Московский физико-технический институт

Эквивалентные преобразования электрических цепей.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

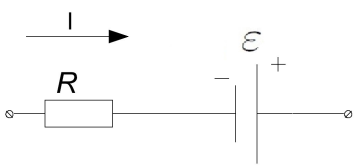
Введение.

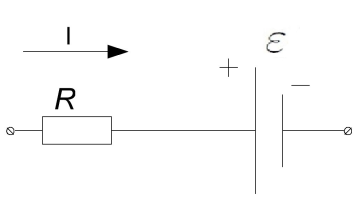
В электротехнике части приходится иметь дело с очень сложными электрическими цепями, которые содержат самые разные элементы, например: резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, источники ЭДС, диоды, транзисторы и другие. В связи с чем необходимы какие-то методы для расчёта тех или иных параметров таких цепей, к примеру нужно найти суммарное сопротивление схемы или ёмкость, или найти напряжение на каком-то элементе. Поэтому, как правило, схему сперва нужно упростить или, как говорят, сделать эквивалентное преобразование, подразумевая под этим замену данной схемы на некоторую более простую, сохраняющую все параметры исходной схемы без изменения.
Основными правилами, которыми можно довольствоваться здесь, являются следующие правила: во-первых, это закон Ома неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи, во-вторых, правила Кирхгофа. Существуют, конечно, и другие специальные методы, однако в данной статье мы будем в основном использовать приведенные выше правила. Дадим их формулировку:

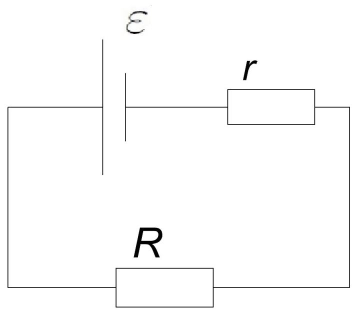
1-ое: если участок цепи содержит источник ЭДС, для него справедлив закон Ома для неоднородного участка цепи. Для случаев, изображенных на рисунках a) и b), закон Ома для неоднородного участка цепи имеет вид:

a) $RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon$

b) $RI = \varphi_1 - \varphi_2 - \varepsilon$





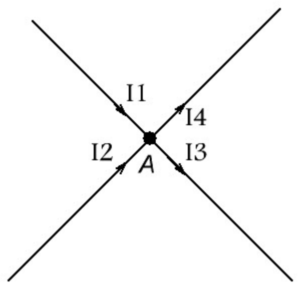


Для замкнутой электрической цепи, содержащей источник тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением (r) и внешним сопротивлением (R), справедлив закон ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

где r — сопротивление источника ЭДС, R — нагрузочное сопротивление.

Для расчёта разветвленных электрических цепей используются правила Кирхгофа:



Первое правило Кирхгофа (правило узлов): алгебраическая сумма сил токов, втекающих в любой узел, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0$$

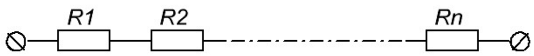
где I_i – токи в проводниках, сходящихся в узле. В эту сумму с полюсом входят токи, втекающие в узел, с минусом – вытекающие, в данном случае: $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$. Первое правило Кирхгофа является выражением того факта, что при протекании постоянных токов в узлах не накапливаются электрические заряды.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвлённой электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивление R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме имеющихся в этом контуре ЭДС ε_i:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_j \varepsilon_j$$

Токи I_i входят в сумму в левой части со знаком "+", если они совпадают совпадают по направлению с произвольно выбранным направлением

обхода контура, и со знаком ”$-$” в обратном случае.
Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородного участка цепи, т.к. при обходе замкнутого контура изменение потенциала оказывается равным нулю.
При составлении электрической цепи проводники могут соединяться последовательно или параллельно. При последовательном соединении проводников:



- сила тока во всех частях цепи одинакова: $I_1 = I_2 = ... = I_n$;
- падение напряжения в цепи равно сумме падений напряжений на отдельных участках: $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$;
- эквивалентное сопротивление цепи R равно сумме сопротивлений отдельных участков: $R = R_1 + R_2 + ... + R_n$.

- сила тока во всех частях цепи одинакова: $I_1 = I_2 = ... = I_n$;
- падение напряжения в цепи равно сумме падений напряжений на отдельных участках: $U = U_1 + U_2 + ... + U_n$;
- эквивалентное сопротивление цепи R равно сумме сопротивлений отдельных участков: $R = R_1 + R_2 + ... + R_n$.

