Московский физико-технический институт

Конденсаторы.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Пусть у нас есть уединённый заряженный проводник с зарядом Q, который создаёт вокруг себя электрическое поле. Потенциал создаваемого им электрического поля на бесконечности будем считать равным нулю. Очевидно, что потенциал проводника φ пропорцианален его заряду, если удвоить заряд проводника, то его потенциал также удвоится, поэтому отношение заряда проводника к его потенциалу не зависит от заряда. В связи с этим вводится коэффициент пропорциональности между зарядом проводника и его потенциалом

$$C = \frac{Q}{\varphi} \tag{1}$$

где коэффициент C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и её распределения в пространстве и называется ёмкостью уединённого проводника. Например из формулы $\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R}, r \leqslant R \\ \frac{Q}{r}, r > R \end{cases}$ для потенциала равномерно заряженной сферы, ёмкость сферы определяется соотношением $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ (СИ) или $C = R$ (СГС).

Поскольку заряженный проводник можно мысленно разделить на бесконечно малые элементы с зарядами ΔQ_i, и считать , что в этой точке, где находится заряд ΔQ_i остальные заряды проводника создают поле практически с тем же потенциалом φ, который имеет проводник (поскольку $\Delta Q_i \approx 0$). Из формулы для энергии системы зарядов $W = \dfrac{1}{2}\sum Q_i\varphi_i$ находим, что энергия уединённого заряженного проводника W определяестя соотношением

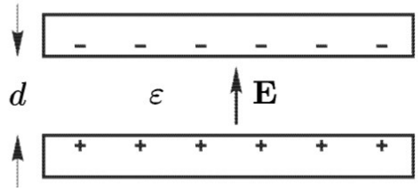
$$W = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{2}$$

где Q – заряд проводника, C – его ёмкость.

Наиболее важным является понятие ёмкости конденсатора. Всякий конденсатор состоит из двух металлических обкладок, отделённых одна от другой слоем диэлектрика. Пусть обкладками кондкнсатора являются две замкнутые металлические оболочки: наружная и внутренняя, причём внутренняя целиком окружена наружной. Тогда поле между обкладками будет зависеть только от внешних полей, при этом заряды на поверхностях обкладок, обращённых одна к другой, равны по величине и противоположны по знаку.

На практике независимость внутреннего поля конденсатора от внешнего поля достигается тем, что обкладки располагаются очень близко одна от другой. В этом случае заряды будут целиком сосредоточены на внутренних поверхностях обкладок, т.е. поверхностях, обращённых друг к другу. При этом часто добавляют, что размеры пластин много больше расстояния меду ними. Если Q – заряд одной пластины, а $\varphi \equiv (\varphi_1 - \varphi_2)$ –разность потенциалов между обкладками, то $Q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$ где коэффициент C зависит только от размеров и устройства конденсатора и называется ёмкостью конденсатора.

Простейший вид конденсатора — плоский — он представляет собой две одинаковые плоские пластины, расстояние между которыми d много меньше их поперечных размеров, поэтому поле между обкладками конденсатора почти всюду однородно, кроме точек вблизи краёв конденсатора, однако можно пренебречь краевыми эффектами при вычислении ёмкости конденсатора.



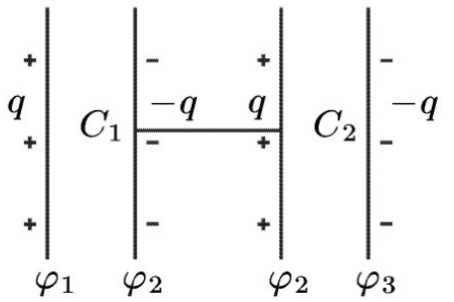
Пусть σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, а S — площадь последней, то $Q = \sigma S$.

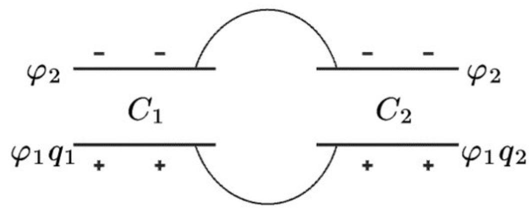
Напряженность поля между пластинами $E = \dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ (СГС) разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \dfrac{4\pi\sigma d}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; C = \dfrac{\varepsilon S}{4\pi d}$ (СГС) или $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ (СИ).

Если конденсатор заряжен, то он обладает определённой потенциальной энергией (в данном случае энергия заключена в электрическом поле между пластинами)

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \text{ где } U = \varphi_1 - \varphi_2$$

В электрических цепях конденсаторы часто соединяют в батареи, при этом уже приходится говорить о суммарной ёмкости батареи конденсаторов. Соединение может быть последовательным параллельным или комбинированным. Для простоты рассмотрим случай двух конденсаторов.





