Занятие 2 - Тригонометрические уравнения

Курс читает: Глухов Илья Викторович, преподаватель кафедры высшей математики МФТИ

Задача 1

$$\frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$$

Решение

$$\frac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x + 2\sin^2 x = 0 \\ \sqrt{-\cos x} \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\sqrt{-\cos x} \neq 0$$

$$\cos x < 0$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$$
$$2\sin x(\cos x + 2\sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right.$$

Если $\cos x = 0$, то второе уравнение преобразуется в $0 \pm 1 = 0 \to \varnothing$.

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Окончательно,

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n + \pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Задача 2

а) Решите уравнение: $\operatorname{tg} x + \cos(\frac{3\pi}{2} - 2x) = 0$
б) Укажите корни с промежутка $[\pi; \frac{\pi}{2}]$.

Решение

$$\operatorname{tg} x + \cos(\frac{3\pi}{2} - 2x) = 0$$
$$\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x = 0$$
$$\sin x \left(\frac{1 - 2\cos^2 x}{\cos x}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Это ответ на вопрос пункта а).
С промежутка $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$ только корни $-\pi; -\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}$.

Задача 3

а) Решить $2\cos^3 x + \sin^2 x + 2\cos x - 2 = 0$
б) Указать корни с промежутка $[2\pi; \frac{7}{2}\pi]$

Решение

$$2\cos^3 x + 1 - \cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$
$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \qquad (t = \cos x)$$
$$\cos^2 x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$$
$$(\cos^2 x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$
$$2\cos x - 1 = 0 \qquad (\cos^2 x + 1 > 0)$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(ответ на вопрос пункта а))}$$

Отбор корней:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$
$$2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{7}{2}\pi$$
$$\frac{5}{3}\pi \leq 2\pi n \leq \frac{12}{6}\pi$$
$$\frac{5}{6} \leq n \leq 1$$
$$n = 1$$

$$\boxed{x = \frac{7}{3}\pi}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$
$$2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{7}{2}\pi$$
$$\frac{7}{3}\pi \leq 2\pi n \leq \frac{23}{6}\pi$$
$$\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{23}{12}$$
$$\varnothing$$

Окончательный ответ на вопрос пункта б):

$$x = \frac{7}{3}\pi$$

Задача 4

а) Решить $2\cos(x - \frac{11}{2}\pi)\cos x = \sin x$
б) Указать корни с промежутка $[3\pi; \frac{9}{2}\pi]$

Решение

$$2\cos(x - \frac{11}{2}\pi)\cos x = \sin x$$
$$2\cos(x + \frac{1}{2}\pi)\cos x = \sin x$$
$$\sin x(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Это ответ на вопрос пункта а).
Отбор корней: $3\pi, 3\frac{1}{3}\pi, 4\pi$.

Задача 5

Решить уравнение: $(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11\,\mathrm{tg}\,x} = 0$

Решение

$$(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11\,\mathrm{tg}\,x} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x = 0(1) \\ -11\,\mathrm{tg}\,x \geq 0 \end{cases} \\ -11\,\mathrm{tg}\,x = 0 \end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала второе неравенство в системе:

$$\mathrm{tg}\,x \leq 0$$
$$x \in (\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n], \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Теперь рассмотрим первое уравнение в системе:

$$2\cos x\,(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Теперь перейдем к третьему уравнению:

$$\mathrm{tg}\,x = 0$$
$$x = \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Окончательный ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Задача 6

Решить уравнение: $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0$

Решение

$$\begin{cases} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$1 - \sin^2 x - \sin x - \sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0 \to \varnothing \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ & \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Задача 7

Решить уравнение: $5\cos^4 2x - 4\sin^5 x = 9$

Решение

Заметим, что $5\cos^4 2x \in [0; 5]$, а $-4\sin^5 x \in [-4; 4]$. То есть левая часть уравнения $\in [-4; 9]$. Значит, она равна 9, причем это значение достигается когда $5\cos^4 2x = 5$, а $-4\sin^5 x = 4$.

$$\begin{cases} 5\cos^4 2x = 5 \\ -4sin^5 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \pm 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}n, \qquad n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow n = -1 + 4k$$

Задача 8

Решить уравнение: $\sin^4 2x + \cos^8 2x = 1$

Решение

Попробуем оценить левую часть: $\sin^4 2x \in [0; 1]$, $\cos^8 2x \in [0; 1]$. Тогда левая часть $\in [0; 2]$.
Заметим, что сумма точных оценок каждого слагаемого не есть точная оценка суммы.
Рассмотрим $2x = \frac{\pi n}{2}$. Они очевидно удовлетворяют уравнению (проверка подстановкой).
Теперь рассмотрим $x \neq \frac{\pi n}{4}$.
Очевидно, что $\sin^4 2x \leq \sin^2 2x$. Причем, равенство достигается при $\sin^2 2x = 1$, чего не может быть ($x \neq \frac{\pi n}{4}$).
Значит $\sin^4 2x < \sin^2 2x$.