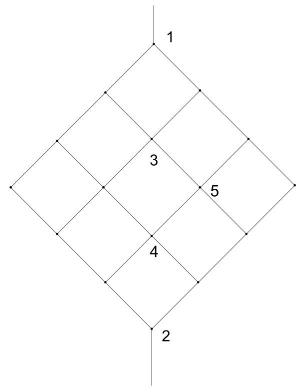
При параллельном соединении проводников:

- сила тока в не разветвлённой части цепи равна сумме сил токов, текущих по отдельным проводникам: $I = I_1 + I_2 + ... + I_n$;
- падения напряжения в параллельно соединенных участках цепи одинаковы: $U_1 = U_2 = ... = U_n$;
- складываются величины, обратные сопротивлениям параллельно соединенных участков: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + ... + \dfrac{1}{R_n}$.

Рассмотрим следующие примеры:

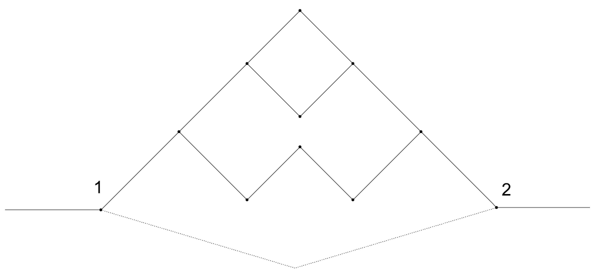
Примеры.

Задача №1. Из однородной проволоки изготовили плоскую решетку. Электрические сопротивления каждого участка равно R. Каким будет общее сопротивление такой решетки, если её подключить так, как показано на рисунке?

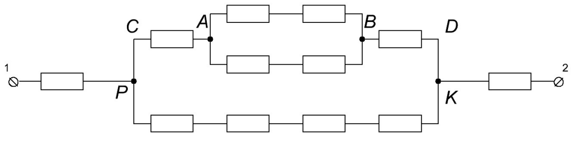


Решение →

Основной идеей этой задачи, как и многих других, является то, что точки одинакового потенциала можно разъединять или соединять. Т.к. наша система симметрична, разрежем её в точках равного потенциала (3; 4; 5). Схема имеет вид:



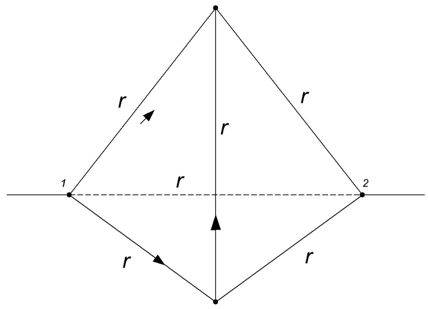
(второй её кусок будет иметь сопротивление аналогичное сопротивлению данной схемы). Имеем,



$R_{AB} = R$
$R_{CD} = 3R$
$R_{PK} = R \cdot \dfrac{12}{7}$

$R_{1-2} = \dfrac{26}{7}R \;\Rightarrow\; R_{\text{общее}} = \dfrac{13}{7}R$

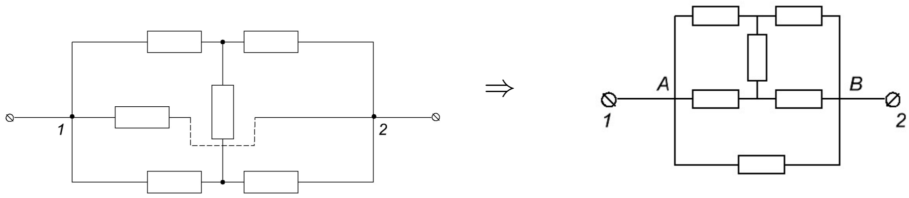
Ответ: $R_{\text{общее}} = \dfrac{13}{7}R$



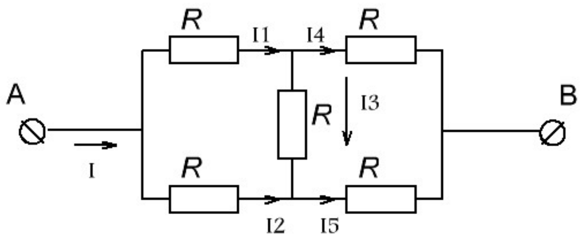
Задача №2. Из однородной проволоки изготовлен тетраэдр. Электрическое сопротивление каждой стороны тетраэдра равно R. Каким будет общее сопротивление тетраэдра, если его включить в цепь двумя соседними вершинами?

