Московский физико-технический институт

Движение проводников в магнитном поле.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Как известно, электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Связь магнитного поля с током привела к многочисленным попыткам возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта фундаментальная задача была блестяще решена в 1831 году английским физиком М.Фарадеем, открывшим явление электромагнитной индукции. Обычно электромагнитной индукцией называется возникновение электродвижущей силы в проводнике при его перемещении в магнитном поле либо в замкнутом проводящем контуре вследствие его движения в магнитном поле или изменения самого поля. В замкнутом проводнике при этом возникает электрический ток, называемый индукционным током.

Основной закон электромагнитной индукции (объединяющий закон Фарадея и правило Ленца): электродвижущая сила электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур: $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Знак минус в правой части электромагнитной индукции соответствует правилу Ленца: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий кои тур, в контуре возникает индукционный ток такого направлении, что его собственное магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Заряд, протекший по контуру сопротивлением R при изменении магнитного потока сквозь контур на величину $\triangle\Phi$, за время τ равен: $q = \displaystyle\int_0^\tau I_i dt = \int_0^\tau \frac{\mathcal{E}}{R} dt = -\frac{\triangle\Phi}{dt}$, где I_i — индукционный ток в контуре;

R — электрическое сопротивление контура;

$\triangle\Phi$ — изменение магнитного потока в контуре.

Магнитный поток сквозь контур и сила тока в нем связаны соотношением $\Phi = LI$, где L — индуктивность контура.

Ещё одним важным моментом является закон сохранении магнитного потока.

Допустим, что виток с током находится в произвольном магнитном поле — постоянном или переменном. Пусть он движется и деформируется произвольным образом. При этом в витке возбуждается индукционный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R} = -\frac{d\Phi}{dt}\frac{1}{R}.$$

Если омическое сопротивление R равно нулю, то должно быть $\mathcal{E}_{инд} = 0$, так как в противном случае в проводнике возникли бы бесконечно большие токи, что физически невозможно. Значит, должно быть $d\Phi/dt = \mathrm{O}$, а потому $\Phi = \mathrm{const}$. Таким образом, при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода. Это положение называется теоремой о сохранении магнитного потока. Такое сохранение обусловлено индукционными токами, которые, согласно правилу Ленца, препятствуют всякому изменению магнитного потока через контур провода. Магнитный поток, обусловленный внешним магнитным полем, не остается постоянным. Магнитный поток, создаваемый индукционными токами, также меняется во времени. Однако сумма этих двух потоков остается постоянной.

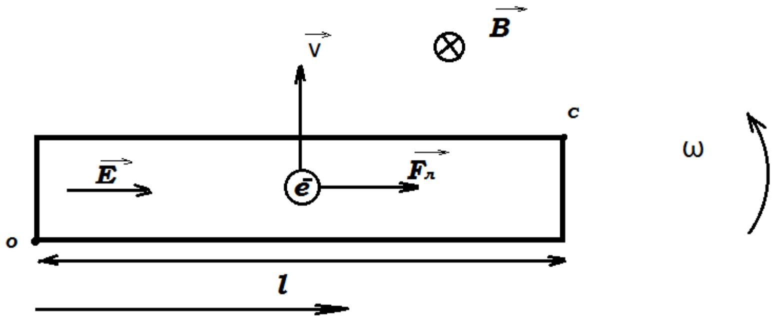
Представим себе теперь идеально проводящую жидкость, движущуюся в магнитном поле. Выделим в ней произвольный жидкий замкнутый контур, т. е. контур, движущийся вместе с частицами самой жидкости. Такой контур может играть роль идеально проводящего провода, и к нему применима теорема о сохранении магнитного потока. Из нее следует, что при любых движениях идеально проводящей жидкости магнитный поток, пронизывающий всякий замкнутый жидкий контур, не меняется во времени. Идеально проводящая жидкость может свободно течь вдоль магнитных силовых трубок. Но всякое движение ее поперек магнитного поля увлекает и эти силовые трубки.

Явление происходит так, как если бы магнитные силовые линии были вморожены в вещество и двигались вместе с ним. Такое представление о вмороженности магнитных силовых линий широко применяется в магнитной гидродинамике при рассмотрении движений жидкостей, обладающих высокой электрической проводимостью. Оно применяется также в астрофизике и физике горячей плазмы, поскольку последняя также обладает высокой электрической проводимостью.

Сегодня явление электромагнитной индукции играет значительную роль в технике. На её действии были созданы такие устройства как: дисковый генератор и двигатель Фарадея, рабочим телом которых является металлический диск, вращающийся в магнитном поле; линейные электромоторы и генераторы, где основной идеей является движение перемычки с током в магнитном поле; магнитные гидродинамические генераторы и двигатели, действие которых будут рассмотрены нами в некоторых задачах. Также были созданы МГД — насосы, в область применения которых входят: системы аварийного и технологического слива расплавленных металлов из емкостей; системы транспортировки расплавленных металлов и сплавов при разливе в изложницы и получении отливок, дозированная подача расплавов металлов; железоотделители для извлечения магнитных примесей из сыпучих тел с массой извлекаемых частиц. Также с помощью явления электромагнитной индукции считывается аудио- и видеоинформация с магнитных лент. В аэропортах применяются детекторы металла, которые фиксируют поля индукционных токов в металлических предметах.

Примеры решения задач.

Задача №1 Металлический стержень равномерно вращается вокруг одного из его концов в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к силовым линиям поля ω=75 рад/сек, l=0,4 м, B=0,1 Тл. Найти разность потенциалов между точками 1 и 2.

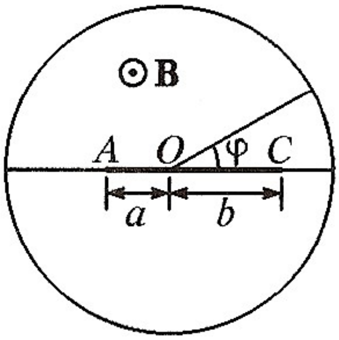


Решение: Поскольку согласно теории металлический стержень есть проводник заполненный «электронным газом», который находится в его объёме (под электронным газом понимают свободные электроны), то при движении, то есть вращении проводника, движутся и электроны, следовательно на них действует сила Лоренца. С учётом заряда, направления поля и угловой частоты и правила правой руки получим, что электроны будут двигаться от точки O к точке C. В результате возникнет разность потенциалов и напряжённость поля. Через достаточно большое время после процесса становления сила электрического поля сравняется по величине с силой Лоренца: $F_л = F_{элек} = qE$, следовательно, $qBv = qE$, где q — электрический заряд, движущийся от O до C, поэтому $E(r) = -\dfrac{d\varphi}{dr} \Rightarrow d\varphi = -E(r)dr = -B\omega r dr$.

Проинтегрируем это выражение от 0 до l: $\displaystyle\int_0^l d\varphi = -B\omega \int_0^l r dr \Rightarrow \triangle\varphi_{0c} = \frac{B\omega l^2}{2} = 0{,}6$ В.

Ответ: $\triangle\varphi_{OC} = \dfrac{B\omega l^2}{2} = 0{,}6$ В.

Задача №2 На горизонтальном непроводящем диске по его диаметру укреплен тонкий проводящий стержень AC. Диск находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-4}$ Тл, перпендикулярной плоскости диска, и совершает крутильные колебания относительно вертикальной оси, проходящей через точку O. $\alpha = \alpha_0 \cos\omega t$ — зависимость угла поворота от времени. Длина стержня $l = a + b$, где $a = 0,5$ м, $b = 1$ м. Определить максимальную разность потенциалов между концами стержня A и C, если $\alpha_0 = 0,6$ рад, $\omega = 0,2$ рад/сек.



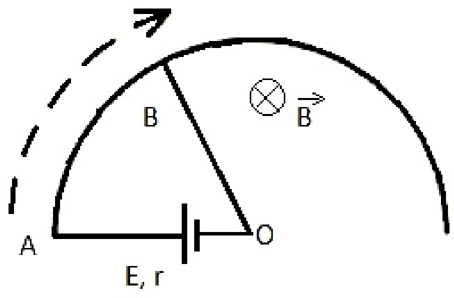
Решение: Аналогично предыдущей задаче $qBv(r) = E(r)q \Rightarrow E(r) = Bv(r)$, где $v(r) = \omega r = \dfrac{d\alpha(t)}{dt} r = -\alpha_0 \omega r \sin\omega t \Rightarrow E(r) = -\alpha_0 \omega r B \sin\omega t$.

Теперь, в отличие от предыдущей задачи точка O не является началом проводника, поэтому с учётом направления поля и правилом правой руки сила Лоренца, действующая на электроны между точками A и O и O и C при переходе через точку O сменит знак.

Следовательно, итоговая напряжённость поля между A и C будет равна: $E_{AC} = E_{OC} - E_{AO}$, $E(r) = -\dfrac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \displaystyle\int_A^C d\varphi = -\int_A^C E(r)dr \Leftrightarrow \triangle\varphi_{AC} = -\left[\int_0^b E(r)dr - \int^a -0E(r)dr\right] = \alpha_0\omega \sin\omega t(b^2/2) - \alpha_0 \omega B \sin\omega t(a^2/2) = B\alpha_0\omega\sin\omega t\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) \Rightarrow \triangle\varphi_{AC_{max}} = \frac{b^2-a^2}{2}\alpha_0\omega B = 4,5 \cdot 10^{-2}$ В.

Ответ: $\triangle\varphi_{AC_{max}} = \dfrac{b^2-a^2}{2}\alpha_0\omega B = 4,5 \cdot 10^{-2}$ В.

Задача №3 Проволочное полукольцо радиусом $R=$ 10 см находится в однородном магнитном поле с индукцией B=1 Тл. Вектор $\overrightarrow{B}$ перпендикулярен к плоскости кольца. Центр полукольца соединён с двумя проводниками, один из которых AO неподвижен и содержит элемент с ЭДС $\mathcal{E} = 0,3$ В, а другой BO поворачивают вокруг точки O с угловой скоростью ω_0 =10 рад/сек. Внутреннее сопротивление элемента $r = 2,5$ Ом, сопротивление проводников пренебрежимо мало. Найти силу тока I в контуре ABO.