Аналогично, $\cos^8 2x < \cos^2 2x$. Значит $\sin^4 2x + \cos^8 2x < \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$.
Получили, что среди $x \neq \frac{\pi n}{4}$ нет решений уравнения.
Таким образом, ответ: $x = \frac{\pi n}{4}$.

Задача 9

Решить уравнение: $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$

Решение

$$\begin{cases} 13 - 18\operatorname{tg} x = 36\operatorname{tg}^2 x - 36\operatorname{tg} x + 9 \\ 6\operatorname{tg} x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$36\operatorname{tg}^2 x - 18\operatorname{tg} x - 4 = 0$$

$$18\operatorname{tg}^2 x - 9\operatorname{tg} x - 2 = 0$$

$$D = 81 + 144 = 225$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{9 \pm 15}{36} = \begin{cases} \frac{2}{3} - \text{удовлетворяет неравенству} \\ -\frac{1}{6} - \text{не удовлетворяет неравенству} \end{cases}$$

$$tgx = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \arctan\frac{2}{3} + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Задача 10

Решить уравнение: $\sqrt{17 + 7\sin 2x} = 3\sin x + 5\cos x$

Решение

$$\begin{cases} 17 + 7\sin 2x = 9\sin^2 x + 30\sin x\cos x + 25\cos^2 x \\ 3\sin x + 5\cos x \geq 0 \end{cases}$$

Приведем первое уравнение к виду однородного:

$$17\sin^2 x + 17\cos^2 x + 14\sin x\cos x = 9\sin^2 x + 30\sin x\cos x + 25\cos^2 x$$

$$8\sin^2 x - 16\sin x\cos x - 8\cos^2 x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \begin{cases} 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Теперь рассмотрим неравенство:

$$3\sin x + 5\cos x \geq 0$$

$$\cos x(3\operatorname{tg} x + 5) \geq 0$$

$$x \in [\arctan(-\frac{5}{3}); \pi + \arctan(-\frac{5}{3})]$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x = \begin{cases} 1+\sqrt{2} - \text{подходит} \\ 1-\sqrt{2} - \text{подходит} \end{cases}$$

$$x = \arctan(1 \pm \sqrt{2}) + 2\pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Другой способ решения неравенства:

$$3\sin x + 5\cos x = \sqrt{34}(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x + \frac{5}{\sqrt{34}}\cos x) =$$

$$= \sqrt{34}(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x) = \sqrt{34}\sin(x+\varphi) \geq 0$$

$$2\pi n \leq x + \varphi \leq \pi + 2\pi n$$

$$-\arccos\frac{3}{\sqrt{34}} + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arccos\frac{3}{\sqrt{34}} + 2\pi n$$

Задача 11

Решить уравнение: $4^{\cos x} + 2 \cdot 6^{\cos x} - 9^{\frac{1}{2}+\cos x} = 0$

Решение

Замена: $a = 2^{\cos x}, b = 3^{\cos x}, t = \frac{a}{b}$.

$$a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} = \begin{cases} -3 \to \varnothing \\ 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \end{cases}$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Задача 12

а) Решить уравнение: $1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{30x^2 + 12}$
б) Отобрать корни, лежащие в промежутке $[-\frac{11}{5}; \frac{16}{5}]$.

Решение

$$\log_3 3 + \log_3(x^4 + 25) = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_3(30x^2 + 12)$$

$$3(x^4 + 25) = 30x^2 + 12$$

$$3x^4 - 30x^2 + 63 = 0$$

$$x^4 - 10x^2 + 21 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 3 \\ x^2 = 7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Отбор корней: $\sqrt{3} < \frac{16}{5}$, $\sqrt{7} < \frac{16}{5}$, $-\frac{11}{5} < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{7} < -\frac{11}{25}$. То есть ответ на вопрос пункта б):

$$x = \pm\sqrt{3}, \sqrt{7}$$

Задача 13

Решить уравнение: $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$

Решение

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x = \sin 3x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = \sin 3x$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin 3x$$

$$2 \sin \left(\frac{2x + \frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x + \frac{\pi}{4} + 3x}{2} \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \\ \cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}\pi n & \end{array}\right.$$