Московский физико-технический институт

Механические колебания.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Теория механических колебаний особенно важна в области машиностроения, приборостроения, авиа- и судостроения, промышленного и транспортного строительства, а также в некоторых других областях техники. Каждая из названных областей ставит перед специалистами ряд ответственных практических задач, тесно связанных с проблемой механических колебаний; хотя постановка этих задач почти всегда обладает заметной спецификой, но все они, в конечном счете, решаются на основе общих принципов и методов, составляющих содержание теории колебаний.

Важность теории колебаний общепризнана. Эта теория является частью механики, выделенной признаком общности рассматриваемых колебательных явлений. В основном тот же признак использован и при дальнейшем внутреннем разделении теории в зависимости от определенного типа колебаний (свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания).

В вычислительный аппарат теории механических колебаний все больше проникают понятия, заимствованные из теории электрических цепей и теории автоматического управления (частотные методы, комплексные представления сил и перемещений).

Сорок лет назад академик Н. Д. Папалекси писал: «Не будет, вероятно, преувеличением сказать, что среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания, понимаемые в широком смысле этого слова, занимают во многих отношениях выдающееся, часто ключевое место». Можно было бы привести множество примеров, иллюстрирующих важность колебательных явлений в технических устройствах. В одних случаях колебания вредны (именно эти случаи впервые привлекли внимание инженеров к проблемам теории колебаний), в других случаях они приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике.

Механические колебания могут причинить значительный вред, часто они создают прямую угрозу прочности весьма ответственным конструкциям, таким, как турбинные лопатки, воздушные винты, мосты, перекрытия промышленных зданий и т. п.; колебания неоднократно служили причиной многих аварий, а иногда и тяжелых катастроф. В других случаях колебания способны нарушить нормальные условия эксплуатации, — таковы, например, вибрации станков, мешающие достижению желательной чистоты обработки деталей, или колебания приборов, установленных на вибрирующем основании (например, на автомобиле или на самолете), приводящие к нарушению точности показаний.

Наконец, иногда колебания оказывают вредное физиологическое действие на лиц, организм которых подвергается длительным вибрациям. Во всех перечисленных случаям теория колебании решает задачи предвидения и, по возможности, предотвращения вредного действия колебаний.

С другой стороны, ныне все шире применяются различные технологические процессы, основанные на использовании искусственно возбуждаемых колебаний. К таким процессам относится, например, вибропогружение свай, при котором свая весьма быстро погружается в грунт под действием сравнительно небольшой вибрационной нагрузки; другим примером может служить вибротранспортировка сыпучих материалов, частицы которых перемещаются в одну сторону вдоль колеблющегося лотка («виброконвейера»).

С помощью теории колебаний удается не только вскрыть довольно сложную природу соответствующих физических явлений, но и установить оптимальные параметры режима колебаний, при которых достигается наибольшая производительность технологического процесса!

Таким образом, теория механических колебаний служит научной основой решения множества разнообразных технических задач большого практического значения.

Прежде чем мы приступим к рассмотрению примеров задач, введём некоторую терминалогию, которую будем использовать в дальнейшем.

Колебания механических систем, или механические колебания — это механическое движение тела или системы тел, которое обладает периодичностью во времени и происходит в окрестности положения равновесия.

Положением равновесия называется такое состояние системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго, не испытывая внешних воздействий.

Например, если маятник отклонить и отпустить, то начнутся колебания. Положение равновесия — это положение маятника при отсутствии отклонения. В этом положении маятник, если его не трогать, может пребывать сколь угодно долго.

Амплитуда колебаний тела A — это величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.

Период колебаний T — это время одного полного колебания. Можно сказать, что за период тело проходит путь в четыре амплитуды.

Частота колебаний ν — это величина, обратная периоду: $\nu = \frac{1}{T}$. Частота измеряется в герцах (Гц) и показывает, сколько полных колебаний совершается за одну секунду.

Гармонические колебания.

Особую роль в теории колебаний играют гармонические колебания. Очень часто малые колебания, как свободные, так и вынужденные, которые происходят в реальных системах, можно считать имеющими форму гармонических колебаний или очень близкую к ней. К тому же широкий класс периодических функций, описывающих эти колебательные процессы, может быть разложен на сумму тригонометрических компонентов. Другими словами, любое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний. Ну и наконец для широкого класса систем откликом на гармоническое воздействие является гармоническое колебание (свойство линейности), при этом связь воздействия и отклика является устойчивой характеристикой системы. С учётом предыдущего свойства это позволяет исследовать прохождение колебаний произвольной формы через системы. Теперь займёмся математическим описанием гармонических колебаний.

Будем считать, что положение колеблющегося тела определяется одной единственной координатой x. Положению равновесия отвечает значение $x = 0$. Основная задача механики в данном случае состоит в нахождении функции $x(t)$, дающей координату тела в любой момент времени.

Для математического описания колебаний естественно использовать периодические функции. Таких функций много, но две из них — синус и косинус — являются самыми важными. У них много хороших свойств, и они тесно связаны с широким кругом физических явлений.

Поскольку функции синус и косинус получаются друг из друга сдвигом аргумента на $\pi/2$, можно ограничиться только одной из них. Мы для определённости будем использовать косинус.

Гармонические колебания — это колебания, при которых координата зависит от времени по гармоническому закону: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ (1)

Выясним смысл входящих в эту формулу величин. Положительная величина A является наибольшим по модулю значением координаты (так как максимальное значение модуля косинуса равно единице), т. е. наибольшим отклонением от положения равновесия. Поэтому A — амплитуда колебаний.

Аргумент косинуса $(\omega t + \varphi_0)$ называется фазой колебаний. Величина равная значению фазы при $t = 0$, называется начальной фазой. Начальная фаза отвечает начальной координате тела: $x_0 = A\cos\varphi_0$.

Величина ω называется циклической частотой. Найдём её связь с периодом колебаний T и частотой ν. Одному полному колебанию отвечает приращение фазы, равное 2π радиан: $\omega T = 2\pi$, откуда $\omega = 2\pi/T$ или $w = 2n\pi\nu$. Измеряется циклическая частота в рад/с (радиан в секунду). Получаем: $x = A\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T} + \varphi_0\right)$.

Уравнение гармонических колебаний.