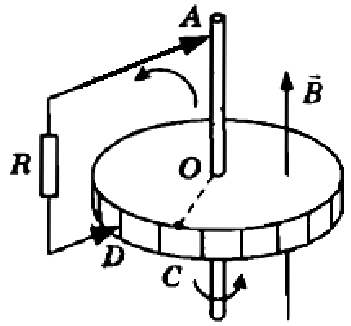
Решение: При перемещении проводника OB в магнитном поле магнитный поток меняется за счёт изменения площади $\triangle S$ контура. Магнитный поток в момент времени t_0 равен $\varPhi_1 = BS_1$, в момент времени t равен $\varPhi_2 = BS_2$, найдём приращение потока за время $\triangle t$: $\triangle\varPhi = B(S_2 - S_1) = B\triangle S$. В данной задаче за время $\triangle t$ проводник OB проворачивается на угол $\triangle\varphi$ и площадь описываемого сектора $\triangle S = \dfrac{\triangle\varphi R^2}{2}$, таким образом: $\triangle\varPhi = \dfrac{B\triangle\varphi R^2}{2}$.

Тогда: $\mathcal{E}_{\text{индукции}} = +\dfrac{\triangle\varPhi}{\triangle t} = \dfrac{BR^2}{2}\dfrac{\triangle\varphi}{\triangle t} = \dfrac{BR^2\omega}{2}$.

Определим направление индукционного тока по правилу Ленца. Так как внешний магнитный поток со временем увеличивается, то есть $\dfrac{\triangle\varPhi}{\triangle t} > 0$, то должен возникнуть индукционный ток такого направления, чтобы его магнитный поток был направлен навстречу внешнему. По правилу буравчика этому соответствует указанное на рисунке направление $I_{\text{инд}}$, следовательно, в контуре действуют две ЭДС, включенные навстречу друг другу. Поэтому ток в контуре равен: $I = \dfrac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}}{r} = \mathcal{E}/r + \dfrac{BR^2\omega}{2r} = \dfrac{2\mathcal{E} + BR^2\omega}{2r} = 0,1$ А.

Ответ: $I = \dfrac{2\mathcal{E} + BR^2\omega}{2r} = 0,1$ А.

Задача №4 В однородном магнитном поле с индукцией B равномерно вращается в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, медный диск радиусом R_0, совершая N оборотов в сек. С помощью скользящих контактов диск подключён к цепи, сопротивление которой R. Определите максимальную ЭДС индукции, возникающую при вращении диска, количество теплоты Q, выделенное в цепи за время, в течение которого диск совершил N оборотов.



Решение:

Предположим, что скорость вращения такая, что работа выхода (при отсутствия поля), тогда общая $\mathcal{E}_{инд}$ равна сумме ЭДС $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_{инер}$.

Рассмотрим участок цепи AD: $\mathcal{E}_{инер} = \dfrac{1}{e}\oint F_{инерции}dr = \dfrac{1}{e}\int_0^R m_e\omega^2 r dr = \dfrac{m_e\omega^2 r^2}{2l}\Big|_0^{R_0}$

$\mathcal{E}_{индукц} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, где $d\Phi = dSB \Rightarrow d\Phi = \displaystyle\int_0^{R_0} B\frac{\pi r^2}{2\pi}d\varphi = \int_0^{R_0}\frac{Br^2\omega}{2}dt = \frac{BR_0^2\omega dt}{2}$.

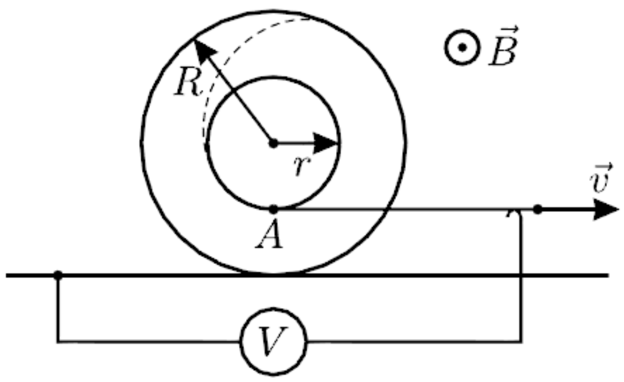
Имеем: $\mathcal{E}_{индукции} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{BR_0^2\omega}{2}$ (в нашем случае обе ЭДС сонаправлены, поэтому величина итоговой ЭДС равна: $\mathcal{E} = \dfrac{BR_0^2\omega}{2} + \dfrac{m_e\omega^2 R_0^2}{2l}$ (где m_e — масса электрона, e — его заряд)

Откуда находим соответствующее значение тока в цепи: $I = \mathcal{E}/R$ и тепло, выделяющееся на нагрузке: $dQ = I^2Rdt = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}dt \Rightarrow \triangle Q = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}\triangle\tau$, где $\nu = \dfrac{N}{\triangle\tau} \Rightarrow \triangle\tau = N/\nu$ (ν — частота), $\omega/2\pi = \nu$.

Имеем: $\triangle Q = \dfrac{N}{\nu R}\left(\dfrac{BR_0^2}{2}2\pi\nu + \dfrac{m4\pi^2\nu^2R_0^2}{2l}\right)^2$.

Ответ: $\triangle Q = \dfrac{N}{\nu R}\left(\dfrac{BR_0^2}{2}2\pi\nu + \dfrac{m4\pi^2\nu^2R_0^2}{2l}\right)^2$ и $I = \left(BR_0^2\pi\nu + \dfrac{2m_e\pi^2\nu^2R_0^2}{l}\right)/R$.

Задача №5 Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом r и двух крайних цилиндров радиусами $R > r$. Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещённый в однородное постоянное магнитное поле B, линии индукции которого параллельны оси катушки. К первому концу провода, лежащему на столе, подсоединяют идеальный вольтметр, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединённого с вольтметром, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном оси катушки (см. рисунок). Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найдите показания вольтметра.



Решение: В данной ситуации катушка, очевидно, будет катиться в том направлении, в котором тянут второй конец провода. При этом провод будет наматываться на средний цилиндр и сматываться с крайнего цилиндра. Вследствие этого будет изменяться общая площадь контура, пронизываемого магнитным полем, и в контуре возникнет ЭДС индукции, которую и покажет вольтметр. Изменение магнитного потока через контур удобно разбить на две части: первую, связанную с изменением площади обмотки самой катушки, и вторую, связанную с изменением площади той части контура, которая образована подводящими проводами и меняется за счёт движения катушки. Нужно также иметь в виду, что знак потока через вторую часть контура противоположен знаку потока через первую часть, поскольку направления обхода этих контуров противоположны. Рассмотрим изменение магнитного потока через обмотку катушки. Точка A катушки (см. рис.) движется вдоль стола с постоянной скоростью v. Так как проскальзывание отсутствует, то скорость u оси катушки можно найти из соотношения $\dfrac{v}{R-r} = \dfrac{u}{R} = \omega$ (ω — угловая скорость вращения), откуда $u = \dfrac{vR}{R-r}$, а $u - v = \dfrac{vr}{R-r}$.

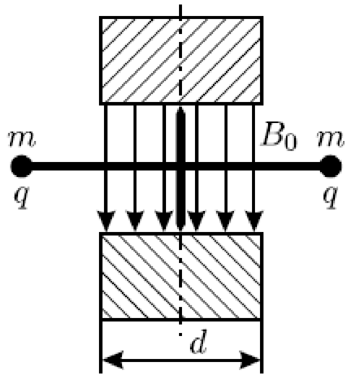
Пусть за время $\triangle t$ ось катушки сместилась вдоль стола на расстояние $\triangle L_1 = u\triangle t$. При этом на средний цилиндр намотается участок провода длиной $\triangle L_2 = (u-v)\triangle t$, а с крайнего цилиндра смотается участок длиной $\triangle L_1$. Изменение потока магнитной индукции через обмотку на крайнем цилиндре при этом равно: $\triangle\Phi_1 = B\triangle S_1 = B\pi R^2\cdot\dfrac{\triangle L_1}{2\pi R} = \dfrac{BR}{2}\triangle L_1 = \dfrac{BRu}{2}\triangle t = \dfrac{BR^2 v}{2(R-r)}\triangle t$; а через обмотку на среднем цилиндре — $\triangle\Phi_2 = B\triangle S_2 = B\pi r^2\cdot\dfrac{\triangle L_2}{2\pi r} = \dfrac{Br}{2}\triangle L_2 = \dfrac{Br(u-v)}{2}\triangle t = \dfrac{Br^2 v}{2(R-r)}\triangle t$, где $\triangle S_1$ и $\triangle S_2$ — изменения площадей средней и крайней обмоток соответственно. Поток через обмотку на крайнем цилиндре уменьшается, а через обмотку на среднем — увеличивается. Поток через площадь, ограниченную подводящими проводами, уменьшается за счёт того, что катушка движется вправо со скоростью u. При этом за время $\triangle t$ поток уменьшится на величину $\triangle\Phi_3 = B(R-r)u\triangle t = BRv\triangle t$.

Следовательно, с учётом противоположного направления обхода двух частей общего контура, величина ЭДС индукции, которую покажет вольтметр, равна: $U = -\dfrac{\triangle\Phi_1}{\triangle t} + \dfrac{\triangle\Phi_2}{\triangle t} + \dfrac{\triangle\Phi_3}{\triangle t} = -\dfrac{BR^2 v}{2(R-r)} + \dfrac{Br^2 v}{2(R-r)} + BRv = \dfrac{vB(R-r)}{2}$.

Задачу можно решить и другим, более простым способом, рассматривая не изменение магнитного потока через контуры, а движение проводников в магнитном поле. Заметим, что при движении катушки нескомпенсированная ЭДС возникает только на участке провода, начинающемся в точке касания катушки и стола, и заканчивающемся в точке A. Это следует из того, что все идущие вверх участки намотанного на катушку провода, кроме указанного, имеют соответствующие и идущие вниз участки по другую сторону вертикальной оси симметрии катушки, и возникающие в этих участках провода ЭДС взаимно компенсируются. Остающийся «нескомпенсированным» участок провода имеет длину $R - r$, его начало в любой момент времени покоится, а конец движется вдоль стола со скоростью v, причём скорость точек этого воображаемого проводника, лежащих между его началом и концом, равномерно возрастает от 0 до величины v. Поэтому средняя скорость этого проводника направлена горизонтально и равна $v_{ср} = v/2$, а возникающая в нём ЭДС равна: $U = B(R-r)v_{ср} = vB(R-r)/2$.

Ответ: $U = B(R-r)v_{ср} = vB(R-r)/2$.

Задача №6 Тонкий невесомый диэлектрический стержень длиной L может свободно вращаться в горизонтальном положении вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. На концах стержня закреплены два маленьких шарика, имеющих массу m и заряд q. Вся эта система помещена между цилиндрическими полюсами электромагнита, создающего однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B_0. Диаметр полюсов равен $d < L$, а их ось совпадает с осью вращения стержня (см. рисунок; обмотки электромагнита и его ферромагнитный сердечник, замыкающий полюса, не показаны). Магнитное поле равномерно уменьшают до нулевого значения. Найдите угловую скорость, которую приобретёт стержень после выключения магнитного поля. Считайте, что поле было только между полюсами магнита.