Решение $\rightarrow$

Запишем эквивалентную схему:



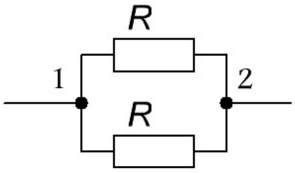
Найдём R_{AB}, т.е. рассмотрим теперь схему:



Воспользуемся правилами Кирхгофа и законом Ома:

1) $R_{\text{экв}} I = RI_2 + RI_5$;
2) $I = I_1 + I_2 = I_4 + I_5 = I_4 + I_2 + I_3$;
3) $I_2 = I_3 + T_4$, $I_5 = I_2 + I_3$.

Решаем эти уравнения и находим, что $R_{\text{экв}} = R_{AB} = R$, т.е. вся схема эквивалентна теперь следующей:



откуда $R_{\text{общее}} = \dfrac{R}{2}$

Ответ: $R_{\text{общее}} = \dfrac{R}{2}$

Задача №3. Определите силу тока, идущего через амперметр, в цепи, если ЭДС источника ε. Внутренними сопротивлениями источника и амперметра пренебречь, известно, что:

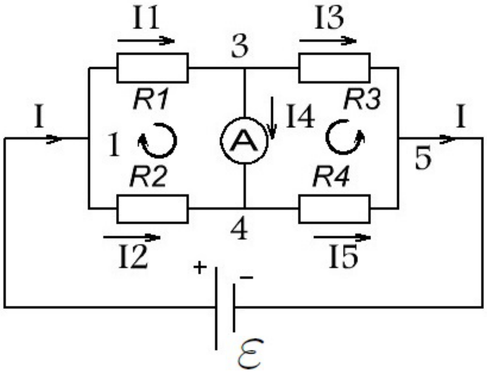
1-й случай: $R_1 = R_2 = r;\ R_2 = R_3 = 2r;$

2-й случай: $R_1 = R_2 = R_3 = r;\ R_4 = 2r.$

Решение $\rightarrow$

1-й случай:

Запишем систему уравнений для токов, воспользовавшись правилами Кирхгофа.



$$\varphi_3 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 - (\varphi_4 - \varphi_1) = 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow\ 0 = I_1R_1 - I_2R_2\ \Rightarrow\ I_1R_1 = R_2I_2$

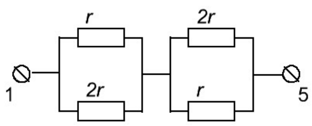
$$\varphi_5 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_3 - (\varphi_5 - \varphi_3) = 0 \qquad (2)$$

$\Rightarrow\ 0 = I_5R_4 - I_3R_3\ \Rightarrow\ 2rI_3 = rI_5\ \Rightarrow\ I_5 = 2I_3$

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_4 \\ I_5 = I_4 + I_2 \\ I_1 + I_2 = I_3 + I_5 \\ I_5 = 2I_3 \\ I_1 = 2I_2 \end{cases} \qquad (3)$$

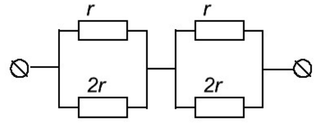
$\Rightarrow\ 2I_2 + I_2 = I_3 + 2I_3\ \Rightarrow\ I_2 = I_3 = \dfrac{I_1}{2}$, откуда также находим, что $I_1 = \dfrac{I_1}{2} + I_4 \Rightarrow I_4 = \dfrac{I_1}{2}$.
Имеем: $I_1 = \dfrac{2}{3}I,\ I_2 = I_3 = \dfrac{I}{3};\ I_4 = \dfrac{I}{3};\ I_5 = \dfrac{2}{3}I_1$.