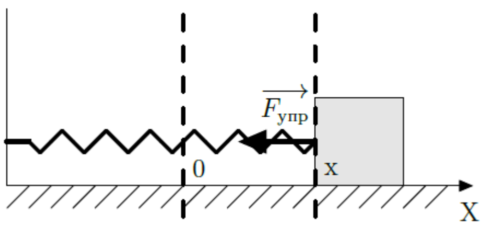
Вернёмся к общему гармоническому закону (1). Дифференцируем это равенство по времени:

(2) $v_x(t) = X(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$. Теперь дифференцируем полученное равенство (2):

(3) $a_x(t) = X(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$. Сопоставим выражение (1) для координаты и выражение (3) для проекции ускорения. Мы видим, что проекция ускорения отличается от координаты лишь множителем (4) $a_x = -\omega^2 x$. Это соотношение называется уравнением гармонических колебаний. Его можно переписать и в таком виде: $a_x + \omega^2 x = 0$.

Пружинный маятник.

Пружинный маятник — это закреплённый на пружине груз, способный совершать колебания в горизонтальном или вертикальном направлении. Найдём период малых горизонтальных колебаний пружинного маятника. Колебания будут малы, если величина деформации пружины много меньше её размеров. При малых деформациях мы можем пользоваться законом Гука. Это приведёт к тому, что колебания окажутся гармоническими.



Трением пренебрегаем. Груз имеет массу m, жёсткость пружины равна k. Координате $x = 0$ отвечает положение равновесия, в котором пружина не деформирована.

Следовательно, величина деформации пружины равна модулю координаты груза.

В горизонтальном направлении на груз действует только сила упругости F со стороны пружины. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось X имеет вид: $ma_x = F_x$ (6)

Если $x > 0$ (груз смещен вправо, как на рисунке), то сила упругости направлена в противоположную сторону, и $F_x < 0$. Наоборот, если $x < 0$, то $F_x > 0$. Знаки x и F_x всё время противоположны, поэтому закон Гука можно записать так: $F_x = -kx$.

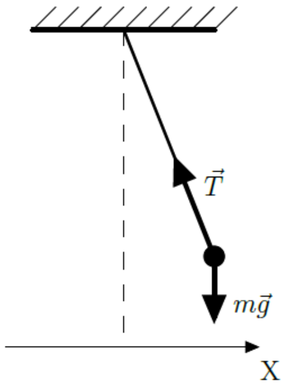
Тогда соотношение (6) принимает вид: $ma_x + kx = 0$ или $a_x + \frac{k}{m}x = 0$, что эквивалентно уравнению (5), где $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Мы получили уравнение гармонических колебаний в случае пружинного маятника.

Математический маятник.

Математический маятник — это небольшое тело, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити. Математический маятник может совершать колебания в вертикальной плоскости в поле силы тяжести.

Найдём период малых колебаний математического маятника. Длина нити равна L. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. Запишем для маятника второй закон Ньютона: $ma = mg + T$, и спроектируем его на ось $OX : ma_x = T_x$.



Если маятник занимает положение как на рисунке (т.е. $x > 0$), то: (7) $ma_x + T\frac{x}{L} = 0$. Когда маятник покоится в положении равновесия, выполнено равенство $T = mg$.

При малых колебаниях, когда отклонения маятника от положения равновесия малы (по сравнению с длиной нити), выполнено приближённое равенство $T \approx mg$. Воспользуемся им в формуле (7): $ma_x + \frac{mg}{L}x = 0$ или $a_x + \frac{g}{L}x = 0$.

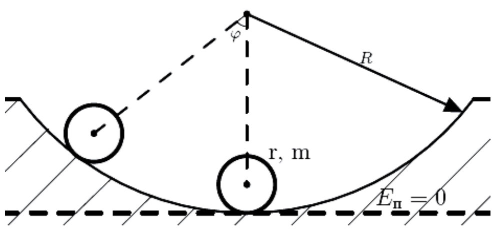
В итоге получим уравнение гармонических колебаний вида (5), в котором $\omega^2 = \frac{g}{L}$.

Использование закона сохранения энергии.

В предыдущих пунктах мы рассмотрели один из методов нахождения уравнения колебаний и периода колебаний, однако есть ещё один метод, позволяющий найти уравнение и период колебаний в системе, и заключается он в использовании закона сохранения энергии. Суть этого метода состоит в том, что поначалу записывается уравнение, выражающее связь полной энергии системы от всех её параметров, то есть кинетическую энергию поступательного движения, кинетическую энергию вращательного движения и потенциальную энергию. Если система замкнута и диссипативных сил (например трения) в системе нет, то полная энергия движущегося тела, в этой системе сохраняется, то есть всё время остаётся постоянной (данная система называется консервативной). Далее это уравнение дифференцируется по переменной времени и находится соответствующее уравнение колебаний. Для наилучшего понимая этого метода рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

Задача №1 Внутри широкой, хорошо укрепленной трубы радиусом R находится небольшая тонкостенная труба радиусом r. Определить период малых колебаний малой трубы, считая, что она перекатывается без проскальзывания. Трения нет.



Решение $\mapsto$ Пусть масса малой трубы равна m и она распределена в ней равномерно. Так как проскальзывания нет, то скорость вращения такая же, как и поступательного движения. Отклоним трубу на малый угол φ и запишем закон сохранения энергии.

Потенциальная энергия: П$= mg(R + r\cos\varphi - R\cos\varphi) \approx mg\left(R + r\left(1 - \dfrac{\varphi^2}{2}\right) - R\left(1 - \dfrac{\varphi^2}{2}\right)\right) = \dfrac{mgr\varphi^2}{2} + mgr\left(1 - \dfrac{\varphi^2}{2}\right)$, здесь мы воспользовались малостью угла φ и приближением $\cos\varphi \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$.

Кинетическая энергия поступательного движения: Т$=\dfrac{m\dot{x}^2}{2} = \dfrac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2}$ (так как $x = R\sin\varphi \approx R\varphi$)

Кинетическая энергия вращательного движения: Т$_{вращ}$=Т$_{пост}$

Имеем: $П + T_{вращ} + T_{пост} = E_{пол}$ =const, то есть $\dfrac{mgr\varphi^2}{2} + mgr(1 - \dfrac{\varphi^2}{2}) + \dfrac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} \cdot 2$ =const$\Rightarrow$

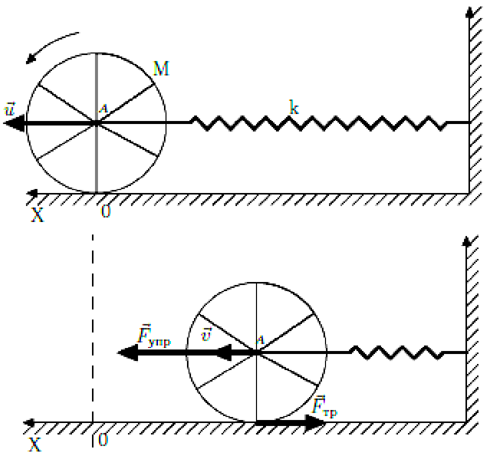
$2R^2\dot{\varphi}^2 + g(R - r)\varphi^2$ =const, продифференцируем это равенство по времени, так как $\varphi = \varphi(t)$.