Решение: Выясним сначала, почему стержень начнёт вращаться. Рассмотрим воображаемый круговой контур, по которому движутся заряды при вращении стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При выключении магнитного поля магнитный поток через этот контур уменьшается, что приводит к возникновению вихревого электрического поля. Это поле действует на заряды и разгоняет их. Данный процесс для простоты понимания можно представлять себе так, как будто вместо воображаемого контура имеется проводящее кольцо, содержащее всего два носителя заряда. Тогда при выключении магнитного поля в проводнике будет возникать ЭДС индукции, и потечёт ток, то есть заряды придут в движение. Для решения задачи прежде всего найдём ЭДС индукции $\mathcal{E}$. По условию однородное магнитное поле в любой момент времени сосредоточено между полюсами электромагнита и строго вертикально. По закону электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\dfrac{\triangle \Phi}{\triangle t} = -S\dfrac{\triangle B}{\triangle t}$.

Здесь $\Phi = SB$ — магнитный поток через контур, $S = \pi d^2/4$ — площадь торцевого сечения полюса электромагнита, B — мгновенное значение индукции магнитного поля. По условию магнитное поле равномерно уменьшается от значения B0 до нуля; пусть это происходит за время τ: $B = B_0 - \dfrac{B_0}{\tau}t$.

Отсюда $\dfrac{\triangle B}{\triangle t} = -\dfrac{B_0}{\tau}$, и для ЭДС индукции получаем: $\mathcal{E} = \dfrac{\pi d^2 B_0}{4\tau}$

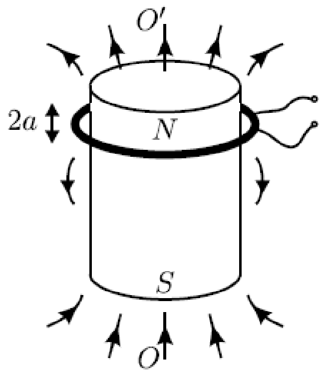
С другой стороны, ЭДС по определению есть отношение работы $A_{стор}$, совершаемой сторонними силами $F_{стор}$ при перемещении пробного заряда, к его величине $q_{проб}$. В нашем случае появление ЭДС индукции связано с возникновением вихревого электрического поля, которое и совершает работу. Значит, $\mathcal{E} = A_{стор}/q = F_{стор}/q \cdot \pi L = E\pi L$. Здесь E — напряжённость вихревого электрического поля. Приравнивая два полученных выражения для $\mathcal{E}$, найдём E: $E = \dfrac{d^2 B_0}{4\pi L}$.

Так как система симметрична, то для нахождения угловой скорости вращения стержня можно рассмотреть только один заряд. На этот заряд в вихревом электрическом поле действует сила $F = qE$, направленная по касательной к окружности, по которой он движется. В соответствии со вторым законом Ньютона эта сила приводит к появлению тангенциального (касательного) ускорения, которое равно: $a = F/m = qE/m = \dfrac{qd^2 B_0}{4m\tau L}$.

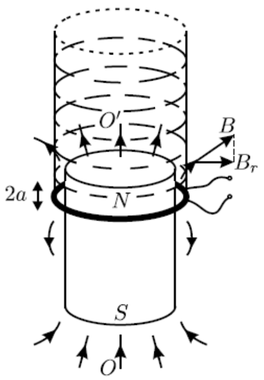
В течение времени τ, за которое происходит уменьшение магнитного поля, заряды движутся по окружности с этим ускорением и приобретают линейную скорость $v = a\tau = \dfrac{qd^2 B_0}{4mL}$. Этой линейной скорости зарядов соответствует искомая угловая скорость стержня: $\omega = \dfrac{v}{L/2} = \dfrac{qd^2B_0}{2mL^2}$.

Ответ: $\omega = \dfrac{qd^2B_0}{2mL^2}$.

Задача №7 На цилиндрический постоянный магнит вблизи одного из его полюсов надета катушка (см. рисунок), имеющая вид узкого кольца; вся система симметрична относительно оси OO'. Если трясти катушку вдоль оси OO' так, чтобы она совершала гармонические колебания с амплитудой $a = 1$ мм, много меньшей размеров магнита и катушки, и частотой $f = 1000$ Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 5$ В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток $I = 200$ мА?



Решение: Пусть радиус катушки равен R, а число витков в ней N. Тогда ЭДС индукции, возникающая в катушке при её небольшом смещении вдоль оси OO', равна $\mathcal{E}(t) = -N\dfrac{\triangle\Phi}{\triangle t}$, где $\triangle\Phi$ — изменение магнитного потока через один виток катушки.



Для того, чтобы найти $\triangle\Phi$, построим очень длинный цилиндр, ось которого параллельна OO', а одно из оснований опирается на катушку (см. рис.). Очевидно, что магнитный поток через один виток катушки равен магнитному потоку через боковую поверхность и другое основание этого цилиндра. Поэтому, если катушка смещается вдоль OO' на малое расстояние $\triangle x$, то изменение магнитного потока через один виток равно изменению магнитного потока через боковую поверхность такого цилиндра, то есть $\triangle\Phi = 2\tau R\triangle x B_r$, где Br — радиальная компонента вектора магнитной индукции поля, создаваемого магнитом в том месте, где находится кольцо.

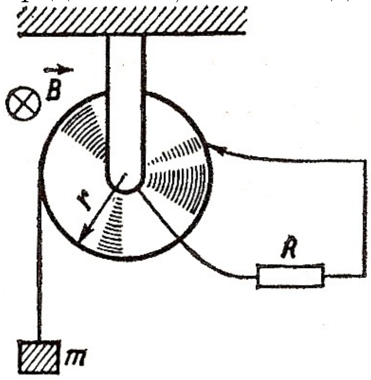
Следовательно, $E(t) = -2\pi RNB_r v(t)$ где $v(t) = \triangle x/\triangle t$ — мгновенная скорость катушки. Так как при гармонических колебаниях катушки амплитуда изменения её скорости равна $v_0 = 2\pi fa$, то амплитуда наводимой в катушке ЭДС индукции составляет $\mathcal{E}_0 = 2\pi RNB_r v_0 = 4\pi^2 faNRB_r$.

Если через неподвижную катушку пропустить постоянный ток I, то на неё будет действовать сила Ампера, направленная вдоль оси OO' и равная $F = N \cdot 2\pi RIB_r$. Учитывая выражение для $\mathcal{E}_0$, окончательно получим: $F = \dfrac{I\mathcal{E}_0}{2\pi fa} \approx 0,16$ Н.

Ответ: $F = \dfrac{I\mathcal{E}_0}{2\pi fa} \approx 0,16$ Н.

Задача №8 (Медный блок) На медном блоке радиусом r, закрепленном так, как показано на рис., навита длинная нить, на конце которой подвешен груз массой m. Блок находится в однородном магнитном поле B, силовые линии которого перпендикулярны к блоку. К оси блока подключен резистор R, второй вывод которого соединен с периферией блока с помощью щетки, скользящей по его краю. Под действием груза блок начинает вращаться. Определить предельную конечную скорость блока. Трением пренебречь. Изменится ли результат, если резистор будет двигаться вместе с блоком?

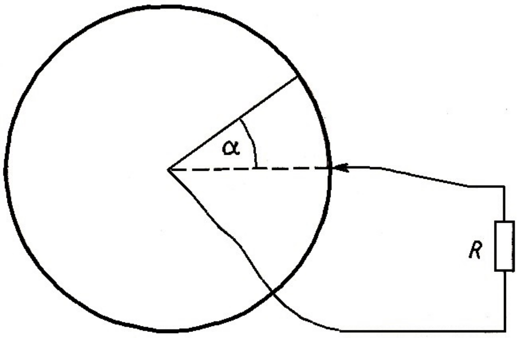
Указание: для упрощения представьте, что блок сделан в виде велосипедного колеса. Подумайте,



почему так можно поступить.

Решение: Закон индукции Фарадея выражается равенством: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, где $\mathcal{E}$ — э. д. с. индукции, а $d\Phi/dt$ — скорость изменения магнитного потока, проходящего через площадь, охватываемую контуром, причем контур должен быть жестко связан с проводником. Если контур перемещается относительно проводника, то данное равенство не выполняется.

Для определения э. д. е., индуцированной во вращающемся блоке, следует выбрать для рассмотрения такой контур, который в рассматриваемом интервале времени будет постоянно проходить через одни и те же точки блока. Рассмотрим контур, показанный на рисунке, и определим скорость изменения магнитного потока, проходящего через него.



Ясно, что эта скорость связана с увеличением поверхности сектора круга на величину, измеряемую центральным углом, равным $\alpha = \omega t$. Обозначив площадь этого сектора через S, можем записать $\Phi = BS = \dfrac{1}{2}Br^2\omega t$, а значит,

$$\mid \mathcal{E} \mid = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}Br^2\omega.$$

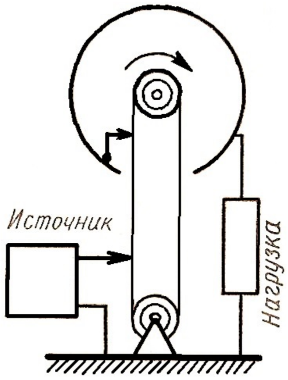
Для определения установившейся угловой скорости блока используем баланс энергии. Энергия, выделяемая на резисторе R в единицу времени, равна: $\mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R$.

Выделение энергии на резисторе происходит за счет уменьшения потенциальной энергии груза. В единицу времени груз опускается на ωr. Следовательно, $\dfrac{(Br^2\omega/2)^2}{R} = mg\omega r$, откуда $\omega = \dfrac{4mgR}{B^2r^3}$.

Если бы резистор R вместе с проводами был жестко связан с блоком, то ток по нему не пошел бы и грузик опускался бы равноускоренно.

Ответ: $v = \omega r = \dfrac{4mgR}{B^2r^2}$.

<u>Задача №9</u> (Электростатический генератор) В высоковольтном электростатическом генераторе (см. рис.) заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод, радиус которого R = 1,5 м. Оценить максимальные значения напряжения и силы тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты v=20 м/с, а ее ширина d = 1м. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля E = 30 кВ/см.