Т.к. мы пренебрегли внутренним сопротивлением амперметра, то $\varphi_3 = \varphi_4$, тогда наша схема эквивалентна:



$R_{об_1-5} = \dfrac{2}{3}r \cdot 2 = \dfrac{4}{3}r$, откуда $\varepsilon = \dfrac{4}{3}rI\ \Rightarrow\ I = \dfrac{3}{4}\dfrac{\varepsilon}{r}\ \Rightarrow$ $I_1 + I_2 = \dfrac{3}{4}\dfrac{\varepsilon}{r}\ \Rightarrow\ I_1 = \dfrac{\varepsilon}{2r}\ \Rightarrow\ I_4 = \dfrac{\varepsilon}{4r}$.

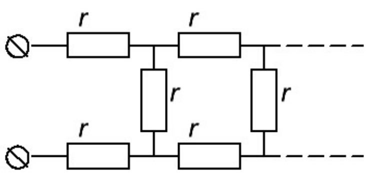
Ответ: $I_4 = \dfrac{\varepsilon}{4r}$.
2-й случай:
$R_1 = R_2 = R_3 = r,\ r_4 = 2r$, в этом случае ток I_4 поменяет своё направление. Из тех же систем имеем: $I_1 = I_3 + I_4, ...,\ \Rightarrow\ I_4 = -\dfrac{I_1}{3}$, эквивалентная схема при этом имеет вид:



$R_{об} = \dfrac{7}{6}r\ \Rightarrow\ \varepsilon = I\dfrac{7}{6}\ \Rightarrow\ I_1 = \dfrac{3}{7}\dfrac{\varepsilon}{r}\ \Rightarrow\ I_4 = \dfrac{\varepsilon}{7r}$.

Ответ: $I_4 = \dfrac{\varepsilon}{7r}$.

Задача №4. Рассчитайте сопротивление электрической цепи, состоящей из большого количества одинаковых звеньев.



Решение $\rightarrow$

Идея заключается в следующем: поскольку цепь состоит из очень большого количества одинаковых звеньев, то убрав одно, сопротивление всей цепи не изменится, тогда пусть x — сопротивление всей цепи. На Рис. 1 изображена эквивалентная схема.

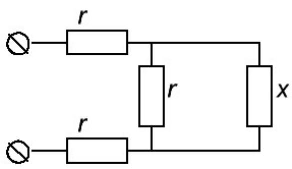
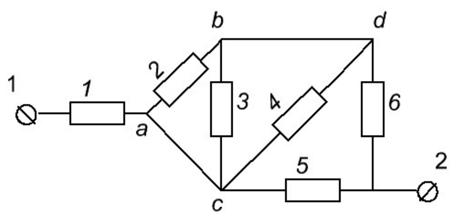


Рис. 1

$x = 2r + \dfrac{xr}{x+r} \;\Rightarrow\; x^2 - 2rx - 2r^2 = 0,\; D/4 = 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = r(1 \pm \sqrt{3}) \;\Rightarrow$
$x = r(1 \pm \sqrt{3}) \simeq 2,73 \cdot r$.

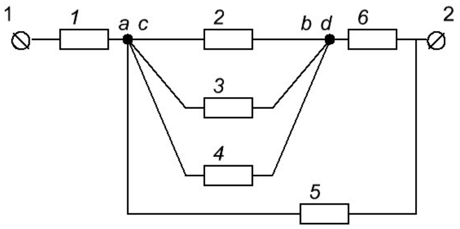
Ответ: $x = r(1 \pm \sqrt{3}) \simeq 2,73 \cdot r$.

Задача №5. Величина каждого сопротивления $R = 1$ Ом. Найти сопротивление цепи между 1 и 2.



Решение →

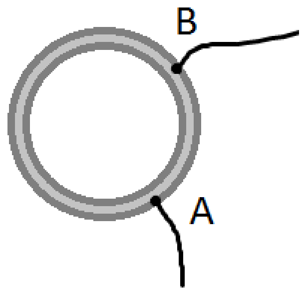
Заметим, что потенциалы точек a), c) и b), d) равны, следовательно их можно соединить.



Имеем: $R_{234} = \dfrac{R}{3}$; $R_{2346} = \dfrac{4}{3}R$; $R_{23465} = \dfrac{4}{7}R$, откуда $R_{1-2} = R_1 + \dfrac{4}{7} = \dfrac{11}{7}R \simeq 1,57$ Ом.

Ответ: $R_{1-2} \simeq 1,57$ Ом.