При последовательном соединении средние пластины, соединённые между собой, электризуются через влияние, поэтому их заряды равны и противоположны по знаку, а разности потенциалов складываются: $\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3)$, т.к. $\varphi_1 - \varphi_3 = \dfrac{Q}{C}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{Q}{C_1}$, $\varphi_2 - \varphi_3 = \dfrac{Q}{C_2}$, откуда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} \tag{3}$$

В случае параллельного соединения разности потенциалов между обкладками обоих конденсаторов одинаковы, а заряды обкладок складываются: $Q = Q_1 + Q_2$, следовательно ёмкость батареи

$$C = C_1 + C_2 \tag{4}$$

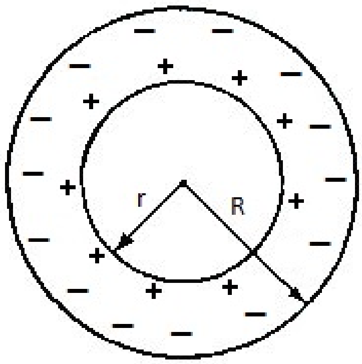
Формулы (3) и (4) легко обобщить на случай произвольного числа конденсаторов.

Чтобы закрепить материал рассмотрим следующие задачи.

Примеры.

Задача №1 Сферический конденсатор представляет собой две концентрические сферы радиусов r и R ($R > r$). Найти ёмкость такого конденсатора.

Решение →



Пусть заряд внутренней сферы Q, внешней $-Q$. Потенциалы внутренней и внешней сфер находим по принципу суперпозиции для потенциалов

$$\varphi_{\text{внутр}} = \frac{kQ}{r} - \frac{kQ}{R} = \frac{kQ(R-r)}{rR}$$

$$\varphi_{\text{внеш}} = +\frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{R} = 0$$

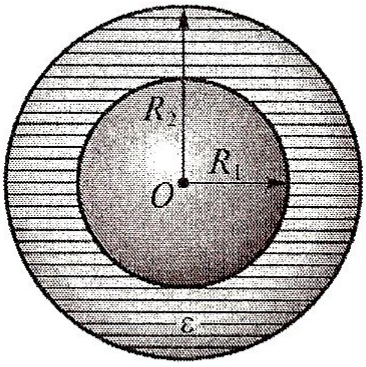
отсюда находим напряжение на сферическом конденсаторе $U = \varphi - \varphi = \frac{kQ(R-r)}{rR}$ и его ёмкость $C = \frac{Q}{U} = \frac{rR}{k(R-r)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R-r}$ или в системе СГС: $C = \frac{rR}{R-r}$

Ответ: $C = \frac{rR}{R-r}$

Замечание: Заметим, что при $R \to \infty$ внутренняя обкладка превращается в уединенную сферу, а $C = 4\pi\varepsilon_0 r$. При этом для любых конечных значений r (в СИ) ёмкость сферического конденсатора больше ёмкости уединенной внутренней обкладки: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R-r} > 4\pi\varepsilon_0 r$.

Задача №2. Металлический шар радиусом R_1 окружен примыкающим к нему шаровым слоем однородного диэлектрика с наружным радиусом R_2 и проницаемостью ε. Найти ёмкость данной системы.

Решение →



Ёмкость проводника, находящегося в однородной изотропной среде, заполняющей всё поле, пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi}$.

Сообщим шаровому проводнику заряд q, тогда вне и на поверхности проводника возникает электрическое поле, если рассчитать потенциал проводника $\varphi(R_1)$, то по формуле $C = \dfrac{q}{\varphi}$, можем найти ёмкость C. Расчет потенциалов поля можно провести по методу Гаусса $4\pi r\dfrac{E}{\varepsilon} = q$, где $R_2 > r > R_1$, следовательно напряжённость поля в диэлектрике $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = k\dfrac{q}{\varepsilon r^2}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ в СИ или $k = 1$ в СГС. По определению $E = -\text{grad}\ \varphi = -\dfrac{d\varphi}{dr} \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^b Edr = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \int\limits_a^b Edr$.
Примем во внимание, что шар создаёт электрическое поле за пределами $r \geqslant R_1$, аналогично полю точечного заряда. Важным обстоятельством является отсутствие второй пластины привычного конденсатора (в отличие от предыдущей задачи). Воображаемая пластина, очевидно, может быть расположена на бесконечности или может быть реальной, но заземленной. Поэтому пределы интегрирования нужно определить следующим образом. Имеем два стоя диэлектриков от R_1 до R_2 и от R_2 до ∞. Во втором случае диэлектриком является вакуум $\varepsilon = 1$, поэтому исходный интеграл распадается на два:

$$\Delta\varphi = \int\limits_0^\infty Edr = k\frac{q}{\varepsilon}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} + kf\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{kq}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon - 1}{R_2}\right)$$

Подставив это выражение в формулу для C найдём искомое значение ёмкости: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}{1 + (\varepsilon - 1)\dfrac{R_1}{R_2}}$.