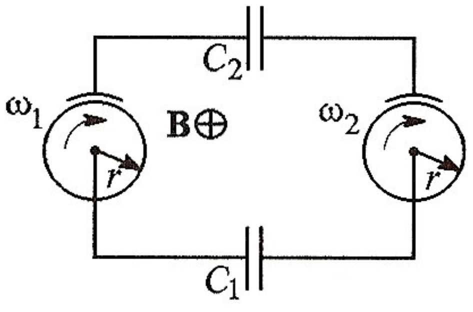
Решение: Так как модуль напряжённости E электрического поля у поверхности сферы радиуса R, на которой находится заряд Q, определяется формулой $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, а потенциал φ — формулой $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, то $\varphi = ER$. Если E не должно превышать 30 кВ/см, то φ не может превышать $\varphi_{max} = E_{max}R = 4,5 \cdot 10^6$ В.

Не должна превышать значения 30 кВ/см и напряжённость поля у поверхности ленты. Так как для ленты $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (где σ — поверхностная плотность заряда), то $\sigma_{max} = 2\varepsilon_0 E_{max}$.

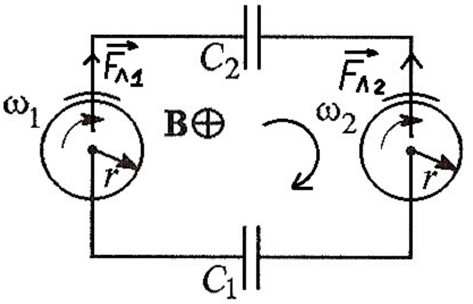
Сила тока, равная заряду, переносимому лентой в единицу времени, определится так: $I_{max} = \dfrac{\sigma_{max} d(v\triangle t)}{\triangle} = 2\varepsilon_0 E_{max} dv \approx 10^{-3}$ А.

Ответ: $I_{max} = 2\varepsilon_0 E_{max} dv \approx 10^{-3}$ А.

Задача №10 (Дисковый генератор Фарадея) Два одинаковых проводящих диска радиусами r вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$) в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной их плоскостям (см. рис.). Центры дисков с помощью проводников присоединены к конденсатору емкостью C_1, а ободы — через скользящие контакты к конденсатору ем костью C_2. Найти напряжения, которые установятся в конденсаторах.



Решение: В дисках во время вращения на свободные электроны начинает действовать сила Лоренца, которая для каждого из дисков своя в силу разных угловых скоростей. $F_{л_i}(r) = eBv_i = eB\omega_i r$, где r — расстояние от центра диска до электрона.



Так как диск соединён с схемой контактами, то внутри диска возникнет электрическое поле, которое уравновесит силу Лоренца и возникнет конечная разность потенциалов.

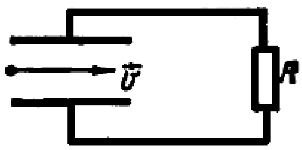
Пусть электрон e переместился от центра диска до его границы, тогда работа силы Лоренца равна:

$A_1 = \mathcal{E}_1 e = \int_0^r F(r)dr \Rightarrow \mathcal{E}_1 e = \dfrac{eB\omega_1 r^2}{2}$, аналогично $\mathcal{E}_2 e = \dfrac{eB\omega_2 r^2}{2}$.

Выберем обход контура, по правилу левой руки определяем направление действия силы Лоренца и записываем по правилу Кирхгофа падение напряжений в цепи: $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = U_{C_2} - U_{C_1} \Rightarrow \dfrac{Br^2}{2}(\omega_1 - \omega_2) = Q/C_2 + Q/C_1 \Rightarrow Q = \dfrac{Br^2}{2}\dfrac{(\omega_1-\omega_2)C_1C_2}{C_1+C_2} \Rightarrow U_{C_1} = \dfrac{Br^2C_2(\omega_1-\omega_2)}{2(C_1+C_2)}$ и $U_{C_2} = \dfrac{Br^2C_1(\omega_1-\omega_2)}{2(C_1+C_2)}$.

Ответ: $U_{C_1} = \dfrac{Br^2C_2(\omega_1-\omega_2)}{2(C_1+C_2)}$ и $U_{C_2} = \dfrac{Br^2C_1(\omega_1-\omega_2)}{2(C_1+C_2)}$.

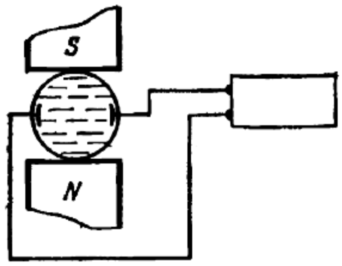
Задача №11 (Магнитный гидродинамический генератор) В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора (МГД — генератора) плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в однородном магнитном поле, вектор индукцию B которого перпендикулярен вектору скорости v. Какая тепловая мощность P выделяется во внешней цепи сопротивлением R (см. рис.)?



Решение: Тепловая мощность $P = I^2R$, где I — ток в цепи. При движении проводника (в данном случае жидкости) в магнитном поле на его концах (в данном случае на пластинах конденсатора, они играют роль клемм генератора) возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = vdB$. Тогда по закону Ома $I = \dfrac{vdB}{R+r}$, где $r = \rho\dfrac{d}{S}$ — сопротивление жидкости (внутреннее сопротивление генератора). Тогда $P = \left(\dfrac{vdB}{R+r}\right)^2 R$.

Ответ: $P = \left(\dfrac{vdB}{R+r}\right)^2 R$.

Задача №12 (Электромагнитный расходомер жидкости) Схема, поясняющая принцип действия электромагнитного расходомера жидкости, изображена на рисунке. Трубопровод с протекающей в нем проводящей жидкостью помещен в однородное магнитное поле. Определить объем жидкости V, протекшей через поперечное сечение трубопровода за время t= 60 мин, если индукция магнитного поля $B = 1,0 \cdot 10^{-2}$ Тл, расстояние между электродами (внутренний диаметр трубопровода) d=50 мм, а возникшая при этом ЭДС $\mathcal{E}_{инд}$=0,25 мВ.



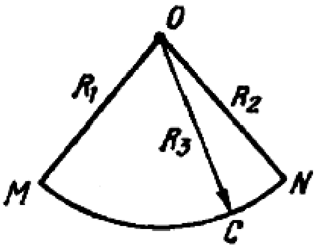
Решение: Так как жидкость проводящая, то на свободные электроны и ионы будет действовать сила Лоренца: $F_л = qvB$, где q — рассматриваемый заряд, а v — скорость течения жидкости. Соответственно возникнет ЭДС, найдём её следующим образом, пусть необходимо переместить заряд q от одной стенки к другой, для этого сила Лоренца совершит работу: $A = F_л d$, где d — расстояние между электродами, с другой стороны $A = \mathcal{E}_{инд} q$, то есть $qvBd = q\mathcal{E}_{инд}$, откуда $v = \dfrac{\mathcal{E}_{инд}}{Bd}$.

Объём жидкости прошедший через данное устройство за время t равно: $V = vtS$, где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения трубопровода. Тогда $V = \dfrac{\pi d \mathcal{E}_{инд} t}{4B}$=3,5 м^3.

Ответ: $V = \dfrac{\pi d \mathcal{E}_{инд} t}{4B}$=3,5 м^3.

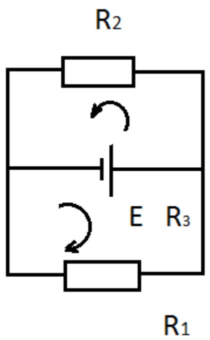
Задача №13

Контур MON имеет вид сектора (см. рис.). Радиус дуги MN: r=10 см, сопротивления проводников OM и ON R_1=1 Ом и R_2=2 Ом. В точке O шарнирно закреплена перемычка OC, конец которой может скользить по проволочной дуге MN, сохраняя с ней контакт. Сопротивление перемычки R_3=3 Ом. Индукция однородного магнитного поля, в котором находится контур, B=0,2Тл.



Вектор B перпендикулярен плоскости контура. Найти силу тока I в перемычке при ее скольжении по дуге MN с постоянной угловой скоростью: ω=11 рад/с. Сопротивлением дуги пренебречь.

Решение: При вращении перемычки в ней возникает ЭДС индукции: $\mathcal{E} = \dfrac{B\triangle S}{\triangle t}$, где $\triangle S = \dfrac{\omega r^2 \triangle t}{2}$ — площадь, «ометаемая» перемычкой за время $\triangle t$.

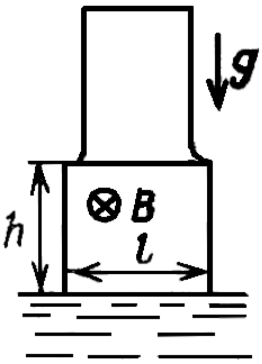


Заметим, что данная схема эквивалентна схеме, приведённой на рисунке. Отсюда теперь легко найти величину тока в перемычке ⇒

$$I = \mathcal{E}/R_{эквив} = \frac{\omega r^2 B}{2(R_2 + R_1R_2/(R_1+R_2))}\text{=3 мА.}$$

Ответ: $I = \dfrac{\omega r^2 B}{2(R_2 + R_1R_2/(R_1+R_2))}$=3 мА.

Задача №14 (МГД — насос) МГД — насос представляет собой канал прямоугольного сечения высоты h=0,1 м, две противоположные стенки которого проводящие (см. рис.). Расстояние между ними l=0,05 м. К проводящим стенкам подводится разность потенциалов U=1В. Перпендикулярно двум непроводящим стенкам приложено однородное магнитное поле индукции B=0,1 Тл. Нижняя часть канала касается поверхности ртути, верхняя соединена с непроводящей вертикальной трубой. На какую высоту поднимется ртуть? Удельное сопротивление ртути $\gamma = 10^{-8}$ Ом·м, плотность $\rho = 14 \cdot 1O^3$ кг/м^3. Считать, что ускорение свободного $g = 10$ м/с^2.



Решение: Основные принципы, на которых основано действие этого устройства — это разгон электронов под действием электрического поля и движение проводника с током в магнитном поле. Так как к проводящим стенкам приложено напряжение, то соответственно между ними существует электрическое поле, далее, эти стенки касаются поверхности ртути. Так как вся система прибывает с температурой равной комнатной, то ртуть находится в жидком состоянии. Под действием электрического поля свободные электроны и ионы будут ускоряться и перемещаться между стенками, то есть возникнет как бы проводник с током, в данном случае проводником служит верхний слой ртути. Далее в силу наличия магнитного поля на эти электроны и ионы начнёт действовать сила Лоренца, из-за чего верхний слой ртути будет подниматься, за ним последуют и другие слои. Таким образом, за счет взаимодействия электрического и магнитного полей возникает движение электропроводящей жидкости — движение проводника с током в магнитном поле.