$2R^2 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + g(R - r)2\varphi\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \dfrac{g(R - r)}{2R^2}\varphi = 0.$

Итак, мы получили дифференциальное уравнение колебаний, где $\omega^2 = \dfrac{g(R - r)}{2R^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R^2}{g(R - r)}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R^2}{g(R - r)}}$.

Задача №2



Легкая пружина жесткостью k соединена одним концом с неподвижной вертикальной стеной, а другим с осью колеса массой M, равномерно распределенной по ободу радиусом R.

Колесо отводят на небольшое расстояние, растягивая при этом пружину, и отпускают. После этого колесо начинает совершать гармонические колебания.

Определить период этих колебаний, если колесо катается по поверхности без проскальзывания, а пружина сохраняет горизонтальное положение.

Решение $\mapsto$ При движении колеса на него действуют сила упругости и сила трения качения, которая приводит его в вращение. Т.к. колесо не проскальзывает, то $F_{упр_x} = F_{тр_x}$

Покажем, что скорость поступательного движения равна скорости вращательного движения. Запишем кинематическое уравнение движения: $F_{упр_x} = Ma_x = M\dfrac{dv_A}{dt}$ и $F_{тр_x} = Ma_x = MR\dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv_A}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt}$, т.е. скорости одинаковы.

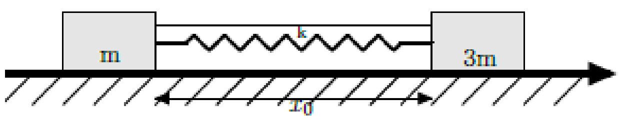
Запишем закон сохранения энергии: $\Pi + \text{T}_K + \text{T}_{тр} = \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{Mx^2}{2} + \dfrac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \text{const}$, где φ — угол поворота колеса.

Учтем то, что $T_к = T_{вращ}$, чтобы упростить предыдущее выражение.

Имеем: $\dfrac{kx^2}{2} + M\dot{x}^2 = \text{const}$ (дифференцируем) $\Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{k}{2M}x = 0$, где $\omega^2 = \dfrac{k}{2M}$, следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2M}{k}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2M}{k}}$.

Задача №3 По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью два бруска массами m и $3m$, связанные нитью. Между брусками находится пружина жесткостью k, сжатая на величину x_0. Пружина прикреплена только к бруску массой m. Размерами брусков малы по сравнению с длиной нити. Во время движения нить обрывается и бруски разъезжаются вдоль начального положения нити. Найти скорость бруска массой $3m$ после его отделения от пружины. Найти время соприкосновения пружины с бруском массой $3m$, считая от момента разрыва нити.



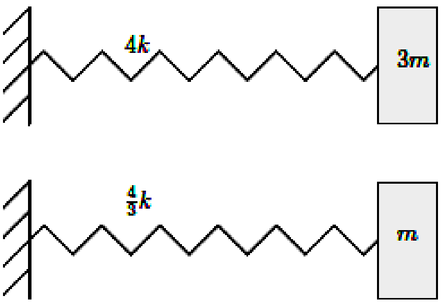
Решение $\mapsto$ Так как система изолирована, по оси OX скорость движения центра масс не изменяется. Найдём положение центра масс. Пусть $AC = l$, $AB = x$, тогда $mx = 3m(l - x) \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}l$,

$BC = \dfrac{l}{4}$.

Сделаем эквивалентную систему. Поскольку центр масс не изменяется, то система равносильна двум колеблющимся массам m и $3m$ на пружинах AB и BC. Разрежем пружину AC жёсткостью k на две.

$l_0 = l, l_1 = \dfrac{3}{4}l, l_2 = \dfrac{1}{4}l$ (длина пружины) с площадью S.

Воспользуемся соотношением для малых деформаций (закон Гука) $\dfrac{F}{S} = E\frac{\triangle l}{l}$, где F — сила, действующая на пружину, E — модуль Юнга, $\dfrac{\triangle l}{l}$ — относительное растяжение (сжатие). Отсюда $k = \dfrac{ES}{l}$ — коэффициент жёсткости. Имеем: $k_0 = k = \dfrac{ES}{l}, k_1 = \dfrac{ES}{l_1} = \dfrac{4ES}{3l} = \dfrac{4}{3}k$, $k_2 = 4k$.



Стоит отметить, что переходя в систему отсчёта, связанную с центром масс, уравнения колебаний каждого, записанного в лабораторной системе отсчёта (неподвижной), в системе, связанной с центром масс, распадается на два независимых уравнения. В чём можете убедиться сами.

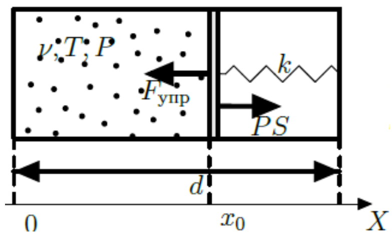
Имеем: $3m\ddot{x} + 4kx = 0 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{4k}}$ — период колебаний. Тогда время соприкосновения равно $\tau = \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{3m}{4k}}$.

Для нахождения скоростей разлёта воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$\begin{cases} E_{полн} = \dfrac{4mv^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2} = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{3mu^2}{2} \\ 4mv = mv_1 + 3mu \end{cases} \Rightarrow u_{1,2} = \dfrac{12v + x_0\sqrt{12\dfrac{k}{m}}}{12} \Rightarrow u = v + x_0\sqrt{\dfrac{k}{12m}} \text{ и } v_1 = v - x_0\sqrt{\dfrac{3k}{4m}}.$$

Ответ: $v_1 = v - x_0\sqrt{\dfrac{3k}{4m}}$, $u = v + x_0\sqrt{\dfrac{k}{12m}}$, $\tau = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{3m}{4k}}$.

Задача №4 Есть цилиндр наполовину заполненный идеальным газом, в другой половине вакуум и пружина жесткостью k. Длина цилиндра l. Пренебрегая теплоемкостью системы и потерями тепла, найти период малых колебаний, если масса разделяющего сосуд поршня равна m, длина нерастянутой пружины l.



Решение $\mapsto$ Данная задача сложна тем, что записать закон сохранения энергии и дифференцировать его по временной координате не получится, так как в уравнении будет входить T —

температура, которая сложным образом зависит от $x(t)$. Поэтому поступим иначе, в положении равновесия: $k(l-l_0)=\dfrac{\nu RT}{l-x_0}\Rightarrow l-x_0=\sqrt{\dfrac{\nu RT}{k}}$.

