радиус полости. Условие плавания шара $m_{\text{ш}}g = g\rho_2\dfrac{V_{\text{ш}}}{3}$. Подставляем в последнее уравнение формулы для $m_{\text{ш}}$ и $V_{\text{ш}}$: $\dfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\rho_1 g = g\rho_2\dfrac{4}{9}\pi R^3$, откуда $r^3 = \dfrac{3\rho_1-\rho_2}{3\rho_1}R^3$, а объём полости $V_{\text{полости}} = \dfrac{4\pi R^3}{9\rho_1}(3\rho_1 - \rho_2) = 65{,}97\cdot10^{-6}$ м.

Ф9.4 К плоскому телу, имеющему форму квадрата со стороной $a = 2$ м, приложены четыре силы по 2 Н каждая. Определить равнодействующую R (по модулю) всех сил и момент сил M_A относительно точки A.



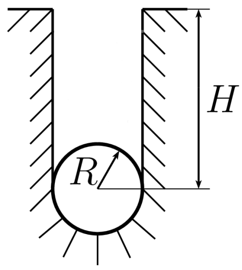
Решение. Квадрат модуля равнодействующей находим как $R^2 = F_1^2 + F_4^2 - 2F_1F_4\cos45^\circ = 2F^2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = F^2(2-\sqrt{2})$, откуда $R = F\sqrt{2-\sqrt{2}} = 1{,}53$ Н. Искомый момент $M_A = F_2\cdot\dfrac{a}{2} = 2$ Н·м.

Ф9.5 Найти общее сопротивление цепи между точками A и B.



Решение. Два параллельно подключенных резистора по $4R$ заменим на эквивалентное сопротивление $2R$. После этого объединям с последовательно подключенным $2R$ в сопротивление $4R$ и заменим его с параллельно подключенным $2R$ на эквивалентное $4/3R$. Останется три сопротивления: последовательно соединённые $4/3R$ и $2R$, а также параллельно с ними подключенное сопротивление $2R$, что эквивалентно сопротивлению в $5/4R$.

Ф10.1 На сухой лед, температура которого равна температуре возгонки t_1 (перехода из твёрдого состояния сразу в газообразное), положили железный шарик радиусом R, нагретый в печи до температуры t_2. Оценить глубину H вертикального канала, когда шарик полностью погрузится в лед. Теплопроводностью шарика и теплообменом с внешней средой можно пренебречь.
Примечание. Считать известными c — удельная теплоемкость железа, ρ_2 — плотность железа, ρ_1 — плотность льда, λ — удельная теплота возгонки льда.



Решение. Объём льда, перешедшего в пар, равен сумме объёмов цилиндра $\pi R^2 H$ и объёма полусферы $\frac{2}{3}\pi R^3$: $V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$.

Из уравнения теплового баланса $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 c(t_2 - t_1) = \left(\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3\right)\rho_1\lambda$, откуда находим $H = \frac{4\rho_2 c(t_2 - t_1)R - 2\rho_1\lambda R}{3\rho_1\lambda}$.

Ф10.2 Из шланга вытекает вода со скоростью 50 м/с. При этом расход воды составляет 5 кг/с. Ударяясь о стенку перпендикулярно, вода стекает вниз по стене. Найти силу давления воды на стену.

Решение. Сила давления, действующая на стенку: $F = \left|\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{-mV}{\Delta t}\right| = 250$ Н.

Ф10.3 До какой температуры в градусах Цельсия нагреется газовой нагревательной колонкой протекающая вода (на вход поступает вода с одной температурой, а на выходе вытекает уже нагретая вода), если колонка потребляет за один час $V_0 = 1{,}8$ м^3 метана? Газ в подводящей трубе находится под давлением 1,2 атм., КПД нагревателя $\eta = 60\%$. Начальные температуры газа и воды $t_0 = 11°C$. Вытекающая струя воды имеет скорость $V = 0{,}5$ м/с, а ее диаметр $d = 1$ см.