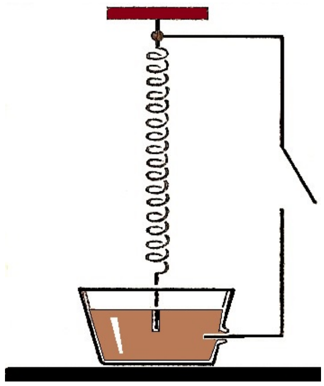
Пусть высота подъёма ртути равна x, а ширина проводящей пластины H. Тогда давление $\rho g x = F/S = F/lH = IBl/lH$, так как $F = IBl$. Ток $I = \dfrac{U}{\gamma l/Hx} = \dfrac{UHx}{\gamma l}$.

Если $x > h$, то $I = UHh/\gamma l$. Таким образом, $x = \dfrac{hUB}{\rho g l \gamma}$ при $\dfrac{UB}{\rho g l \gamma} \gg 1$, $x = 0$ при $\dfrac{UB}{\rho g l \gamma} < 1$.

При выбранных значениях параметров $x = 1,5$ м.

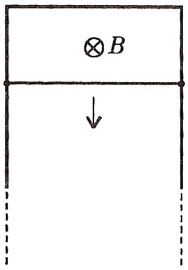
Ответ: $x = 1,5$ м.

Задача №15 Известно, что если по двум параллельным проводникам течет ток в одном направлении, то проводники притягиваются друг к другу. Исходя из этого, опишите состояние пружины и электрической цепи (см. рис.) после замыкания ключа. Нижний конец пружины лишь на незначительную глубину погружен в ртуть.



Решение: Проводники сближаются под действием магнитного поля, возникающего вокруг них при прохождении по ним тока. Витки пружины представляют собой параллельно расположенные проводники, по которым течет ток в одном направлении. При замыкании цепи витки пружины будут притягиваться друг к другу. Это вызовет размыкание цепи. Магнитное поле исчезнет, и пружина под действием силы тяжести распрямится, а нижний конец пружины опустится в ртуть и замкнет цепь. Этот процесс вновь повторится, и пружина, размыкая и замыкая цепь, будет совершать колебательное движение.

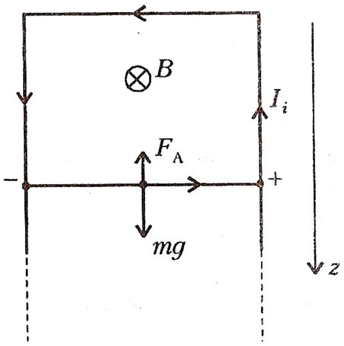
Задача №16



В однородном магнитном поле с индукцией $B=$ 2 Тл расположены вертикально на расстоянии $l=$ 20 см два металлических прута, замкнутых наверху (см. рис.). Поле перпендикулярно плоскости системы. По прутьям без трения и без нарушения контакта может скользить перемычка массой $m = 5$ г и сопротивлением $R = 4$ Ом. Сопротивление остальной части системы пренебрежимо мало.

Перемычку сначала удерживают в покое, а затем отпускают. Какова будет установившаяся скорость движения перемычки $v_{уст}$? Принять $g = 10$ м/с^2.

Решение: Будем пренебрегать сопротивлением прутьев и скользящих контактов, а также самоиндукцией контура. Под действием силы тяжести перемычка начнет скользить вниз с нарастающей скоростью. Магнитный поток, пронизывающий контур, образованный перемычкой и П — образными рельсами, очевидно, будет при этом увеличиваться.



По правилу Ленца, возникающий в контуре индукционный ток направлен так, чтобы его собственное магнитное поле препятствовало нарастанию внешнего магнитного потока, т.е. в рассматриваемом случае оно направлено навстречу полю B. Направление индукционного тока находим по правилу правого винта («буравчика») — против часовой стрелки (см. рис.). На перемычку, по которой протекает ток, действует сила Ампера. По правилу левой руки находим, что эта сила направлена вертикально вверх и тормозит падение перемычки.

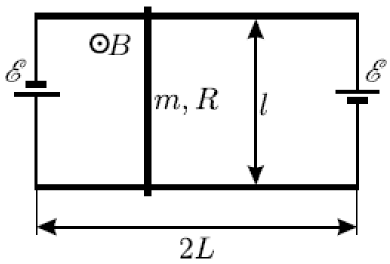
Качественно ясно, что ускорение перемычки при этом постепенно уменьшается, а ее скорость через некоторое время перестает расти. Запишем уравнение движения перемычки в проекции на ось z: $mg - F_A = ma(t)$.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (сила Ампера) равна: $F_A = I_i Bl = \dfrac{\mathcal{E}_i}{R} Bl$, где учтено, что угол между вектором магнитной индукции $\overrightarrow{B}$ и проводником равен 90°°, а синус этого угла равен 1. ЭДС индукции по закону Фарадея определяется скоростью изменения магнитного потока через поверхность контура: $\mid \mathcal{E}_i \mid = \mid \dfrac{d\Phi}{dt} \mid = Bl\dfrac{ds}{dt} = Bvl$. Подставляя соответствующие выражения в уравнение движения перемычки, получаем: $mg - \dfrac{Bvl}{R} Bl = ma(t)$.

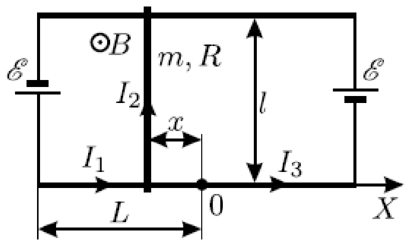
Очевидно, перемычка будет падать с постоянной скоростью $v_{уст}$, когда ее ускорение обратится в ноль. Установившаяся скорость движения перемычки при этом будет равна: $v_{уст} = \dfrac{mgR}{B^2 l^2}$=1,25 м/с.

Ответ: $v_{уст} = \dfrac{mgR}{B^2 l^2}$=1,25 м/с.

Задача №17 (Гармонические колебания перемычки с током) Параллельные рельсы длиной $2L$ закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ (см. рисунок). На рельсах лежит перемычка массой m, которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B. Считая, что сопротивление перемычки равно R, а сопротивление единицы длины каждого из рельсов равно ρ, найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.



Решение: Выясним сначала, где находится положение равновесия перемычки. Поскольку батареи имеют одинаковые ЭДС, то при схеме их включения, показанной на рисунке, разность потенциалов между серединами рельсов равна нулю. Следовательно, если перемычка покоится посередине, то через неё не протекает ток, а значит, на неё не действует сила Ампера. Значит, это положение и является положением равновесия перемычки. Отметим далее, что при движении перемычки через неё протекает ток, обусловленный как изменением омического сопротивления частей цепи, так и явлением электромагнитной индукции. В соответствии с правилом Ленца, часть силы Ампера, связанная с индукционным током, приводит к затуханию колебаний (можно показать, что эта часть силы пропорциональна скорости перемычки и, следовательно, является аналогом вязкого трения). Поэтому, в соответствии с условием задачи, ЭДС индукции при решении задачи можно пренебречь.



Поместим начало координатной оси X в середину нижнего рельса и направим ось вдоль него. Рассмотрим малое смещение перемычки вдоль оси X — например, влево. После того, как перемычка сдвинется вдоль рельсов на расстояние $x < 0$, в ней начнёт протекать ток.

Обозначим ток, текущий от левой батареи к началу координат, через I_1, ток, ответвляющийся из начала координат в перемычку, через I_2, ток, текущий от начала координат к правой батарее, через I_3. Запишем первое правило Кирхгофа: $I_1 = I_2 + I_3$.

Для контура, содержащего левую батарею и перемычку, а также для контура, содержащего правую батарею и перемычку, применим второе правило Кирхгофа: $\begin{cases} 2I_1\rho(L+x) + I_2R = \mathcal{E} \\ 2I_3\rho(L-x) - I_2R = \mathcal{E} \end{cases}$

Решая полученную систему, найдём силу тока, текущего через перемычку: $I_2 = -\dfrac{\mathcal{E}x}{\rho(L^2 - x^2) + RL} \approx -\dfrac{\mathcal{E}x}{\rho L^2 + RL}$, поскольку колебания малые, и $x^2 \ll L^2$.

Так как перемычка находится в магнитном поле, то на неё действует сила Ампера: $F_A = I^2 lB = -\dfrac{\mathcal{E}lBx}{L(\rho L + R)}$. Она направлена вправо, то есть стремится вернуть перемычку в положение равновесия. Поэтому уравнение движения перемычки имеет вид: $ma_x = -\dfrac{\mathcal{E}lB}{L(\rho L + R)x}$. Отсюда для частоты ω_0 и периода T_0 собственных колебаний перемычки получаем: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{E}lB}{mL(\rho L + R)}}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E}lB}}$.

Ответ: $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E}lB}}$.

<u>**Задача №18**</u> Замкнутый проволочный контур, имеющий форму квадрата со стороной a и сопротивление R и двигающийся из бесконечности с постоянной скоростью v, пересекает зазор между полюсами магнита. Контур движется перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Считая, что поле магнита B между полюсами однородно и равно нулю вне этой области, построить график зависимости тока в контуре от времени. Площадь, охватываемая контуром, много меньше площади поперечного сечения зазора магнита.

Решение:

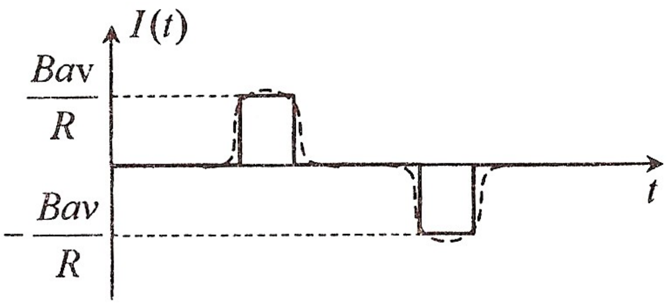


График зависимости тока в контуре от времени $I(t)$ показан на рисунке (сплошная линия). Поясним этот график. Пока контур не попал в зазор между полюсами, магнитный поток через него не изменяется (он равен нулю), поэтому тока в коп туре нет. Когда контур пересекает границу поля, возникает магнитный поток через него. К моменту времени t от начала пересечения контуром границы поля пока контур не находится целиком и поле магнитный поток через него определяется следующим соотношением: $\Phi(t) = BS(t) = Bavt$, (1) где a — сторона контура.

Из (1) по закону электромагнитной индукции находим ток в контуре в процессе его влета в поле $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{Bav}{R}$ (на графике ток в контуре в процессе его влета в поле считался положительным).