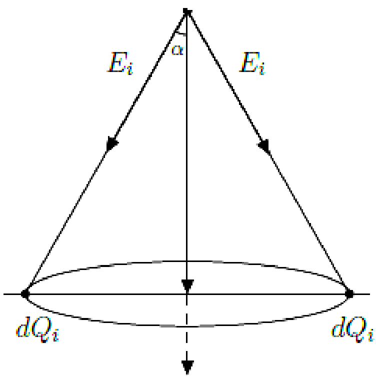
Сделаем малое приращение $\triangle x$ и предположим, что не повлияет на T, тогда $F_{возвращ}=(F_{упр}-PS)=k(l-x-x_0)-\dfrac{\nu RT}{l-x_0-\triangle x}$.

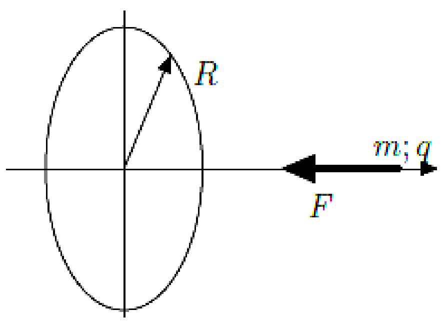
Далее, так как $\triangle x\approx 0$, то $\dfrac{\nu RT}{l-x_0-\triangle x}=\dfrac{\nu RT}{l-x_0}\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{\triangle x}{l-x_0}}\right)\approx\dfrac{\nu RT}{l-x_0}\left(1+\dfrac{\triangle x}{l-x_0}\right)=\dfrac{\nu RT}{l-x_0}+\dfrac{\triangle x\nu RT}{(l-x_0)^2}$ (здесь мы сделали приближение $\dfrac{1}{1-x}\approx 1+x, x\to 0$).

Имеем: $k(l-x_0-\triangle x)-\dfrac{\nu RT}{l-x_0}-\dfrac{\triangle x\nu RT}{(l-x_0)^2}=-2\triangle xk$, то есть $F_{возвращ}=-2\triangle xk=ma_x\Rightarrow\omega=\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ и $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

Задача №5 По кольцу из диэлектрика равномерно распределен заряд Q. Через центр кольца проходит ось, перпендикулярная его плоскости. Маленькая бусинка, имеющая заряд q и массу m, противоположного знака с зарядом кольца, может свободного скользить по оси. Определить период малых колебаний бусинки относительно центра кольца.





Решение $\mapsto$ Разобьём кольцо на множество элементарных зарядов dQ_i, каждый из них создаёт напряжённость dE_i в точке A, находящейся на оси, проходящей через центр кольца.

$dE_i=\dfrac{dQ_i}{x^2+R^2}$, где $AB=\sqrt{x^2+R^2}$, её проекция на ось равна: $dE_{ix}=dE_i\cos\alpha=dE_i\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}=dQ_i\dfrac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$.

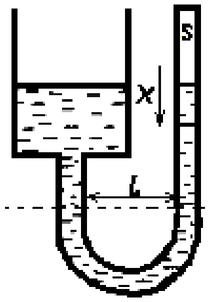
Найдём суммарную напряжённость: $E_x=\sum_i E_{i_x}=\dfrac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\cdot\sum_i dQ_i=\dfrac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$.

Отсюда находим силу, действующую на бусинку: $F=\dfrac{|Q||q|x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\Rightarrow m\ddot{x}=-\dfrac{|Q||q|x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ (так как $x\ll R$ в виду малости отклонения от положения равновесия, то $\dfrac{x^2}{R^2}\approx 0$), тогда $m\ddot{x}+\dfrac{|Q||q|x}{R^3}=$

$0 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^3}{\mid Q \mid\mid q \mid}}$ (здесь была использована Гауссовская система единиц).

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^3}{\mid Q \mid\mid q \mid}}$.

Задача №6 Один из концов U — образной трубки подсоединён к большому плоскому резервуару. В трубку и резервуар налита ртуть, как показано на рисунке. Найти период малых колебаний уровня жидкости в трубке, считая сечение трубки малым по сравнению с сечением резервуара, а также пренебрегая вязкостью ртути. Длина участка трубки с ртутью l.



Решение $\mapsto$ Пусть ось X направлена вертикально вниз и пусть уровень ртути в трубке опустился на некоторую величину x. Тогда изменится потенциальная энергия ртути: $\Pi = mg\triangle h/2$, где $m = Sx\rho$ — масса ртути в столбе высотой x, ρ — плотность ртути, S — площадь сечения трубки, $\triangle h$ — разность уровней ртути.

Так как сечения разреза много больше сечения трубки, то изменением уровня ртути в нём можно пренебречь, значит $\triangle h = x$, то есть $\Pi = \dfrac{\rho Sg}{2}x^2$. Ещё раз, идея состоит в том, что смещение уровня ртути в резервуаре по отношению к смещению ртути в трубке, равное x, является бесконечно малой величиной.

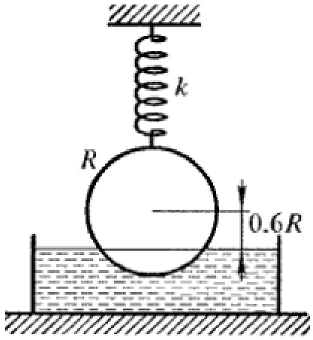
Кинетическая энергия ртути в трубке равна: $\mathrm{T} = \dfrac{M\dot{x}^2}{2}$, где $M = (l - x)S\rho \approx lS\rho$ — масса ртути в трубке (ртуть в резервуаре покоится).

Так как по закону сохранения: $\mathrm{T} + \Pi = \mathrm{const} \Rightarrow \dfrac{lS\rho}{2}\dot{x}^2 + \dfrac{\rho Sg}{2}x^2 = \mathrm{const}$, дифференцируя полученное выражение, получаем: $lS\rho\dot{x}\ddot{x} + \rho Sgx\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{g}{l}x = 0$ — уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

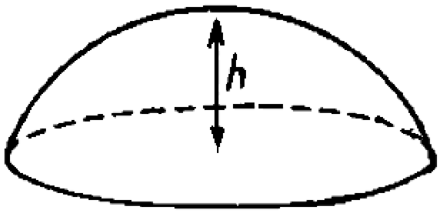
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Задачи повышенной сложности.

Задача №7 Железный шарик радиуса R, подвешенный на пружине жесткости k, частично погружен в широкую чашку со ртутью, стоящую на столе, так, что в положении равновесия центр шарика находится над поверхностью жидкости на высоте $0,6R$. Найти период малых колебаний шарика по вертикали. Плотности ртути ρ_{pm} и железа $\rho_{\text{ж}}$ известны.