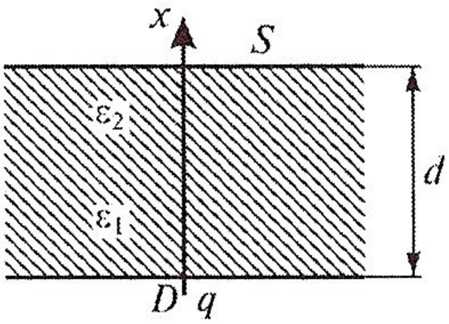
Ответ: $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}{1 + (\varepsilon - 1)\dfrac{R_1}{R_2}}$.

Могут быть также случаи, когда диэлектрик не является однородным, т.е. его диэлектрическая проницаемость меняется с расстоянием, что в свою очередь влияет на ёмкость системы. В качестве такого примера предлагается следующая задача.

Задача №3 Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость которого изменяется в перпендикулярном обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2, причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площадь каждой обкладки S, расстояние между ними d, определить ёмкость системы.

Решение $\to$

Направим ось OX вверх, а начало координат совместим с нижней пластиной т.к. ε изменяется по линейному закону, то $\varepsilon = a + bx$, где $a, b =$const



— определяется из граничных условий $\varepsilon = \varepsilon_1$ при $x = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ при $x = d \Rightarrow a = \varepsilon_1$; $b = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$, таким образом $\varepsilon = \varepsilon_1 + \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} \cdot x$.

Теперь сообщим нижней пластине конденсатора заряд q и по методу Гаусса рассчитаем напряженность поля: $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0(a + bx)S}$, далее находим соответствующую разность потенциалов из $E = -\dfrac{d\varphi}{dx}$ и интегрированием получаем: $\Delta\varphi = \int\limits_0^d \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}\dfrac{dx}{(a + bx)} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S b}\ln\left(1 + \dfrac{bd}{a}\right)$,

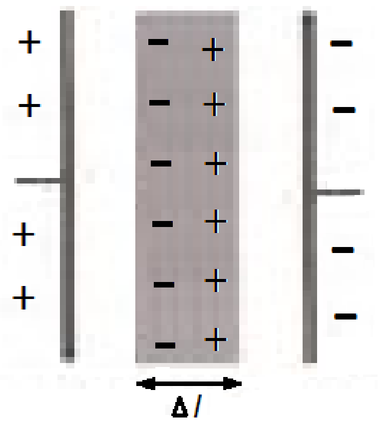
откуда $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{\varepsilon_0 S b}{\ln\left(1 + \dfrac{bd}{a}\right)} = \dfrac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

Задача №4 Напряжение между обкладками плоского воздушного конденсатора, отключенного от источника напряжения, равно U. Каким будет напряжение на конденсаторе, если между обкладками вставить плоскую металлическую пластинку толщиной Δl. Металлическая пластинка располагается параллельно обкладкам конденсатора. Расстояние между обкладками l.

Решение $\rightarrow$

Т.к. конденсатор отключен от источника, его заряд в процессе внесения металлической пластинки не меняется и остаётся равным его первоначальному заряду $Q = C_0 U$, где C_0 — ёмкость воздушного конденсатора. После внесения пластинки в конденсаторе установится следующее электрическое поле: внутри металлической пластинки $E = 0$; вне металлической пластинки напряженность поля не изменяется по сравнению со случаем воздушного конденсатора и равна $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ (S — площадь пластины конденсатора).



Поэтому работа, которую совершает поле конденсатора над пробным зарядом q при его переносе от положительно заряженной обкладки к отрицательной определяется соотношением $A = F(l - \Delta l) = qE(l - \Delta l) = \dfrac{qQ(l - \Delta l)}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{qC_0 U(l - \Delta l)}{\varepsilon_0 S}$, где F — пробный заряд со стороны поля.

Поскольку напряжение на конденсаторе связано с работой как $A = qU_1$, то $U_1 = \dfrac{C_0 U(l - \Delta l)}{\varepsilon_0 S}$ используя формулу для ёмкости плоского воздушного конденсатора $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{l}$, получим $U_1 = \dfrac{U(l - \Delta l)}{l}$.

Ответ: $U_1 = \dfrac{U(l-\Delta l)}{l}$.

Задача №5 Рассмотрим предыдущую задачу в случае, когда металлическая пластина вносится в конденсатор с зарядом Q, подключенный к источнику.

Решение $\rightarrow$

Т.к. конденсатор соединён с источником, напряжение на нём в процессе внесения металлической пластинки не меняется, однако меняется его заряд $Q \longrightarrow Q_1$. После внесения пластинки в конденсаторе установится следующее электрическое поле: внутри металлической пластинки $E = 0$; вне металлической пластинки напряженность поля определяется новым зарядом конденсатора $E = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$, поэтому работа А, которую совершает поле конденсатора над пробным зарядом q при его переносе от положительно заряженной обкладки к отрицательной, равна $A = F(l-\Delta l) = qE(l-\Delta l) = \dfrac{qQ_1(l-\Delta l)}{\varepsilon_0 S}$, где F — сила, действующая на пробный заряд со стороны поля. Поскольку напряжение на конденсаторе есть отношение работы, совершаемой электрическим полем над пробным зарядом при его переносе с одной пластины на другую, к величине пробного заряда, то $U = \dfrac{A}{q} = \dfrac{Q_1(l-\Delta l)}{\varepsilon_0 S}$, с другой стороны, т.к. напряжение не менялось, то $U = \dfrac{Q}{C_0}$, где C_0 — ёмкость воздушного конденсатора, $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{l}$, $Q_1 = \dfrac{Ql}{l-\Delta l}$.