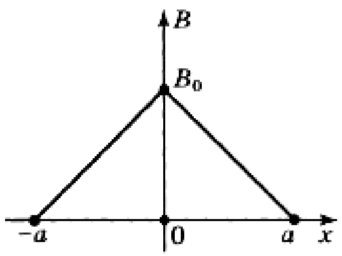
Когда контур находится целиком в поле, магнитный поток через него не изменяется, поэтому ток в контуре равен нулю.

Когда контур вылетает из поля, магнитный поток через него линейно убывает со временем. Поэтому в контуре снова возникает ток, направленный противоположно току, текущему в контуре в процессе влета.

В реальной ситуации поле магнита «почти» однородно в зазоре между полюсами и быстро убывает вне этой области. Реальный график зависимости тока в контуре от времени показан на рисунке пунктиром.

Ответ: смотри рисунок.

Задача №19 Проволочное колечко пролетает между полюсами магнита, не успев повернуться. Диаметр колечка $D = 6$ мм, диаметр проволоки d ($d \ll D$), ее удельное сопротивление $\rho_c = 2\cdot10^{-8}$ Ом·м и плотность $\rho_n = 9\cdot10^3$ кг/м^3. Оцените изменение скорости колечка за время пролета сквозь магнитное поле, если его скорость при влете в поле равна v_0=20 м/с. Вектор индукции B магнитного поля перпендикулярен плоскости. Зависимость индукции магнитного поля от координаты x (вдоль траектории движения колечка) показана на рисунке, при этом $a = 10$ см, $B_o = 1$ Тл. Можно считать, что $a \gg D$.



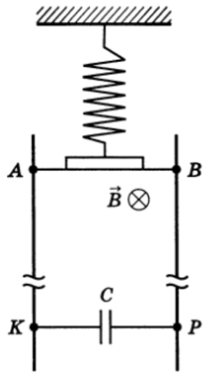
Решение: Предположим, что скорость движения колечка изменилась мало, т.е. $\triangle v \ll v_0$. Тогда время, в течение которого колечко находится в магнитном поле равно $t = 2a/v_0$.

ЭДС индукции в колечке $\mathcal{E} = \dfrac{B_0}{t/2}\dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{B_0 v_0}{a}\dfrac{\pi D^2}{4}$, сила тока $I = \mathcal{E}/R$. Выделившееся количество теплоты $Q = I^2Rt = \dfrac{\mathcal{E}^2 t}{R}$; изменение кинетической энергии $\triangle W = mv_0\triangle v$. По закону сохранения энергии $Q = -\triangle W$, поэтому имеем $\dfrac{\mathcal{E}^2 t}{R} = -mv_0\triangle v$.

Подставив в последнее равенство полученные выражения для $\mathcal{E}, t, R, m$, находим $\triangle v = -\dfrac{D^2B_0^2}{8a\rho_c\rho_n} = -0{,}25$ м/с. Видим, что предположение о малости изменения скорости оправдалось: скорость уменьшилась на 0,25 м/с, т.е. $\triangle v \ll v_0 = 20$ м/с.

Ответ: $\triangle v = -\dfrac{D^2B_0^2}{8a\rho_c\rho_n} = -0{,}25$ м/с.

Задача №20 На пружинке жесткости k висит груз (см. рис.). К грузу прикреплена горизонтально расположенная медная рейка AB длины l. Рейка может скользить без трения по неподвижным вертикальным проводящим рельсам AK и BP, имея с ними хороший электрический контакт. К рельсам с помощью проводов подсоединен конденсатор емкости C. Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции B которого перпендикулярен рейке и рельсам. Найдите период вертикальных колебаний груза. Масса груза с рейкой равна m. Сопротивление рейки, рельсов и проводов можно не учитывать.

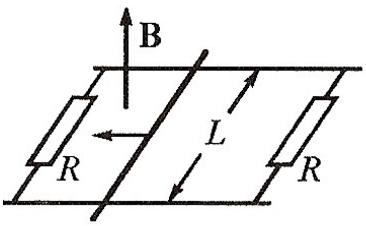


Решение: Направим ось x вниз, поместив начало координат в точку, соответствующую равновесному положению груза. Пусть в некоторый момент груз имеет координату x. Уравнение движения: $m\ddot{x} = -BIl - k(x + x_0) + mg$. Здесь I — сила тока в цепи, x_0 — удлинение пружины в положении равновесия, причем $kx_0 = mg$. В любой момент времени напряжение на конденсаторе равно ЭДС индукции в рейке: $q/C = B\dot{x}l$, где q — заряд конденсатора. Находим $I = \dot{q} = BlC\ddot{x}$. Исключив из записанных уравнений x_0 и I, получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний для величины x: $\ddot{x} + \dfrac{k}{m + B^2l^2C}x = 0$.

Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\left(m + B^2l^2C\right)/k}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\left(m + B^2l^2C\right)/k}$.

Задача №21* По двум горизонтальным проводящим рейкам расстояние между которыми $L = 0,5$ м может скользить без трения перемычка, масса которой $m = 100$ г, а омическое сопротивление $r = =$ 0,5 Ом. Слева и справа концы реек соединены через резисторы с сопротивлением $R = 2$ Ом. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $B =$ 0,2 Тл. Неподвижной перемычке сообщают некоторую начальную скорость, и она, сместившись на расстояние S $= 3$ м, останавливается.

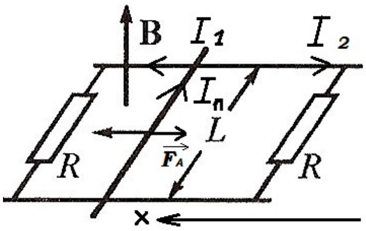


1) Найдите зависимость тока через перемычку от ее скорости.

2) Определите начальную скорость перемычки.

Сопротивлением реек пренебречь. Перемычка расположена перпендикулярно рейкам.

Решение: По правилу правой руки определяем направление токов и ток через перемычку. Далее рассмотрим эту электрическую цепь как два отдельных контура, которые пронизывает магнитный поток: $\Phi(t) = BS(t)$, где $S(t) = Lx(t)$ и $x(t)$ — координата перемычки. Соответственно в этих контурах действует ЭДС: $\mathcal{E} = -\Phi'(t) = -BL\dfrac{dx}{dt} = -Blv$. Пусть I_n — ток через перемычку, а токи через контуры 1 и 2 равны, соответственно, I_1 И I_2.



Согласно правилам Кирхгофа получим: $\begin{cases} \mathcal{E} = I_n r + I_1 R \\ \mathcal{E} = I_n r + I_2 R \\ I_1 + I_2 = I_n \end{cases}$

Откуда получим: $2\mathcal{E} = 2I_n r + RI_n \Rightarrow I_n = \dfrac{2\mathcal{E}}{2r+R} = \dfrac{2BLv}{2r+R}$.

Поскольку сила Ампера действует на перемычку в противоположном направлению скорости движения, то $F_A = -m\dfrac{dv}{dt}$, сама же сила Ампера по величине равна: $F_A = I_n BL = \dfrac{2B^2L^2v}{2r+R} \Rightarrow \dfrac{2B^2L^2v}{2r+R} = -m\dfrac{dv}{dt}$ — мы получили дифференциальное уравнение движения перемычки.

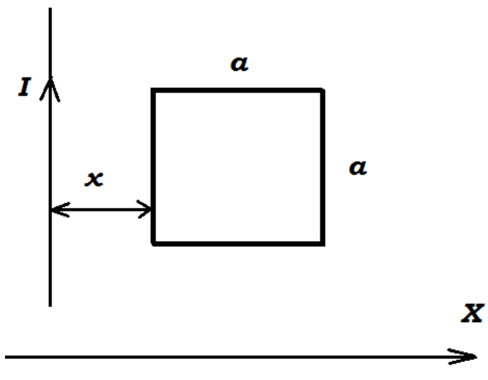
Сделаем разделение переменных и проинтегрируем его: $\dfrac{2B^2L^2}{2r+R}dt = -m\dfrac{dv}{v} \Rightarrow$ (интегрируем) $\Rightarrow -\dfrac{2B^2L^2}{2r+R}\displaystyle\int dt = \int \dfrac{dv}{v} \Rightarrow v = v_0 e^{-\dfrac{2B^2L^2t}{m(2r+R)}}$ — зависимость скорости от времени.

Согласно определению пройденный ею путь равен:

$$S = \int_0^{\infty} v(t)dt \Rightarrow S = -v_0\frac{m(2r+R)}{2B^2L^2}e^{-\dfrac{2B^2L^2t}{m(2r+R)}}\Big|_0^{\infty} = \frac{v_0(2r+R)m}{2B^2L^2} \Rightarrow v_0 = \frac{2B^2L^2S}{(2r+R)m}=0{,}2 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_0 = \dfrac{2B^2L^2S}{(2r+R)m}$=0,2 м/с и $I_n = \dfrac{2BLv}{2r+R}$.

Задача №22* Квадратная рамка со стороной a движется с некоторой постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном бесконечному длинному проводнику, лежащему в плоскости рамки параллельно одной из её сторон. По проводнику проходит ток силой I. В некоторый момент времени расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки x. Какова должна быть скорость v, чтобы в этот момент в рамке индуцировалась ЭДС, равная $\mathcal{E}$.



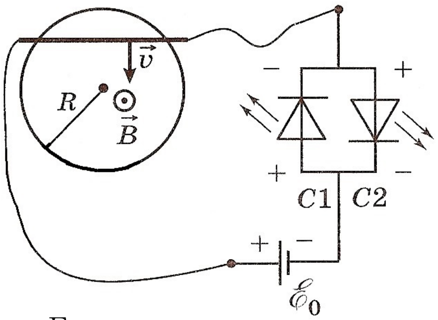
Решение: Из магнитостатики известно, что величина магнитного поля проводника с током на расстоянии x от проводника равна: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума (все уравнения в системе СИ). Найдём магнитный поток, пронизывающий рамку: $d\varPhi = B(x)dS$, проинтегрируем это выражение, чтобы найти поток, пронизывающий рамку $\Rightarrow$ $\varPhi(x) = \displaystyle\int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I a}{2\pi x}dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln x\Big|_x^{x+a} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$.

Теперь, так как происходит изменение магнитного потока, то возникает ЭДС в рамке, которая равна: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\varPhi}{dt}$, сделаем здесь следующее преобразование: домножим и поделим на $dx \Rightarrow \mathcal{E} = -\dfrac{d\varPhi}{dt} = -\dfrac{d\varPhi}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = -v\cdot\dfrac{d\varPhi}{dx}$, откуда получаем: $\mathcal{E} = -v\cdot\dfrac{\mu_0 I a}{2\pi}\cdot\dfrac{x}{x+a}\cdot\dfrac{(x+a)' - x'(x+a)}{x^2} = \dfrac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(x+a)x}$.