Молярная масса метана $\mu = 16$ г/моль; удельная теплота сгорания метана $q = 50{,}1 \cdot 10^6$ Дж/кг; плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3; удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К.

Решение. Масса метана, сжигаемого за $\tau = 1$ час: $m = \frac{\mu P V_0}{RT_0}$. Тепло, идущее на нагрев воды: $Q = \eta m q = \frac{\eta\mu P V_0 q}{RT_0}$. Но $Q = cm(t - t_0) = c\rho V(t - t_0) = c\rho\frac{\pi d^2}{4}V\tau(t - t_0)$, откуда, приравнивая Q, находим $\frac{\eta\mu P V_0 q}{RT_0} = c\rho\frac{\pi d^2}{4}V\tau(t - t_0)$. Окончательно получаем $t = t_0 + \frac{4\eta\mu P V_0 q}{c\rho\pi d^2 V\tau RT_0} \approx 93°C$.

Ф10.4 Глубина погружения нижней грани плавающего в воде куба с ребром $l = 1$ м равна $h = 0{,}25$ м. На куб положили тело объёмом $V = 10$ дм^3, при этом глубина погружения увеличилась на $\Delta h = 0{,}002$ м. Найти плотности куба и тела.

Примечание: параллельность грани куба поверхности воды при плавании обеспечивается незначительными внешними усилиями. Плотность воды $\rho_В = 10^2$ кг/м^3.

Решение. Из закона Архимеда $\rho_к l^3 g = \rho_в h l^2 g$, откуда $\rho_к = \rho_в\frac{h}{l} = 250$ кг/м^3.

После того, как на куб положили тело, баланс сил можем записать в виде $(\rho_к l^3 + \rho_т V)g = \rho_в(h + \Delta h)l^2 g$. Окончательно находим $\rho_т = \rho_в\frac{\Delta h l^2}{V} = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ф10.5 Стрелок попадает из ружья в вертикально подброшенный камень в момент его наивысшей точки подъёма. Высота подъема в этот момент равна $h = 10$ м. Стрелок находился на расстоянии $S = 50$ м от места броска камня. Под каким углом к горизонту направлена скорость пули в момент выстрела? Стрелок и место броска камня находятся на одном горизонтальном уровне, а выстрел и подбрасывание камня происходят одновременно.

Решение. Выражения для скорости компонент пули вдоль осей x и y в зависимости от времени t имеют вид:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha; \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \end{cases}$$

Пусть τ — время полёта. Тогда $h = \dfrac{g\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Теперь находим $v_0\tau\sin\alpha - g\dfrac{\tau^2}{2} = h$, откуда $v_0\tau\sin\alpha = h + \dfrac{g\tau^2}{2}$, поэтому, поделив на $v_0\tau\cos\alpha = S$, находим $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h + g\frac{\tau^2}{2}}{S} = \dfrac{2h}{S} = \dfrac{2}{5}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{5} \approx 21{,}8^\circ$.

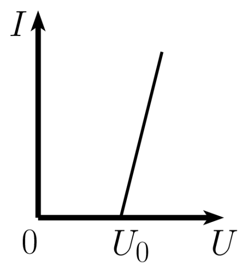
Ф11.1 Тело, свободно падающее без начальной скорости с некоторой высоты, за промежуток времени Δt после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найти высоту, с которой падало тело.

Решение. Пусть T — полное время падения. Тогда можем записать для величины $S = \dfrac{g\Delta t^2}{2}$ равенство $nS = \dfrac{gT^2}{2} - \dfrac{g(T-\Delta t)^2}{2} = \dfrac{g}{2}(2T\Delta t - \Delta t^2)$. После деления на S находим $n = 2\dfrac{T}{\Delta t} - 1$, откуда получаем $T = \dfrac{n+1}{2}\Delta t$. Окончательно запишем $H = \dfrac{gT^2}{2} = \dfrac{g(n+1)^2}{8}\Delta t^2$.