Ответ: $Q_1 = \dfrac{Ql}{l-\Delta l}$, $U = \dfrac{Q}{C_0} = \dfrac{Q_1(l-\Delta l)}{\varepsilon_0 S}$.

Очень часто приходится иметь дело с задачами, в которых в конденсатор вставляется определённым образом диэлектрик, например, в случае плоского конденсатора вставляемая пластина диэлектрика заполняет не все пространство между обкладками и, следовательно, как-то меняет ёмкость системы. Рассмотрим следующие примеры.

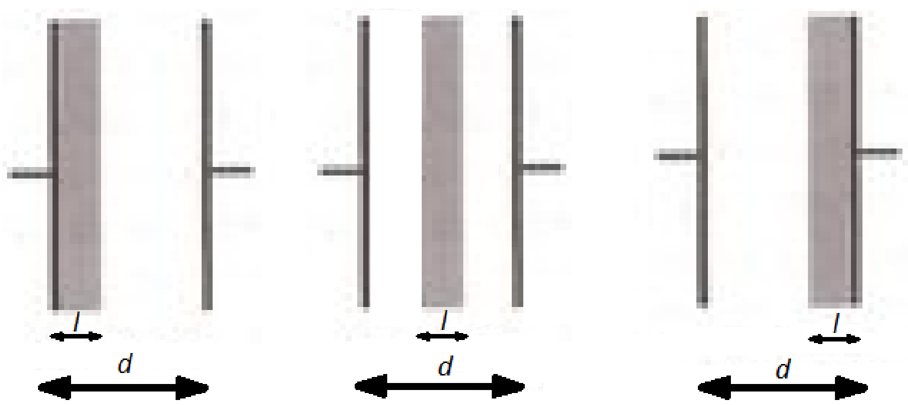
Задача №6 Плоский воздушный конденсатор имеет ёмкость C_0. Определите, какой станет ёмкость этого конденсатора, если в него вставить пластину из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Толщина пластинки l, расстояние между обкладками $d (d > l)$, площадь пластин S.

Решение $\rightarrow$

<u>1-й способ</u>

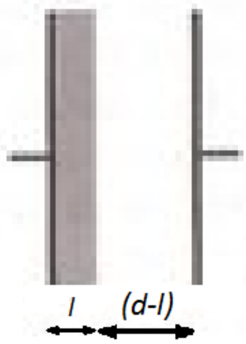
Сообщим обкладкам конденсатора заряды Q и $-Q$ и найдём разность потенциалов между обкладками. Напряжённость электрического поля внутри конденсатора, но вне пластинки E_1 будет такой же, как и в отсутствие пластинки $E_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$, напряженность поля внутри пластинки $E_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$. Поэтому работа A, которую совершает электрическое поле над пробным зарядом q, когда он переносится с одной обкладки на другую равна $A = \dfrac{qQ(d-l)}{\varepsilon_0 S} + \dfrac{qQl}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$, отсюда находим разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \dfrac{A}{q}$ и $C = \dfrac{Q}{U} \Rightarrow U = \dfrac{Q(\varepsilon d - l(\varepsilon - 1))}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$, $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon d - l(\varepsilon - 1)}$.

<u>2-й способ</u>

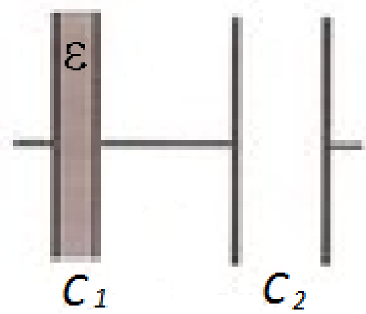


Этот способ решения заключается в эквивалентном преобразовании системы, т.е. замене одного конденсатора на систему конденсаторов. В нашем случае неизвестно как именно внесли пластину, поэтому возможны три варианта; но в итоге конечная ёмкость системы будет одной и той же для всех случаев, поэтому для простоты рассмотрим 1-ый случай, т.е.

пластина расположена так:



Внесём разделяющую проводящую пластину вдоль линии границы раздела диэлектрик — воздух, тогда наш конденсатор будет эквивалентен двум конденсаторам:

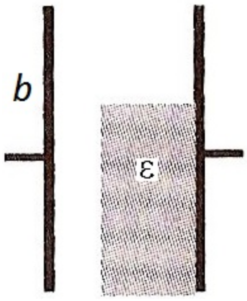


где $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l}$; $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-l}$. $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ — начальная ёмкость, тогда $\dfrac{1}{C_{эквив}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} \Rightarrow C_{эквив} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon d - l(\varepsilon - 1)}$.