Так как в некоторый момент времени становятся известными значения x и $\mathcal{E}$, то легко находим $v = \dfrac{\mathcal{E}2\pi(x+a)x}{\mu_0 I a^2}$.

Ответ: $v = \dfrac{\mathcal{E}2\pi(x+a)x}{\mu_0 I a^2}$.

Задача №23 (Светодиоды) Между круглыми полюсами радиусом $R = 5$ см большого электромагнита, создающего в зазоре однородное магнитное поле индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярно линиям магнитной индукции движется с постоянной скоростью $v = 10$ м/с металлический стержень (см. рис.).



Концы стержня, длина которого больше $2R$, соединены гибкими проводами со схемой, включающей батарею с ЭДС $\mathcal{E} = 0{,}5$ В и два светодиода C_1 и C_2, которые светятся при напряжении $U \geq 0{,}25$ В и определенной полярности, указанной на рисунке.

Будем считать, что в начальный момент времени стержень касается окружности (т. е. начинает пересекать при своем движении линии магнитной индукции). Определите напряжение $U(t)$ на светодиодах и моменты времени их зажигания и гашения на интервале времени движения стержня в магнитном поле ($0 \leq t \leq 2R/v$). Постройте качественный график зависимости $U(t)$ и укажите на нем интервалы свечения светодиодов C_1 и C_2.

Решение:

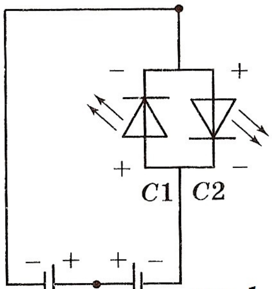


рис. 1

При движении стержня в магнитном поле в нем возникает ЭДС индукции: $\mid \mathcal{E}_{инд} \mid = \triangle\varPhi/\triangle t$, модуль которой зависит от времени. Знак $\mathcal{E}_{инд}$ может быть определен либо из выражения для силы Лоренца, либо из закона электромагнитной индукции Фарадея. В итоге приходим к эквивалентной схеме замкнутой электрической цепи (рис. 1). Обратим внимание на то, что «источник» $\mathcal{E}_{инд}$ и $\mathcal{E}_0$ включены в цепь навстречу друг другу.

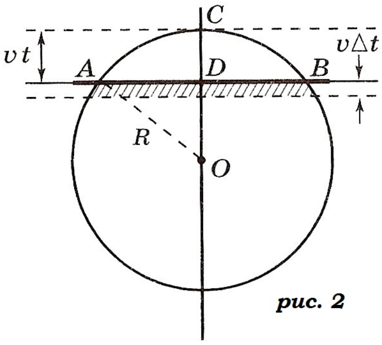


рис. 2

Найдем теперь зависимость $\mathcal{E}_{инд}$ от времени. По условию в начальный момент времени стержень касался границы области магнитного поля. К моменту времени t он пройдет расстояние $\mid CD \mid = vt$ (рис. 2).

Найдем длину хорды $\mid AB \mid \Rightarrow \mid AB \mid = 2 \mid AD \mid = 2\sqrt{R^2 - (R - vt)^2} = 2\sqrt{vt(2R - vt)}$.

Изменение магнитного потока за малое время $\triangle t$ равно $\triangle \varPhi = B \mid AB \mid v\triangle t$. Отсюда находим: $\mid \mathcal{E}_{инд} \mid = 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}$. Максимальное значение $\mathcal{E}_{инд}$ достигается при $t = R/v$: $\mid \mathcal{E}_{инд} \mid = 2BvR$= 1 В.

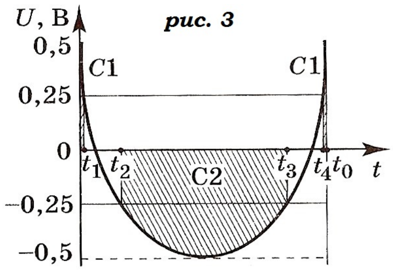


рис. 3

Напряжение на светодиодах равно $U = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{инд}$. Качественная зависимость $U(t)$ может быть представлена графически на рис. 3. Из приведенного графика следует, что светодиод C_1 будет светиться при $U \geq 0,25$ В, т.е. на интервалах времени $[0; t_1]$ и $[t_4; t_0]$, где $t_0 = 2R/v$. Светодиод C_2 будет светиться при $U < -0,25$ В, т. е. на интервале времени $[t_2; t_3]$.

Моменты времени t_3 и t_4 определяются из симметрии графика: $t_3 = t_0 - t_2, t_4 = t_0 - t_1$. Найдем моменты времени t_1 и t_2.

Для моментов времени t_1 и t_4 имеем: $\mathcal{E}_0 - 2Bv\sqrt{vt_{1,4}(2R - vt_{1,4})} = 0{,}25$ В $= \frac{1}{4} \mid \mathcal{E}_{инд} \mid_{max} = \frac{1}{2}BvR$.

С учетом равенства $\mathcal{E}_0 = 0,5 \mid \mathcal{E}_{инд} \mid_{max} = BvR$ приходим к квадратному уравнению: $t_{1,4}^2 - \frac{2R}{v}t_{1,4} + \frac{1}{16}\frac{R^2}{v^2} = 0$, откуда $t_{1,4} = \frac{R}{v}\left(1 \pm \sqrt{\frac{15}{16}}\right) = 5 \cdot 10^{-3}(1 \pm 0,97)$. Таким образом, $t_1 = 150$ мкс, t_4= 9,85 мс.

Аналогично для моментов времени t_2 и t_3: $t_{2,3}^2 + \frac{2R}{v}t_{2,3} + \frac{9}{16}\frac{R^2}{v} = 0$, откуда $t_{2,3} = \frac{R}{v}\left(1 \pm \sqrt{\frac{7}{16}}\right) = 5 \cdot 10^{-3}(1 \pm 0,66)$, t_2=1,7 мс, $t_3 = 8{,}3$ мс.

Ответ: смотри решение.

Задача №24 (Электромагнитный двигатель — генератор)

В однородное магнитное поле, магнитная индукция которого равна B, а линии индукции направлены горизонтально, помещена проволочная рамка. Она спаяна из двух одинаковых половинок окружностей радиусом R, плоскости которых расположены под прямым углом друг к другу. Рамка вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с общим диаметром полуокружностей. Определите максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке, если угловая скорость ее вращения равна ω.

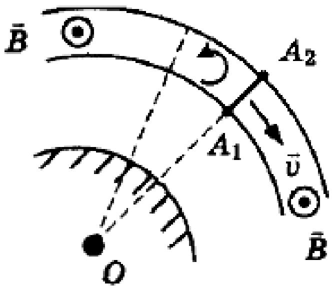
Решение: Пусть для одной половинки рамки в момент времени $t = 0$ значение магнитного потока через неё равно $\varPhi_{10} = BS = B\frac{\pi^2}{2}$. Тогда $\varPhi_1(t) = B\frac{\pi R^2}{2}\cos\omega t$. В этой половине рамки возникает ЭДС индукции: $\mathcal{E}_{инд_1} = -\frac{d\varPhi_1}{dt} = B\frac{\pi R^2}{2}\omega\sin\omega t$.

Для другой половины рамки $\Phi_{02} = 0$. Тогда $\Phi_2(t) = B\dfrac{\pi R^2}{2}\sin\omega t$, а ЭДС индукции: $\mathcal{E}_{инд_2} = -\dfrac{d\Phi_2}{dt} = -B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega\cos\omega t$. Результирующая ЭДС индукции в рамке $\mathcal{E}_{\sum} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega\sin\omega t - B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega\cos\omega = B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega(\sin\omega t - \cos\omega t)$.

Поскольку $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha - \dfrac{\pi}{4})$, то $\mathcal{E}_{\sum} = \sqrt{2}B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega\sin(\omega t - \pi/4)$, отсюда $\mathcal{E}_{\sum_{max}} = \sqrt{2}B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega$.

Ответ: $\mathcal{E}_{\sum_{max}} = \sqrt{2}B\dfrac{\pi R^2}{2}\omega$.

Задача №25* (Космическая электростанция) Два спутника, соединенные изолированным проводящим тросом длины l движутся по круговым орбитам радиусами $r_1 = r - l/2, r_2 = r + l/2, l \ll r, r = a + h$, где a — радиус Земли, h — расстояние от поверхности Земли до центра масс связки; $r = a + h, h = 400$ км, l= 20 км (см. рис.). Плоскость орбиты лежит в плоскости магнитного экватора. Магнитное поле почти однородно в пределах кольца, по которому движется трос: $B(r) = B_0(a/r)^3$, где $B_0 = 4,2\cdot 10^{-5}$ Тл.



Оцените величину ЭДС индукции $\mathcal{E}_0$, возникающей в тросе.

В одном из спутников в цепь троса включен генератор постоянного напряжения с ЭДС равной $\mathcal{E}$. Запишите уравнения движения, определяющие динамику тросовой системы.

Решение: Приращение магнитного потока, связанное с движением троса на рисунке, равно $\triangle\Phi \approx Blvt$, где $v = v_1\sqrt{a/r}$, $v_1 = \sqrt{ag}$ — первая космическая скорость.

Следовательно, в тросе наводится ЭДС, равная разности потенциалов точек A_1, и A_2: $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0 = vBl = lv_1tB_0(a/r)^{7/2}$.

Полагая l= 20км, $r = a + h, h = 400$км, получим $\mathcal{E}_0 \approx$640 В.

При контакте концов троса с ионосферной плазмой возникает замкнутая цепь электрического тока, текущего по тросу и вдоль силовых линий магнитного поля, сближающихся у полюсов в области E — слоя плазмы с высокой проводимостью. В результате со стороны магнитного поля на трос действует сила Ампера $F_A = (Bl)^2v/R$, тормозящая связку (R — эффективное сопротивление цепи). Уменьшение высоты в результате работы генератора можно компенсировать кратковременным включением реактивного двигателя. Если в цепь включить генератор напряжения, то, наоборот, связка начнет набирать высоту.

Запишем систему уравнений, определяющих динамику тросовой системы. Рассмотрим ограниченную задачу, предполагая, что трос находится на прямой, проходящей через центр Земли.

Положение троса задается вектором $\overrightarrow{l}$ — направленным отрезком A_1A_2 (см. рис.). Пренебрегая неоднородностью поля тяжести в области размерами $\sim l$, запишем силу притяжения в виде: $\overrightarrow{F} = -\dfrac{mga^2}{r^3}\overrightarrow{r}$, где m — масса спутников, $\overrightarrow{r} = (x, y, 0)$ — радиус-вектор центра масс с началом в центре Земли.