Задача №6. Из проволоки сопротивлением $R = 10$ Ом сделали кольцо. Где следует присоединить к кольцу провода, подводящие ток, чтобы сопротивление между точками присоединения равнялось $r = 1$ Ом?



Решение →

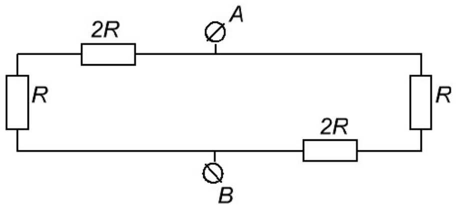
Пусть l — длина всего кольца, x — длина одного из участков кольца между точками присоединения проводов, тогда $(l - x)$ — длина другого участка кольца, следовательно сопротивление отдельных участков кольца $R_1 = \dfrac{x}{l}R$ и $R_2 = \dfrac{l-x}{l}R$. Т.к. участки соединены параллельно, то эквивалентное сопротивление между точками проводов будет равно $R_{\text{экв}} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{\frac{x}{l}R \cdot \frac{l-x}{l}R}{r} = r$. Решая полученное квадратное уравнение, найдём отношение $\dfrac{x}{l}$ для двух участков, на которые нужно разделить кольцо:

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4r}{R}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \simeq 0,112;\ 0,887$$

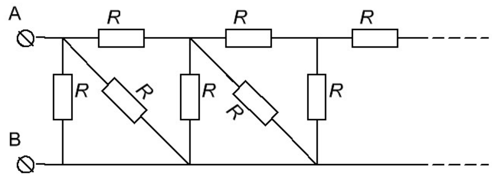
Ответ: нужно разделить в отношении $\frac{x}{l} =\simeq 0,112$ или $0,887$.

<u>**Задача №7.**</u> Определить сопротивление R_{AB} бесконечных цепей, состоящих из периодически повторяющихся элементов.

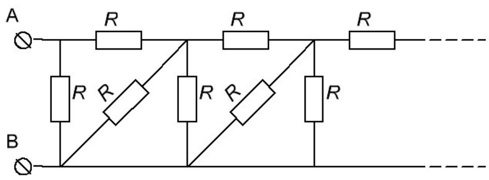
а)



б)

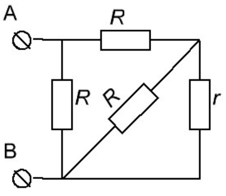


в)



Решение $\rightarrow$

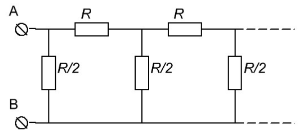
а) Цепь, которая начинается со второго из периодически повторяющихся элементов, подобна исходной, обозначим её сопротивление через r, тогда исходная цепь эквивалентна следующей:



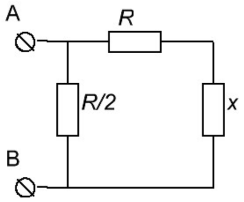
$$R_{AB} = \frac{R(R+2r)}{2R+3r} = r \ \Rightarrow\ r = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $r = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

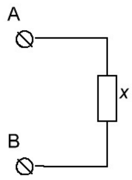
б) В этом случае схема эквивалентна следующей:



$\Leftrightarrow$



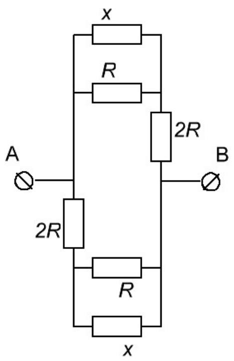
или



Имеем: $\dfrac{(R+x)\dfrac{R}{2}}{\dfrac{3}{2}R+3} = x \;\;\Rightarrow\;\; 2x^2 + 2Rx - R^2 = 0,\; D = 12R^2, \;\Rightarrow\;\; x = \dfrac{(\sqrt{3}-1)R}{2}$.

Ответ: $x = \dfrac{(\sqrt{3}-1)R}{2}$.

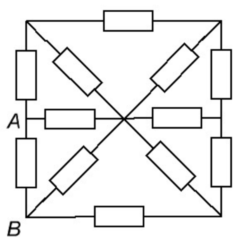
в)



$\Rightarrow\;\; x = \dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}$.