Ответ: $C_{эквив} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon d - l(\varepsilon - 1)}$.

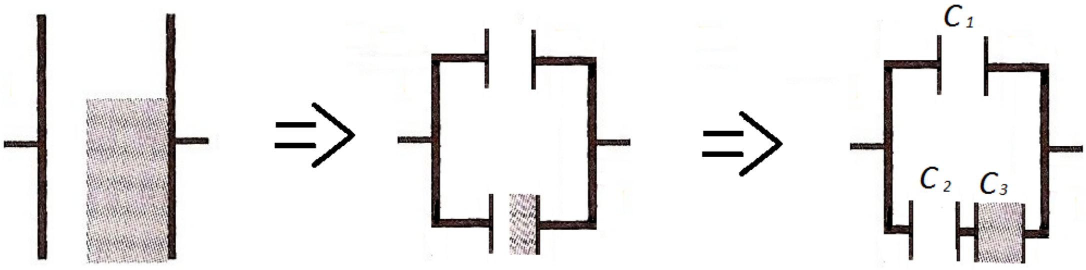
Однако возможны некоторые трудности с таким преобразованием, дело в том, что пластину, которую мы добавляем в систему (проводящую), должна находиться в эквипотенциальной области, в противном случае данное преобразование не будет эквивалентным. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача №7 Плоский воздушный конденсатор имеет ёмкость C_0. Определить, какой станет ёмкость конденсатора, если к внутренней части одной из пластин приклеить пластинку из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Площадь пластинки составляет $2/3$ площади обкладок конденсатора, а толщина равна $2/3$ расстояния между обкладками. Краевыми эффектами пренебречь.

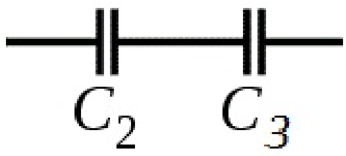


Решение $\rightarrow$

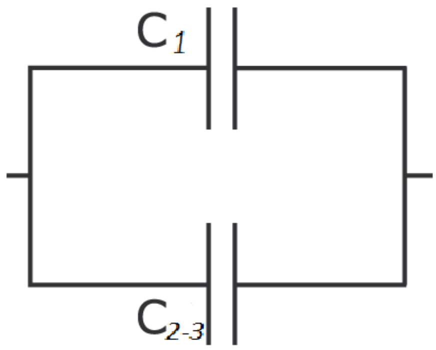
Особенность этой задачи состоит в том, что проводящую пластину вносить вдоль линии границы раздела диэлектрик — воздух нельзя, ибо в области пространства, где помещается новая пластина, на границе воздух — воздух потенциал будет отличным от потенциала на границе диэлектрик — воздух, поэтому следует сначала отделить части обкладок, между которыми нет диэлектрика, а затем уже вводить разделяющие пластины.



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{3d} = \frac{C_0}{3};\ C_2 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{\left(d - \frac{2}{3}d\right)} = 2C_0;\ C_3 = 3C_0$$



$$\Rightarrow\ \frac{1}{C_{2-3}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\ \Rightarrow\ C_{2-3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{2C_0 \varepsilon C_0}{2C_0 + \varepsilon C_0} = \frac{2\varepsilon C_0}{2+\varepsilon}$$

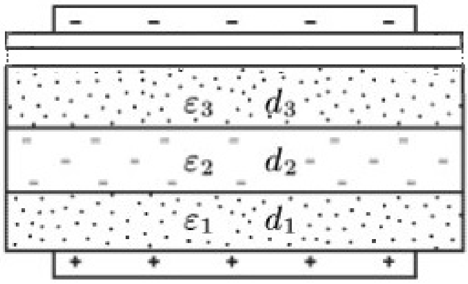


$$\Rightarrow\ C_{1-2-3} = C_{\text{эквив}} = C_1 + C_{2-3} = \frac{C_0}{3} + \frac{2\varepsilon C_0}{2+\varepsilon} = \frac{(2+\varepsilon+6\varepsilon)C_0}{6+3\varepsilon} = \frac{(2+7\varepsilon)C_0}{6+3\varepsilon}$$

Ответ: $C = \dfrac{2+7\varepsilon}{6+3\varepsilon} C_0$.

Задача №8 Рассмотрим пример расчёта ёмкости слоистого плоского конденсатора. Конденсатор состоит из двух параллельных металлических обкладок, разделённых плоскими слоями из диэлектриков с ε_1, ε_2, ε_3 .