Решение $\mapsto$ Если подвешенный на пружине жесткостью k железный шарик (плотностью $\rho_{\text{ж}}$) радиусом R частично погружен в широкую чашку с ртутью (плотностью ρ), стоящую на столе, то при колебаниях необходимо учитывать силу Архимеда. Однако стоит обратить внимание на то, что в данном случае нам необходимо знать объём погруженной части тела в жидкость, то есть в нашем случае объём шарового сегмента. Обозначим растяжение пружины при равновесии x_0 и отклонение от положения равновесия x.



Тогда объём шарового сегмента равен: $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{1}{3}h\right)$,

где R — радиус большого круга шара, h — высота шарового сегмента, равная $0,4R$ в положении равновесия (для более подробного ознакомления с этой формулой можете воспользоваться справочником по математике И.Н. Бронштейна и К.А. Семендаева).

В таком случае уравнение колебаний будет иметь вид: $mx'' = -k(x_0 + x) + \rho_{\text{ж}}(4/3)\pi R^3 g - \rho_{pm}(\pi/3)(h + x)^2(3R - h - x)g$.

При равновесии будем иметь: $0 = -kx_0 + \rho_{\text{ж}}(4/3)\pi R^3 g - \rho_{pm}(\pi/3)h^2(3R - h)g$. Подставляя в предыдущее уравнение, получаем: $mx'' = -kx - \rho_{pm}(\pi/3)[(3R - h)2 - h]hgx$ — уравнение гармонических колебаний.

Отсюда, подставляя $h = 0,4R$, определяем период колебаний: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4/3\rho_{\text{ж}}\pi R^3}{k + 0,64\pi\rho_{pm}gR^2}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4/3\rho_{\text{ж}}\pi R^3}{k + 0,64\pi\rho_{pm}gR^2}}$.

Замечание: Строго говоря, эта задача является некорректной. Дело в том, что когда подвешенный на пружине шарик частично погружается в чашку со ртутью, помимо силы Архимеда и силы тяжести, которые на него действуют, есть ещё воздействие со стороны жидкости, которая также независимо от шарика совершает колебания в чашке. Поэтому нужно рассматривать уже так называемую присоединенную массу. Однако возможно приближение, если считать, что размеры чашки много больше размеров шарика, в данном случае его диаметра, тогда колебанием жидкости по отношению к шарику можно пренебречь, они будут незначительно сказываться на конечном выражении для периода.

Задача №8 Тележка, на которой закреплен маятник, совершающий колебания с периодом 0,5 с, съезжает по наклонной плоскости, а затем движется по горизонтальному пути. Угол между наклонной плоскостью и горизонталью равен 45°. Каков период колебания маятника, когда:

а) тележка съезжает по наклонной плоскости;

б) движется по горизонтальному участку пути.

Считать, что тележка во время движения по наклонной плоскости и по горизонтальному пути не испытывает действия силы тяжести и что движения маятника не влияют на движение тележки (тележка тяжёлая, маятник лёгкий).

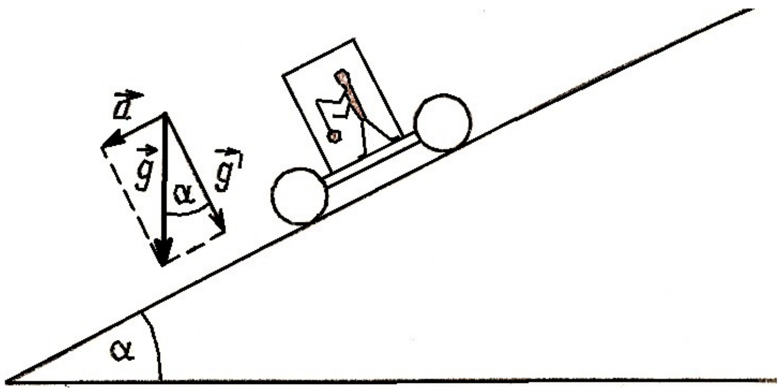
Решение $\mapsto$ Рассмотрим систему отсчёта, связанную с тележкой. Это неинерциальная система, поскольку тележка скатывается по наклонной плоскости с определённым ускорением, которое нетрудно вычислить, — это параллельная наклонной плоскости составляющая ускорения свободного падения см. рис.

$a = g \cdot \sin\alpha.$

Составляющую ускорения свободного падения, перпендикулярную к наклонной плоскости, обозначим через g', которое равно:

$g' = g\cos\alpha.$

В системе, связанной с тележкой, действуют два ускорения: ускорение свободного падения g, направленное вертикально вниз, и ускорение, обусловленное неинерциальностью системы, которое равно $-\overrightarrow{a}$ и направлено параллельно плоскости (в сторону ее вершины).



В результате для наблюдателя, находящегося на тележке, ускорение свободного падения равно:

$\overrightarrow{g} + (-\overrightarrow{a}).$

Легко видеть, что это ускорение имеет величину, равную g', и направлено перпендикулярно плоскости. Если бы наблюдатель на тележке находился в непрозрачной клетке, его наблюдения были бы такими же, как если бы он находился в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g', направленным к полу. В частности, маятник в состоянии равновесия был бы направлен к полу тележки, а значит, под углом 45° относительно вертикали наблюдателя, находящегося вне тележки и неподвижного относительно наклонной плоскости.

Как известно, период колебания математического маятника в ноле земного тяготения, создающего ускорение свободного падения g, находится по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Согласно приведённым выше рассуждениям, чтобы определить период колебания математического маятника длинной l, движущегося вместе с тележкой, следует g заменить на g'. Получаем $T' = 2\pi\sqrt{l}g'$.

Величины T, T' и α связаны между собой соотношением $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} = \dfrac{T}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

Подставив численные значения T и α, получим $T' = 0{,}6$ с.

При решении задачи принималось, что отсутствует трение между тележкой и наклонной плоскостью. При наличии трения ускорение тележки было бы меньше a. Тогда результирующее ускорение в системе, связанной с тележкой, было бы направлено не перпендикулярно полу тележки, а несколько отклонено в направлении ее движения. Кроме того, величина ускорения была бы больше g' (хотя, конечно, меньше g), а период колебаний был бы заключен между T и T'.

При решении предполагается, что тележка движется прямолинейно и равноускоренно. В действительности так должен двигаться центр масс системы тележка + маятник, а не сама тележка. При колебаниях маятника центр масс рассматриваемой системы перемещается относительно тележки. Это означает, что тележка, вообще говоря, перемещается не совсем так, как мы принимаем. Однако важно отметить, что если маятник обладает значительно меньшей массой, чем тележка, то перемещением центра масс системы относительно тележки можно пренебречь.