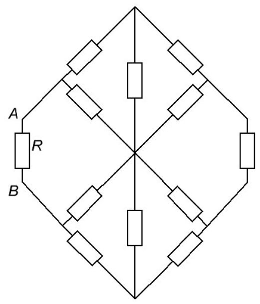
Ответ: $x = \dfrac{R(1+\sqrt{3})}{2}$.

Задача №8. Найти сопротивление цепи, образованной двенадцатью одинаковыми проводниками сопротивлением R каждый.



Решение $\rightarrow$

Эту цепь удобно представить в виде:

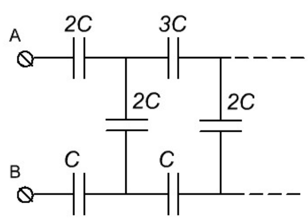


Точки цепи, которые находятся на оси симметрии новой схемы, проходящей между A и B, имеют одинаковые потенциалы и их можно объединить, при этом два сопротивления, пересекаемые осью симметрии, следует представить как сумму двух сопротивлений, каждое величиной $\frac{R}{2}$. В итоге найдём, что $R_{AB} = \frac{4}{5}R$.

Ответ: $R_{AB} = \frac{4}{5}R$.

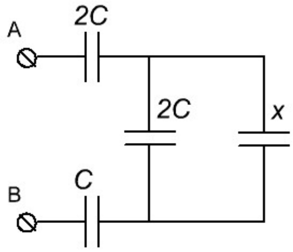
Наличие конденсатора в электрической цепи.

Задача №9. Рассчитайте ёмкость батареи конденсаторов цепи, состоящей из бесконечного числа одинаковых звеньев.



Решение →

Т.к. число звеньев бесконечно, то в приближённом значении, схема эквивалентна следующей:

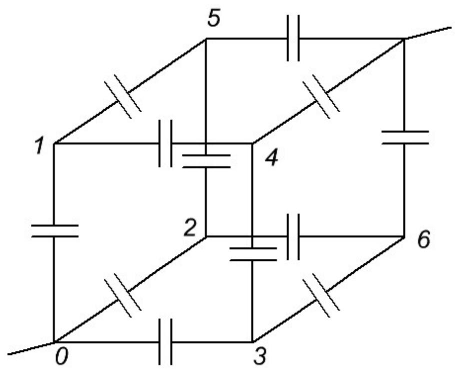


откуда имеем: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3C} + \dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{2C + x}$

$$2x^2 + 4xC - 3C^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = \left(\frac{\sqrt{10} - 2}{2}\right) C \simeq 0,58 \cdot C.$$

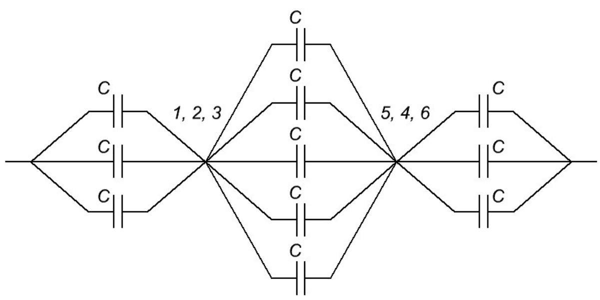
Ответ: $0,58 \cdot C$

Задача №10. Из проводников изготовлен куб. В середине каждой стороны куба расположен конденсатор. Какой будет ёмкость такого соединения конденсаторов, если куб включить в цепь вершинами, наиболее удалёнными друг от друга?



Решение →

Заметим, что потенциалы точек 1, 2, 3 равны и 5, 4, 6. Соединим их и получим эквивалентную схему:



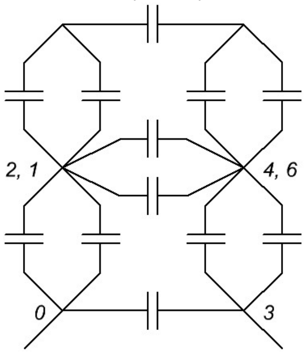
откуда находим $C_{\text{об}}$: $\dfrac{1}{C_{\text{об}}} = \dfrac{1}{3C} + \dfrac{1}{6C} + \dfrac{1}{3C} \ \Rightarrow \ C = \dfrac{6}{5}C.$

Ответ: $C_{\text{об}} = \dfrac{6}{5}C$

Задача №11. Рассмотрим предыдущую задачу в случае, когда куб подключён в цепь вершинами 0 и 3.