Решение →



Представим, что между слоями диэлектриков введены бесконечно тонкие металлические листы. От этого заряда на обкладках конденсатора и напряжённости полей в слоях диэлектрика не изменяется. Не изменится и разность потенциалов между обкладками, а с ней и ёмкость конденсатора. Однако введение металлических листов превращает слоистый конденсатор в батарею последовательно соединённых конденсаторов. В итоге получим:

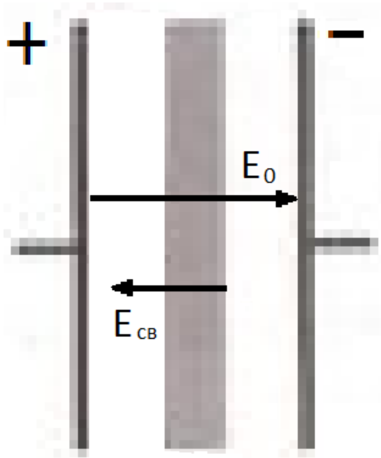
$C = \dfrac{S}{4\pi}\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d_3}{\varepsilon_3}...\right)^{-1}$ (СГС), где d_1, $d_2\, d_3$ ... — толщины диэлектрических слоёв.

Ответ: $C = \dfrac{S}{4\pi}\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d_3}{\varepsilon_3}...\right)^{-1}$

Приведём ещё некоторые задачи, связанный с плоским конденсатором, на которые стоит обратить внимание.

Задача №9 Две проводящие пластины с зарядами $Q > 0$ и $-Q$ расположены параллельно и напротив друг друга. Площади пластин одинаковы, их размеры велики по сравнению с расстоянием между ними, и можно считать, что заряды распределены по каждой пластине равномерно. Между проводящими пластинами находится пластинка из диэлектрика с ε и размерами по длине и ширине как у проводящих пластин. Найти связанные заряды на поверхностях пластины из диэлектрика.

Решение →



По определению $E_0 - E_{связ} = \dfrac{E_0}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; E_{связ} = E_0\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$, согласто теореме Гаусса $\begin{cases} E_0 = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0} \\ E_{связ} = \dfrac{q_{св}}{S\varepsilon_0} \end{cases} \;\Rightarrow\; q_{св} = \dfrac{S\varepsilon_0}{S\varepsilon_0}Q\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = Q\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$.

Ответ: $q_{св} = Q\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$.

<u>**Задача №10**</u> Плоский воздушный конденсатор, имеющий ёмкость $C = 40$ мкф, соединён с источником напряжения $U = 100$ В. Какую работу совершит внешняя сила при медленном уменьшении расстояния между обкладками в $n = 2$ раз? Какую работу совершит при этом источник?

Решение $\rightarrow$

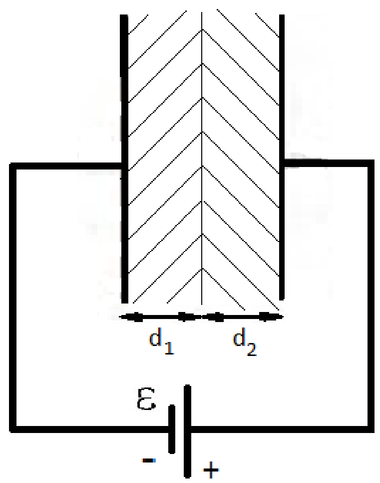
При сближении пластин конденсатора, присоединённого к источнику напряжения, изменяется его заряд, а напряжение остаётся неизменный. При этом, кроме внешних сил, работу совершает и источник напряжения. Поэтому закон сохранения энергии имеет вид:

$$W_{конеч} - W_{нач} = A_{внеш} + A_{источ} = \frac{nCU^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{(n-1)CU^2}{2}$$

Чтобы найти работу, которую совершил источник, найдём заряд, протёкший через него при сближении пластин. Пусть $Q = CU$ и $Q_1 = nCU$ — первоначальный и конечный заряды, тогда $\Delta Q = Q_1 - Q = (n-1)CU$, следовательно, $A_{источ} = \Delta QU = (n-1)CU^2 \Rightarrow A_{внеш} = -\dfrac{(n-1)CU^2}{2} = -0,4$ Дж.

Задача №11 Плоский конденсатор с площадью пластин S полностью заполнен слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2 и диэлектрическими проницаемости ε_1 и ε_2. Между обкладками конденсатора поддерживается разность потенциалов ξ. Определите величину и знак связанного (поляризованного) заряда диэлектрика у верхней обкладке конденсатора.

Решение $\rightarrow$



$E_0 = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}$ — напряжённость поля между пластинами.

$E_1 = \dfrac{E_0}{\varepsilon_1}$; $\dfrac{E_0}{\varepsilon_2}$ — напряжённость поля в диэлектриках.

Следовательно разность потенциалов пластин равна:

$\varepsilon = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \Rightarrow \xi = E_0\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$ (т.к. поле можно считать однородным)

$E_0 = \dfrac{\xi\varepsilon_1\varepsilon_2}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}$. Для 1-го диэлектрика имеем:

$\dfrac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - E_{связ} \Rightarrow E_{связ} = E_0\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$. Т.к. $E_{связ} = \dfrac{q_{связ}}{\varepsilon_0 S}$, то $q_{связ} = \dfrac{\varepsilon_0 S\xi\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 - 1)}{(d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1)\varepsilon_1}$, учитывая,что $q_{связ} < 0$ у верхней границы конденсатора, получим $q_{связ} = -\dfrac{\varepsilon_0 S\xi\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 - 1)}{(d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1)\varepsilon_1}$.