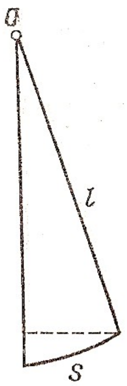
По горизонтальной части траектории тележка движется с постоянной скоростью (при условии, что масса маятника значительно меньше массы тележки). Система, связанная с тележкой, становится инерциальной системой — в ней не действуют силы инерции, и период колебания маятника будет таким же, как и на неподвижной тележке.

Ответ: $T' = 0{,}6$ с.

Задача №9 Математический маятник совершает гармонические колебания с малой амплитудой. Период колебания не зависит от амплитуды (колебания изохронны). Если амплитуда колебания математическою маятника не слишком мала, период зависит от амплитуды. Доказать, что и общем случае период колебания меняется монотонно в зависимости от амплитуды и что минимальный период соответствует амплитуде, близкой к нулю.

Примечание: при не столь малых колебаниях уравнение движения математического маятника не имеет решения в элементарных функциях. Поэтому попытки решить задачу аналитическим путем в этом случае обречены на неудачу. Следует найти другой способ решения. Целесообразнее соответствующим выбором единиц длины свести колебания с разными амплитудами к колебаниям, амплитуды которых выражаются одинаковыми числами.

Решение $\mapsto$ Согласно примечанию к условию задачи, чтобы упростить сравнение движений с различными амплитудами, можно преобразовать каждое из них в движение с амплитудой, например, равной 1, вводя для каждого движения свою единицу длины, равную амплитуде колебаний: s — отклонение, A — амплитуда, $x = s/A$ — отклонение в новых единицах длины A.



Очевидно, скорость изменения величины x равна скорости изменения отклонения s, деленной на A. Обозначим эту скорость буквой u, тогда имеем: $u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v}{A}$, где $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Пусть длина маятника равна l. Из закона сохранения энергии следует:

$\dfrac{mv^2}{2} + mgl(1-\cos(s/l)) = mgl(1-\cos A/l)$, или $v^2 = 2gl(\cos x\dfrac{A}{l} - \cos\dfrac{A}{l})$.

Значит, $u^2 = \dfrac{2gl}{A^2}\left(\cos x\dfrac{A}{l} - \cos\dfrac{A}{l}\right) = 4gl\dfrac{\sin\dfrac{A}{2l}(1+x)}{A}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{A}{2l}(1-x)}{A}$.

В результате замены переменных колебания разных амплитуд сводятся к движениям с амплитудой, численно равной 1. Сравнение периодов колебаний с разными A можно осуществить, сравнивая скорости u этих движений в соответствующих точках x. Если два движения происходят по одной и той же траектории, но скорость одного из них в каждой точке траектории больше, чем скорость другого в той же точке, то время, необходимое для прохождения одного и того же пути, меньше в случае первого движения. Очевидно, это условие является достаточным, но не необходимым. Однако условие $A_1 < A_2$ влечет за собой соотношение $u_1 > u_2$, а, значит, $T_1 < T_2$.

Чтобы доказать, что при $A_1 < A_2$ при одном и том же значении x, $u_1 > u_2$, следует доказать монотонность функции $u(x, A)$ при возрастании A при любом, но постоянном x. Величина u^2, согласно последнему уравнению, равна произведению двух функций вида $\dfrac{\sin Aa}{A}$ с различными неотрицательными величинами a. Следует отметить, что функция $\dfrac{\sin aA}{A}$ монотонно убывает при возрастании A от нуля до максимального значения, равного π/l (значение A не превышает π). Монотонность функции $\dfrac{\sin aA}{A}$ равнозначна монотонности функции $\dfrac{\sin y}{y}$, отличающейся от первой постоянным дополнительным множителем; $\dfrac{\sin y}{y}$ также монотонно убывает при $0 < y < \pi$, ибо это есть отношение хорды к дуге.

Ч.т.д.

Задача №10 На вершине достаточно высокой башни находится лифт, к потолку которого прикреплен один конец невесомой пружины длиной $l = 1$ м. К пружине подвешен груз массой $m = 1$ кг, что вызвало ее растяжение на величину $\triangle l = 9,81$ см. Лифт начинает падать с ускорением ($g = 9{,}81$ м/с^2) и падает в в течение $t = \pi$ с; затем включается тормоз, и лифт движется замедленно с ускорением $-\dfrac{1}{2}g$ до полной остановки. Определить движение груза на пружине относительно лифта. В частности, объяснить, что произойдет с ним сразу после начала торможения лифта. Как изменится ответ, если время падения лифта будет иным? Трением и сопротивлением воздуха при движении груза пренебречь.

Решение $\mapsto$ Обозначим коэффициент упругости пружины через k. Как известно, $k = \dfrac{F}{\triangle l}$, где F — сила, растягивающая пружину, а $\triangle l$ — удлинение пружины. В нашем случае: $k = \dfrac{mg}{\triangle l}$.

Вначале пружина с висящим на ней грузом находилась в состоянии равновесия. Длина пружины равнялась при этом $l + \triangle l$.

Что произойдет, если лифт начнет падать с ускорением $\frac{1}{2}g$? Тогда в системе, связанной с лифтом, любое тело получит дополнительное ускорение, равное $1/2g$ и направленное вверх. В связи с этим вес груза m в лифте будет равен не mg, а лишь $m(g - 1/2g) = 1/2mg$. Аналогичная ситуация будет и в случае, когда лифт замедляется с ускорением $1/2g$. При этом в системе, связанной с лифтом, каждое тело будет получать дополнительное ускорение, направленное вниз и равное $1/2g$, и эффективный вес груза массой m, находящегося в лифте, будет равен $m(g + 1/2g) = 3/2mg$.

Какую длину имела бы пружина в состоянии равновесия, если бы вместо силы mg ее растягивала сила $1/2mg$? Легко видеть, что ее длина была бы равна: $l' = l + \triangle l'$, где $\triangle l' = \frac{1/2mg}{k}$.

Подставив k, получаем $\triangle l' = \frac{1}{2}\triangle l$, а значит, $l' = l + \frac{1}{2}\triangle l$.

Аналогично в состоянии равновесия длина пружины, растягиваемой силой $3/2mg$, равна: $l'' = l + \frac{3}{2}\triangle l$.