Решение →

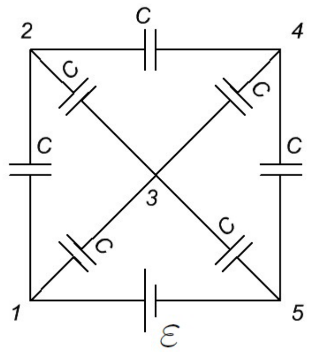
Видим, что точки 4, 6 и 2, 1 равного потенциала, соединим их, получим следующую схему:



$$C_{\text{об}} = \frac{5}{7}C + C = \frac{12}{7}C.$$

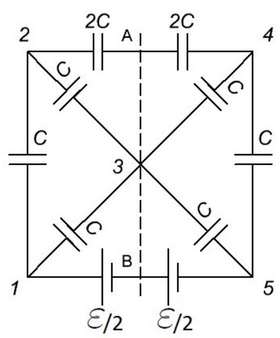
Ответ: $C_{\text{об}} = \dfrac{12}{7}C$

Задача №12. Определите заряд на конденсаторе, подключенном между точками 2 и 4. Ёмкости всех конденсаторов одинаковы и равны C

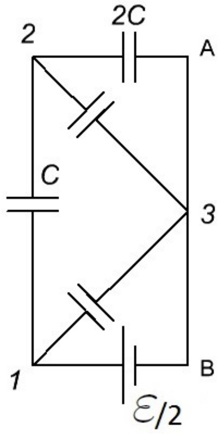


Решение →

Разобьём конденсаторы между точками 2 и 4 на два с ёмкостями $2C$, и разобьём источник на два с $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Имеем:



Заметим, что потенциалы точек A, B, 3 равны, поэтому соединим их проводником. Тогда схема примет вид:



(правую часть можно отбросить для простоты). Согласно закону сохранения заряда, можно записать, что заряд на конденсаторе, подключенном между точками 1 и 2, равен общему заряду на конденсаторах, подключенных параллельно, между точками 2 и 3, т.е. $CU_{12} = 3CU_{23}$. С учётом наличия источника тока можно записать, что $U_{12} + U_{23} = \dfrac{\varepsilon}{2}$, получаем: $U_{23} = \dfrac{\varepsilon}{8}$, следовательно, с учётом симметрии схемы $U_{24} = \dfrac{1}{4}\varepsilon \;\Rightarrow\; Q_{24} = \dfrac{C\varepsilon}{4}$.

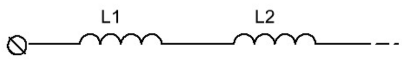
Ответ: $Q_{24} = \dfrac{Q\varepsilon}{4}$

Дополнительно.

1) Скажем несколько слов о катушки индуктивности в электрической цепи с постоянным током.

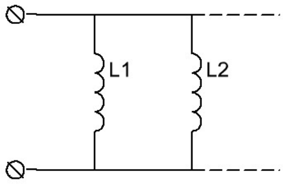
Основным параметром катушки является её индуктивность, численно равная отношению создаваемого током потока магнитного поля, пронизывающего катушку к силе протекающего тока.

При последовательном соединении катушек общая индуктивность равна сумме индуктивностей всех соединённых катушек:



$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

При параллельном соединении общая индуктивность равна:

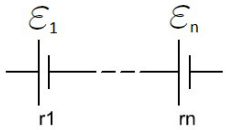


$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{L_i}}$$

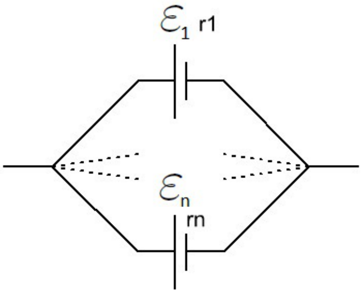
2) Соединение источников тока: для источников тока с внутренними сопротивлениями $r_1, ...$ выполняются те же правила, что и для обычных резисторов:

а) последовательное соединение:

$$\varepsilon_{\sum} = \sum \varepsilon_i, \; r_{\sum} = \sum r_i; \; I_{\text{ист}} = \frac{\varepsilon_{\sum}}{r_{\sum}}$$



б) параллельное соединение:



$$r_{\sum} = \frac{1}{\sum \frac{1}{r_i}};$$

$$I_{\text{ист}} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + ... + \frac{\varepsilon_n}{r_n}.$$

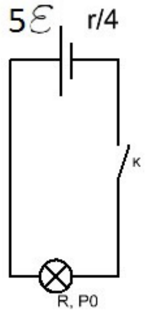
Параллельно соединять элементы разумно при условии, что они имеют одинаковые ЭДС, в противном случае внутри батареи будут циркулировать тока, приводящие к расходу энергии батареи.