Ответ: $q_{связ} = \dfrac{\varepsilon_0 S\xi\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \varepsilon_1)}{(d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1)\varepsilon_1}$.

Задача №12

Заряженный конденсатор ёмкостью C и зарядом Q подключим параллельно к другому напряженному конденсатору такой же ёмкости. Сравните энергию электрического поля до и после подключения.

Решение →

Начальная энергия системы равна $W_0 = \dfrac{Q^2}{2C}$. После подключения произойдёт перераспределение зарядов и выделения тепла, имеем:

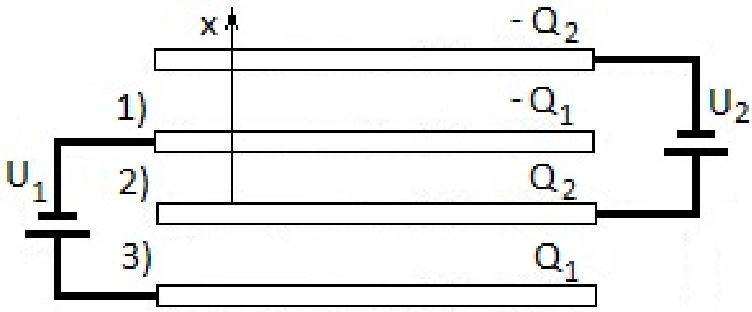
$\Delta W + Q = 0 \Rightarrow Q = W_0 - W$, где $W_{конеч} = \dfrac{Q'^2}{2C} + \dfrac{Q'^2}{2C} = \dfrac{Q'^2}{C}$, поскольку система замкнутая,то заряд системы сохраняется, т.е. $Q = 2Q'$, тогда имеем:

$Q = \dfrac{Q^2}{4C}$, $W_0 = \dfrac{Q^2}{2C}$, $W_{конеч} = \dfrac{Q^2}{4C}$, откуда $W_0 > W_{конеч}$

Ответ: $W_0 > W_{конеч}$

Задача №13

Два источника напряжения U_1 и U_2 подключили к четырём очень большим параллельным пластинам (см. рис). Найти напряжение между средними пластинами. Расстояние между всеми пластинами одинаково и много меньше размеров пластин.



Решение →

Основная идея решения задачи заключается в том, что, с одной стороны, электрическое поле между пластинами определяется их зарядами, с другой, определяет разность потенциалов между ними. Эти условия дают уравнения, из которых можно определить заряды пластин.

Пусть на нижней пластине после установления окажется заряд Q_1, на следующей снизу пластине — заряд Q_2, поскольку источники только перераспределяют заряды, а пластины изначально были не заряжены, на двух следующих пластинах окажутся заряды $-Q_1$ и $-Q_2$. Заряды пластин будут создавать электрическое поле, напряжённость которого определяются принципом суперпозиции. Для проекции вектора E имеем:

$$E_{1,x} = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} + \left(-\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} \right) - \left(-\frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right) = \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_{2,x} = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} - \left(-\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} \right) - \left(-\frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right) = \frac{Q_1 + Q_2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_{3,x} = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} - \left(-\frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} \right) - \left(-\frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right) = \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S}$$

Находим разность потенциалов между пластинами. Между 2-й и 4-й: $U_1 = E_{3,x}d + E_{2,x}d = \dfrac{(2Q_1 + Q_2)d}{\varepsilon_0 S}$. Между 1-й и 3-й:

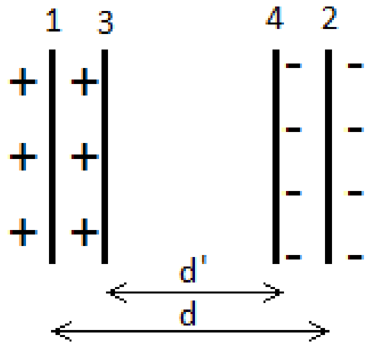
$U_2 = E_{2,x}d + E_{1,x}d = \dfrac{(Q_1 + 2Q_2)d}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow Q_1 = \dfrac{(2U_1 - U_2)\varepsilon_0 S}{3d}$, $Q_1 = \dfrac{(2U_2 - U_1)\varepsilon_0 S}{3d} \Rightarrow U = E_{2,x}d = \dfrac{U_1 + U_2}{3}$.

Ответ: $U = \dfrac{U_1 + U_2}{3}$.