Из приведённых рассуждений следует, что длина пружины в состоянии равновесия в различных фазах движения равна:

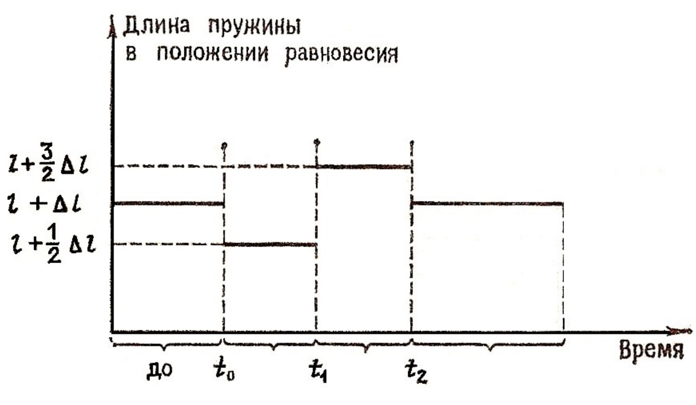
в покоящемся лифте $l + \triangle l$,

во время падения $l + \frac{1}{2}\triangle l$,

при торможении $l + \frac{3}{2}\triangle l$,

после остановки $l + \triangle l$.

Изменение положения равновесия в зависимости от времени показано на рисунке.



Как видим, положение равновесия изменяется скачкообразно в начале падения, в начале торможения и при остановке.

Сначала рассмотрим момент, когда лифт начинает падать с ускорением $\frac{1}{2}g$. До начала падения груз находился в состоянии равновесия.

Однако в первый момент падения это положение перестает быть положением равновесия — от нового положения равновесия груз теперь отдален на $\frac{1}{2}\triangle l$.

Как известно, груз, подвешенный на пружине и отклоненный от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

В рассматриваемом случае этот период равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\triangle l}} = 2\pi\sqrt{\triangle l/g}$.

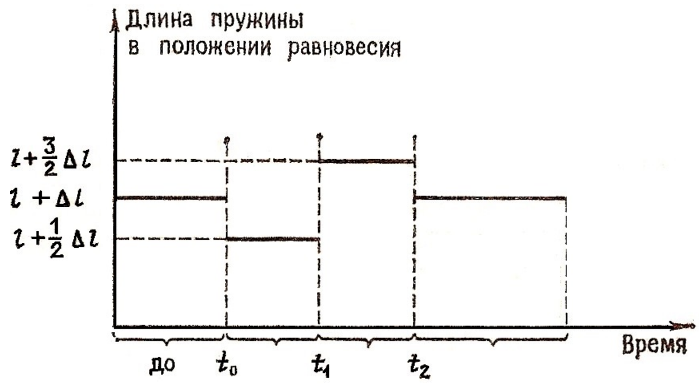
Подставив численные значения $\triangle l$ и g, получим $T = \frac{1}{5}\pi$ (секунд).

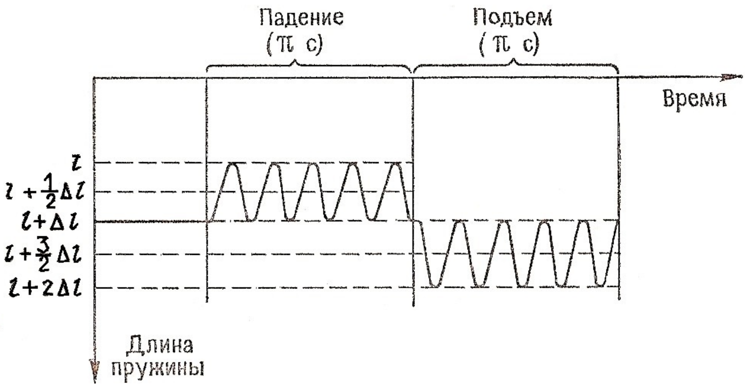
В течение π с (это время падения лифта с ускорением $1/2g$) груз совершит 5 полных колебаний и вернется в то же положение относительно лифта, что и в начале движения. Его скорость относительно лифта будет при этом равна нулю.

Теперь рассмотрим торможение. В момент включения тормоза положение равновесия груза вновь изменяется скачком. Длина пружины до начала торможения равна $l + \triangle l$. В положении равновесия при торможении длина пружины должна равняться $l + \dfrac{3}{2}\triangle l$. В момент начала торможения груз отклонен от нового положения равновесия на $\dfrac{1}{2}\triangle l$. Он будет совершать колебания, аналогичные рассмотренным выше. Период колебаний зависит только от m и k и будет, очевидно, таким же, как прежде.

Сколько полных колебаний совершит груз? Поскольку при торможении ускорение имеет такую же абсолютную величину, что и ускорение падения, а начальная и конечная скорости лифта после всех изменений вновь становятся такими же, как вначале, следует, что время торможения также равно π с. Читатель может убедиться в этом самостоятельно, сделав несложный расчет. Следовательно, за время торможения груз совершит 5 колебаний и в момент окончания торможения будет находиться в том же положении, в котором был до начала движения лифта. Но по окончании торможения положение равновесия вновь скачком возвращается к тому же состоянию, что и в самом начале. Это значит, что по окончании торможения груз находится в том же самом положении равновесия, что и до начала падения. Его скорость относительно лифта будет, очевидно, равна нулю.

В моменты начала падения и торможения лифта скорость груза относительно лифта равна нулю, так как груз отстоит от положения равновесия на $\dfrac{1}{2}\triangle l$. Отсюда следует, что амплитуда колебаний груза одинакова как во время падения, так и во время торможения лифта и равна $\dfrac{1}{2}\triangle l$. Описанные явления можно проиллюстрировать графиком. На рис. показано, как изменяется длина пружины со временем.





А теперь посмотрим, что произойдет, если лифт будет падать с ускорением $1/2g$ в течение времени τ, отличного от π. Примем $\tau < \pi$. Очевидно, приведенный выше способ нахождения положения равновесия остается верным и для этого случая. Как и прежде, во время падения груз совершает колебания. Амплитуда этих колебаний будет равна $1/2\triangle l$, а период $\pi/5$ с. Однако теперь груз не совершит целого числа полных колебаний. В момент торможения груз будет отклонен от положения равновесия больше, чем на $1/2\triangle l$, и его скорость будет отлична от нуля. Поэтому во время торможения груз будет совершать колебания с амплитудой, большей $1/2\triangle l$. Но период этих колебаний будет, как и прежде, $\pi/5$ с.

Торможение длится столько же, сколько и падение, и, следовательно, теперь груз совершит несколько меньше колебаний, чем прежде. В момент прекращения торможения пружина будет иметь длину, отличную от $l+\triangle l$, скорость груза относительно лифта будет отлична от нуля, и после окончания торможения груз будет совершать колебания около первоначального положения равновесия. Вычисление амплитуды конечных колебаний в зависимости от времени τ не существенно для понимания описанного явления.

Ответ: смотри решение.