Задача №13. Батарея состоит из 100 источников тока с внутренним сопротивлением 0,1 Ом каждый. Источники одинаковы с $\varepsilon = 10$ В. Источники соединили по 5 штук последовательно, и эти группы соединили параллельно. Какая максимальная полезная мощность может выделиться в нагрузочном сопротивлении этой батареи?

Решение $\rightarrow$

При последовательном соединении $\varepsilon_1 = 5\varepsilon$ и $r_1 = 5r$, при параллельном $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 5\varepsilon$ (т.е. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, иначе будут циркулировать тока через батарею источников), $r_2 = \dfrac{r_1}{20} = \dfrac{r}{49}$, тогда наша исходная батарея эквивалентна схеме с источником напряжения ε и сопротивлением $\dfrac{r}{4}$.

$\Rightarrow$

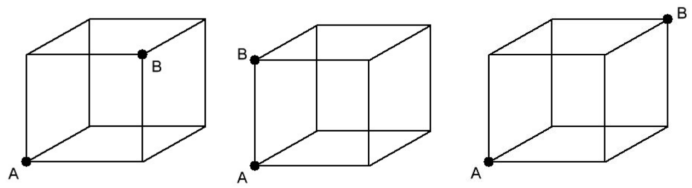


Мощность, которая выделится на R, равна: $P_0 = \sum P_i - P_{\text{источника}} = 5\varepsilon I - I^2\dfrac{r}{4}$. Найдём максимальное значение: $0 = 5\varepsilon - \dfrac{r}{2}I_0 \;\; \Rightarrow \;\; P_{max} = \dfrac{25\varepsilon^2}{r} = 25$ кВт.

Ответ: $P_{max} = \dfrac{25\varepsilon^2}{r} = 25$ кВт.

Задачи для самостоятельного решения.

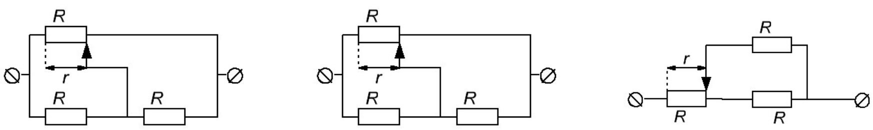
1. Определите сопротивление цепи, образованной 12 проволочками, составляющими рёбра куба и соединёнными между собой в вершинах куба, при подключении к точкам A и B. Сопротивление каждой проволочки R. Рассмотрите три варианта расположения точек A и B.



а) б) в)

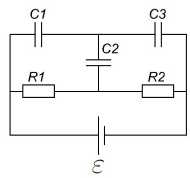
2. Представьте себе усечённый икосаэдр. Предположим, что в каждом ребре находится резистор с сопротивлением R/конденсатор с ёмкостью C. Найти сопротивление/ёмкость этой системы.

3. Постойте график зависимости общего сопротивления цепей, показанных на рисунках, от сопротивления реостата r.

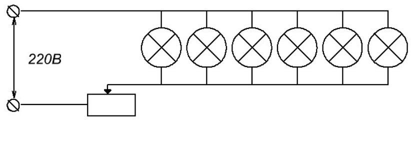


а) б) в)

4. Найдите заряд на конденсаторе C_2, внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь. Ёмкость конденсаторов равны: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $\varepsilon = 6$ В.



5. Шесть лампочек для карманного фонарика включены в сеть с помощью реостата, обеспечивающего нормальный накал каждой лампочки. Как изменится создаваемая этими лампочками освещённость, если одна из них перегорит?



Литература

[1] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[2] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[3] В. Горшковский, Польские физические олимпиады, 1982 год.

[4] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[5] А.Н. Долгов, С.Е.Муравьёв, В.П.Протасов,Б.В.Соболев, задачи по физике, часть 3, МИФИ, 2005.

[6] Т.В.Котырло, Г.Г.Спирин, В.В.Евстигнеев, электричество и магнетизм, практический курс физики, 2008.