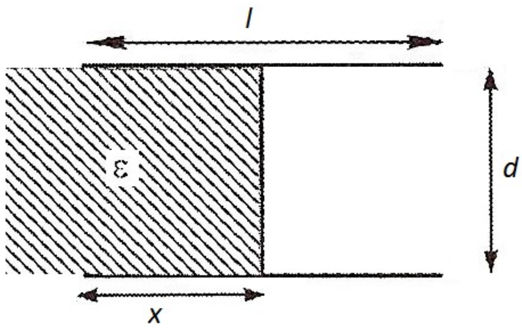
Задачи для самостоятельного решения.

1. Плоский конденсатор, образованный пластинами 1 и 2, заряжен до разности потенциалов 40 В, а плоский конденсатор, образованный пластинами 3 и 4, - до разности потенциалов 30 В. Какова напряжённость поля между обкладками конденсатора 3, 4, если $d = 2$ см, $d' = 1$ см? Решая эту задачу, учащийся сказал: "Рассматриваемое поле получается в результате суперпозиции полей конденсаторов (1,2) и (3,4), следовательно, искомая напряжённость

   $E = \dfrac{U_{12}}{d} + \dfrac{U_{34}}{d'} = \dfrac{40}{0,02} + \dfrac{30}{0,01} = 5000$ В/м. Верен ли этот ответ?

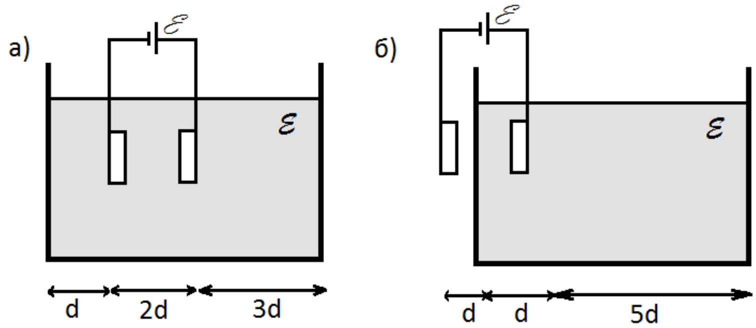


2. Две прямоугольные пластины длиной l и площадью S расположены параллельно друг другу на расстоянии d. пластины заряжены до разности потенциалов U. В пространство между пластинами втягивается диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Толщина диэлектрика равна d, его ширина равна ширине пластин, а длина больше l, трения нет. Найдите зависимость силы, действующей на диэлектрик со стороны поля на расстояния x.

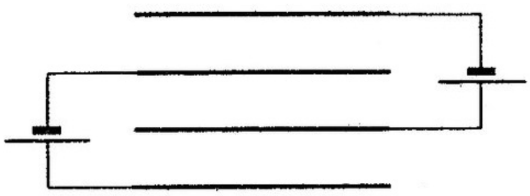


3. Плоский конденсатор подключён к источнику с ЭДС ξ. Расстояние между пластинами конденсатора $2d$, их площадь S. Конденсатор

опускают в металлическую коробку с жидким диэлектриком проницаемостью ε. Пластины конденсатора параллельны стенкам коробки и отстоят от них на расстоянии, равном d и $3d$. определите заряд, прошедший через источник при погружении конденсатора. Решите задачу при условии, что в коробку опущена одна пластина.

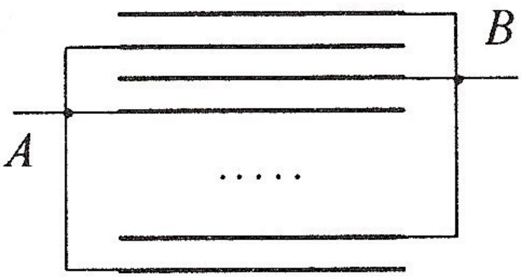


4. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырёх пластин, удерживаемых неподвижно. Расстояние между соседними пластинами d. Пластины 2 и 4 закорочены, пластины 1 и 3 присоединены к источнику с ЭДС ξ. Определите силу электрического поля. Площадь каждой пластины S, а расстояние между пластинами много меньше размеров пластин.



Ответ: $F_3 = 0$

5. N одинаковых очень больших пластин площадью S каждая, расположены в вакууме на одинаковых расстояниях d друг от друга (n — чётное). Пластины соединены, как показано на рис.4. Найти ёмкость между точками A и B. Краевыми эффектами пренебречь.



Ответ: $C = \dfrac{S\varepsilon_0(N-1)}{d}$.

6. Два проводящих шара радиусами r и R расположены далеко друг от друга и соединены с обкладками конденсатора с ёмкостью C. Шару радиуса r сообщили заряд q. Найти заряд второго шара после установления равновесия? Ёмкостью соединительных проводов пренебречь.

Ответ: $\tilde{q} = \dfrac{q}{1 + \dfrac{r}{R} + \dfrac{r}{kC}}$, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Литература

[1] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[2] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[3] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[4] А.Н. Долгов, С.Е.Муравьёв, В.П.Протасов,Б.В.Соболев, задачи по физике, часть 3, МИФИ, 2005.

[5] Т.В.Котырло, Г.Г.Спирин, В.В.Евстигнеев, электричество и магнетизм, практический курс физики, 2008.