Ф11.2 Молекулярным водородом заполняют аэростат объёмом $V = 300$ м^3 при температуре $T = 300$ К и давлении $P = 10^5$ Па. Из баллона в аэростат поступает водород, расход которого составляет $\gamma = 25$ г/с. Сколько времени займет полное заполнение оболочки аэростата, если в начале в ней не было водорода. Газ считать идеальным.

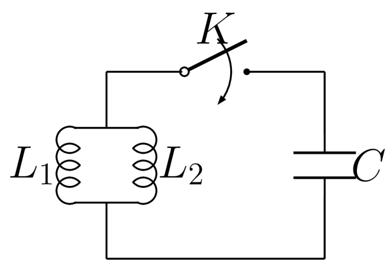
Решение. Из уравнения Клапейрона-Менделеева находим, что требуется закачать водород массой $m = \dfrac{\mu PV}{RT}$, поэтому затраченное время $t = \dfrac{m}{\gamma} = \dfrac{\mu PV}{RT\gamma} = 960$ с$= 16$ мин.

Ф11.3 До напряжения $U_0 = 100$ В, как видно из вольтамперной характеристики нелинейного элемента, ток равен нулю, а затем линейно растет с увеличением напряжения. При подключении его к батарее с некоторой ЭДС и внутренним сопротивлением $r = 25$ кОм через нелинейный элемент течет ток $I_1 = 2$ мА, а при подключении его к той же ЭДС последовательно с балластным сопротивлением $R_б = 2r$ ток равен $I_2 = 1$ мА. Чему равна ЭДС батареи?



Решение. Запишем линейный участок вольт-амперной характеристики нелинейного элемента в виде $I = \alpha(U - U_0)$, откуда $U_1 = \dfrac{I_1}{\alpha} + U_0$ и $U_2 = \dfrac{I_2}{\alpha} + U_0$. В первом случае по правилу Кирхгофа можем записать $\mathscr{E} = I_1 r + U_1 = I_1 r + \dfrac{I_1}{\alpha} + U_0$, а во втором $\mathscr{E} = I_2 \cdot 3r + U_2 = 3I_2 r + \dfrac{I_2}{\alpha} + U_0$. Исключив α, находим $\mathscr{E} = \dfrac{2I_1 r + U_0\left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right)}{\frac{I_1}{I_2} - 1} = 200$ В.

Ф11.4 Конденсатор ёмкости C, заряженный до разности потенциалов U, подключен к катушкам индуктивности L_1 и L_2 через ключ К. Если замкнуть ключ, то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится (т. е. напряжение на обкладках конденсатора поменяет знак). Какие заряды q_1 и q_2 протекут через катушки за это время? Омическими сопротивлениями катушек пренебречь.



Решение. Так как L_1 и L_2 параллельны, ток в начальный момент равен нулю, можем записать $L_1\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} \Rightarrow L_1 I_1 = L_2 I_2$. Далее, отношение протекших зарядов $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{L_2}{L_1}$, откуда с учётом $q_1 + q_2 = 2CU$ находим $q_1 = \dfrac{2L_2 CU}{L_1 + L_2}$ и $q_2 = \dfrac{2L_1 CU}{L_1 + L_2}$.

Ф11.5 Предмет расположен на оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см, а на экране получено его увеличенное изображение. Если предмет передвинуть к линзе на

$l = 5$ см, то изображение предмета будет мнимым. При этом размер мнимого изображения остался прежним. Во сколько раз размер изображения предмета больше размера самого предмета?

Решение. Пусть Γ — искомое увеличение. По формуле тонкой линзы в первом случае получаем $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{\Gamma d_1}$, а во втором случае $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{d_1 - l} - \dfrac{1}{\Gamma(d_1 - l)}$, откуда $d_1 = \dfrac{\Gamma + 1}{\Gamma} F$. Подставляя найденное d_1 в формулу тонкой линзы во втором случае, находим $\Gamma = \dfrac{2F}{l} = \dfrac{2 \cdot 10}{5} = 4$.