Сила сопротивления, действующая на связку в верхних слоях атмосферы, $F_{сопр} = -k\rho(r)Sv\overrightarrow{v}$. Здесь S — общая площадь сечения спутников в плоскости перпендикулярной скорости, $\rho(r)$ — плотность воздуха, k — коэффициент порядка единицы. На трос действует также сила Ампера: $\overrightarrow{F_A} = I\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B(r)}$, где I — сила тока, протекающего через трос. Здесь $\times$ — означает векторное произведение. Из второго закона Ньютона получим уравнение движения центра масс связки: $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -mga^2\frac{\overrightarrow{r}}{r} - S\rho(\overrightarrow{r})v\overrightarrow{v} + I\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{B(\overrightarrow{r})}$ (1)

Полная система, содержащая три неизвестных функции x, y и I, должна быть дополнена уравнением, следующим из закона Ома: $IR = \mathcal{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B(r)}\,\overrightarrow{l}$, (2) где R — полное сопротивление электрической цепи.

Запишем теперь закон сохранения энергии. С этой целью образуем скалярное произведение (1) с $\overrightarrow{v}$, затем умножим (2) на I и сложим полученные выражения. В результате находим: $\frac{dE}{dt} = -S\rho(r)v^3 + I\mathcal{E} - I^2R$, (3) где $E(t) = \frac{mv^2}{2} - mga^2/r$ — полная энергия.

Предположим, что при отсутствии сопротивления атмосферы и тока через трос центр масс движется по окружности радиусом r с местной первой космической скоростью $v = \sqrt{ga^2/r}$. Рассмотрим далее движение центра системы со скоростью $v(t)$ по некоторой спиралеобразной траектории близкой к окружности радиусом $r(t)$, где $v(t)$ и $r(t)$ удовлетворяют тому же соотношению $v^2 = ga^2/r$. Тогда $E(t) = -mv^2/2$, а из (2) следует уравнение: $IR = \mathcal{E} - vB(r)l$ (4)

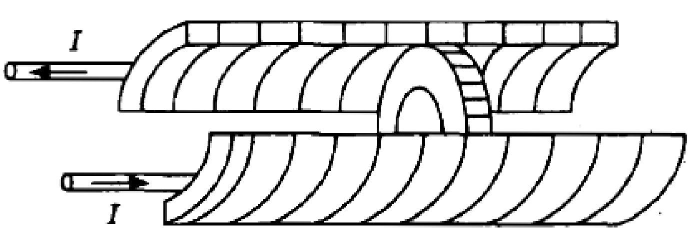
Подставляя $E(t)$ в (3), имеем $mv\frac{dv}{dt} = S\rho(r)v^3 - I\mathcal{E} + I^2R$. (5)

Исключая I из (5), получим уравнение: $m\frac{dv}{dt} = S\rho(r)v^2 + B^2(r)l^2\frac{v}{R} - B(r)l\frac{\mathcal{E}}{R}$, (6) из которого следует, что при $\mathcal{E} = 0$ величина скорости растет, хотя сила сопротивления и сила Ампера направлены в сторону противоположную вектору скорости $\overrightarrow{v}$.

Действие этих сил приводит к уменьшению высоты полёта связки. Полная энергия согласно (3) убывает. Подставляя в (6) $v = v_1\sqrt{a/r}$, $\frac{dv}{dt} = \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}\frac{v_1}{2a}\frac{dr}{dt}$, получим уравнение для определения функции $r(t)$.

Ответ: смотри решение.

Задача №26* (Электромагнитная пушка) Рассмотрим устройство, схема которого изображена на рисунке. Пусть внешнее магнитное поле и внешняя сила отсутствуют. Поскольку по направляющим течёт ток, то перемычка массой m находится в собственном магнитном поле. Индуктивность системы $L = L(x)$. Найдите проекцию силы F_x, действующую на перемычку со стороны собственного магнитного поля системы.



Решение: Из второго закона Ньютона должно следовать уравнение (1) $m\frac{dv}{dt} = F_x$.

Индуктивность $L = L(x)$ и сопротивление $R(x)$ системы являются функциями координаты. Из закона Ома получим уравнение $IR = \mathcal{E}_0 - \frac{d}{dt}(LI)$. (2)

Умножим уравнение (1) на v, уравнение (2) — на I и сложим полученные выражения. В результате имеем $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) + I\frac{d}{dt}(LI) = F_x v + I\mathcal{E}_0 - I^2 R$.

Однако закон сохранения энергии должен иметь вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{L(x)I^2}{2}\right) = I\mathcal{E}_0 - I^2 R$. (4)

Поскольку $I\frac{dLI}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dLI^2}{dt} = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dt}, \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}v$, то сопоставляя (3) и (4) приходим к выводу, что $F_x = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}$, или $F_x = \frac{dU_m}{dx}$, $U_m = \frac{1}{2}L(x)I^2$, где U_m — энергия магнитного поля контура. Следовательно, уравнение (1) приобретает вид: $m\frac{dv}{dt} = \left(\frac{I^2}{2}\right)\frac{dL}{dt}$.

Таким образом, собственное магнитное поле стремится увеличить размеры контура. Рассматриваемая система — так называемый рельсотрон — хорошо известна уже десятки лет. В последнее десятилетия были преприняты попытки разогнать перемычку — кусок металла — до космической скорости и использовать в качестве оружия.

Пусть P — объёмная плотность энергии магнитного поля системы. тогда $dU_m/dx = \rho S$, где S — площадь бокового сечения перемычки. Подставляя в (1) $m = \rho S d$, получим ускорение $a = P/\rho d$.

Положим ρd= 10^2 кг/м^2. Значению $B = 10$ Тл соответствует давление $p = B^2/2\mu_0 = 4 \cdot 10^7$ Па и ускорение $a = 4 \cdot 10^5$ м/с^2. Перемычка достигает скорости $v = 10$ км/с на длине $s = 125$ м. Время разгона $\tau \sim 2,5 \cdot 10^{-2}$ с. Перемычка массой m =2 кг приобретает энергию 100 МДж.

Ответ: $F_x = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}$.

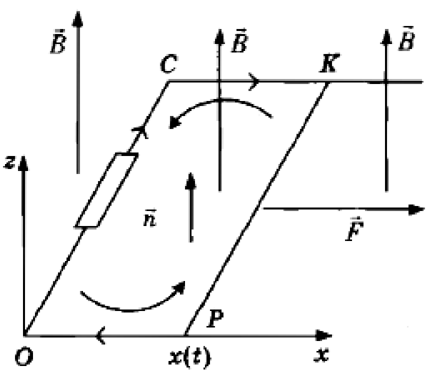
Упражнения.

1) Внутренняя поверхность приводного ремня в результате трения о шкив приобрела положительный заряд. Существует ли магнитное поле вокруг вращающегося ремня?

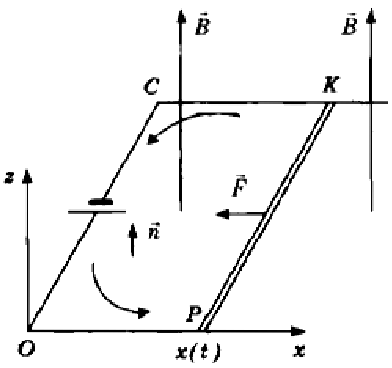
Ответ: Да.

Указание: заряды, расположенные на поверхности ремня, имеют направленное движение. Поэтому ремень в делом можно рассматривать как виток катушки, по которой течет ток.

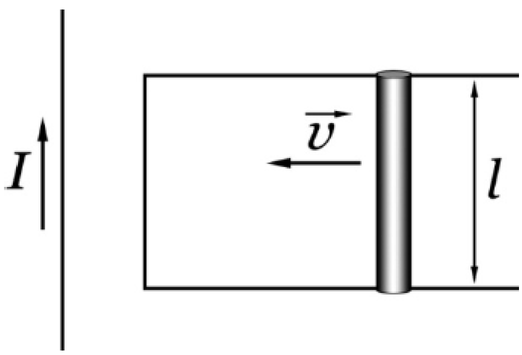
2) **(Генератор постоянного напряжения)** Приложим к проводнику на рисунке горизонтально направленную силу $\overrightarrow{F} = (F, 0, 0)$. Найдите максимальное значение скорости проводника u, силы тока I_m, мощности, развиваемой силой $P_{мех}$ и мощности $P_{эл}$, потребляемой резистором.



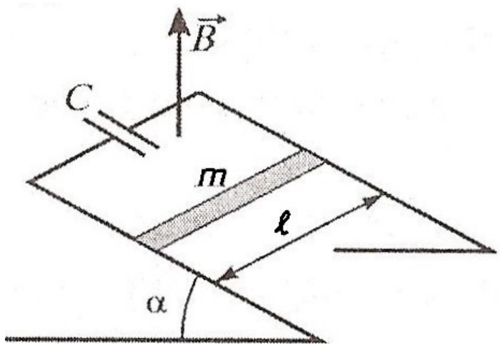
3) **(Линейный электромотор)** Пусть к проводнику на рисунке приложена сила $\overrightarrow{F} = (-F, 0, 0)$. Как заставить проводник двигаться вправо? С этой целью присоединим вместо резистора батарею с ЭДС равной $\mathcal{E}_0$ и внутренним сопротивлением R: положительный электрод — к точке O, отрицательный — к точке C, $Bl\mathcal{E}_0/R > F$. Найдите КПД мотора в стационарном режиме $v(t) = v_0, I(t) = I_0$.



4) По металлическим рельсам в виде буквы «П» катится проводящий тонкий стержень с внутренним сопротивлением R, как показано на рисунке. Параллельно стержню в одной плоскости с рельсами находится длинный провод с током I. Какая сила должна действовать на стержень в направлении, параллельном рельсам, чтобы он мог двигаться с постоянной скоростью v, если расстояние между рельсами l, а внутренним сопротивлением рельс можно пренебречь?



5) По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (см. рис.). Сверху шины замкнуты на конденсатор емкости C. Расстояние между шинами l Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти ускорение перемычки.


$\vec{B}$
C
m
ℓ
α

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] С.М. Козел, В.П. Слободянин, Всероссийские олимпиады по физике,1992-2001.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[6] Г.С. Кембровский, Подготовительные задачи к олимпиадам по физике (1984).

[7] Д.В.Сивухин, том 3, электричество.

[8] Методическое пособие по физике для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[9] Физика. Избранные задачи. Кн.2. Павленко Ю.Г, 2008 год.