Задача №11 На тонкой легкой нити подвешен грузик, под тяжестью которого нить удлинилась на $\triangle x_0 = 10$ см. Определить период малых вертикальных колебаний этого грузика после вывода его из вертикальных колебаний этого грузика после вывода его из положения равновесия, если известно, что сила, с которой нить действует на грузик, выражается формулой: $F = -k_1\triangle x - k_2(\triangle x)^3$, где $\triangle x$ — приращение длины нити, а коэффициенты k_1 и k_2 имеют значения: $k_1 = 294$ Н/м, $k_2 = 9800$ Н/м^3. Как изменится период колебаний, если изменить массу грузика?

Решение $\mapsto$ Введём величину ξ, характеризующую отклонение грузика от положения равновесия: $\triangle x = \triangle x_0 + \xi$.

На грузик действуют сила тяжести и сила упругости. Равнодействующая этих сил равна $F = mg - k_1(\triangle x_0+\xi) - k_2(\triangle x_0+\xi)^3 = mgk_1\triangle x_0 - k_2(\triangle x_0)^3 - [k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]\xi - 3k_2\triangle x_0\xi^2 - k_2\xi^3$.

Так как по условию задачи нас интересуют малые колебания, то $\xi \ll 1$, поэтому членами, содержащими ξ^2 и ξ^3, можно пренебречь. Для состояния равновесия имеем $mg = k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3$, значит, силу $F = -[k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]\xi$.

Движение, совершаемое под действием такой силы, является гармоническим. Частота гармонических колебаний удовлетворяет условию $\omega^2 = -(F/m)$, период равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+3k_2(\triangle x_0)^2}}$, где m — масса тела, которая явно не задана, но её нетрудно определить из условия равновесия, рассмотренного выше. Имеем $m = \dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g}$.

Окончательно выражение для периода принимает вид: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g[k_1+3k_2(\triangle x_0)^2]}}$.

Подставив в это выражение численные значения величин, получаем $T = 0.52$ с.

Определим зависимость периода от массы грузика. Прежде всего отметим, что с увеличением массы $\triangle x_0$ возрастает (в состоянии равновесия).

Теперь найдём, каким образом период T зависит от $\triangle x_0$. После несложных вычислений получим
$$\frac{dT}{d(\triangle x_0)} = \frac{\pi}{gT}\frac{k_1^2 + 3k_2^2(\triangle x_0)^4}{[k_1+3k_2(\triangle x_0)^2]^2} > 0.$$

Это означает, что T также возрастает с увеличением $\triangle x_0$. А поскольку $\triangle x_0$ является возрастающей функцией массы, то и период также возрастает с увеличением массы.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g[k_1+3k_2(\triangle x_0)^2]}}$.

Задача №12 Ньютон доказал, что на тела, расположенные внутри однородной сферы, последняя не оказывает гравитационного воздействия. Однако такая сфера, последняя не оказывает гравитационного воздействия. Однако такая сфера воздействует на тела, расположенные вне её, причём так, как если бы воздействует на тела, расположенные вне её, причём так, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в её геометрическом центре.

Представьте себе шахту, проходящую сквозь земной шар вдоль оси его вращения. Считаем, что Земля — однородный шар и что при решении можно пренебречь трением, сопротивлением воздуха и т.д.

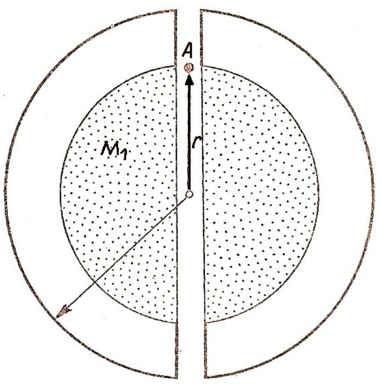
а) Как будет двигаться тело, свободно брошенное в шахту с поверхности Земли? Вывод подтвердить расчетом.

б) С какой начальной скоростью следует бросить тело из центра Земли, чтобы оно достигло её поверхности?

в) Предположим, что вблизи поверхности Земли вдоль меридиана проходит орбита спутника. Тело свободно брошено в шахту в момент, когда спутник пролетал над шахтой. Что раньше достигнет противоположного отверстия шахты: спутник или брошенное тело?

г) Существенно ли то, что шахта проходит вдоль оси вращения Земли?

Решение $\mapsto$ Согласно данным задачи, на тело, находящееся в точке A, отстоящей на расстоянии r от центра шара O, действует гравитационная сила только со стороны части шара M_1. Незаштрихованная часть часть шара не оказывает воздействия на тело.



Обозначим массу тела через m. Однородный шар массой M_1 воздействует на тело, находящееся вне его, так, как если бы он был материальной точкой с массой M_1, помещенной в геометрический центр шара. То есть на тело, находящееся в точке A, действует сила $\overrightarrow{F} = -G\dfrac{mM_1}{r^2}\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$, где G — гравитационная постоянная. Знак минус означает, что сила $\overrightarrow{F}$ направлена противоположно вектору $\overrightarrow{r}$. Так как в нашем случае мы рассматриваем Землю как однородный материальный шар, имеющий массу M и радиус R, то можем записать $\dfrac{M_1}{M} = \dfrac{r^3}{R}$.
Это равенство выражает тот факт, что массы M_1 и M пропорциональны соответственно объёму заштрихованной на рисунке части шара и объёму Земли, которые, в свою очередь, пропорциональны кубам радиусов r и R.

Отсюда получаем $M_1 = \dfrac{M}{R^3}r^3$. Подставим это выражение в уравнение силы, тогда $\overrightarrow{F} = -\dfrac{GmM}{R^3}\overrightarrow{r}$.

Как видим, сила, действующая на тело в шахте, направлена к центру Земли. Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания относительно центра Земли. Определим период этих колебаний. Поскольку $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{r}$ направлены вдоль шахты, можно записать $F = -\dfrac{GmM}{R^3}r$.

Тогда ускорение тела $a = F/m$ равно $a = -\dfrac{GM}{R^3}r$, но при гармоническом движении выполняется зависимость $a = -\omega^2 r = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 r$, где T — период колебаний. Значит, $\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \dfrac{GM}{R^3}$ и $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$.

Сравним этот период с периодом обращения вокруг Земли спутника, движущегося вблизи её поверхности. Центростремительная сила, определяющая траекторию спутника, — это сила гравитационного воздействия Земли. Следовательно, выполняется зависимость $\dfrac{mv^2}{R} = G\dfrac{mM}{R^2}$, где m —

масса спутника, R — радиус Земли и вместе с тем радиус орбиты спутника, v — скорость спутника, равная $2\pi R/T$, T — период обращения спутника вокруг Земли. После коротких преобразований получаем $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$.

Видим, что период обращения спутника и период колебаний тела в шахте одинаковы. Случаен ли этот результат или это следствие каких-то фундаментальных физических законов?

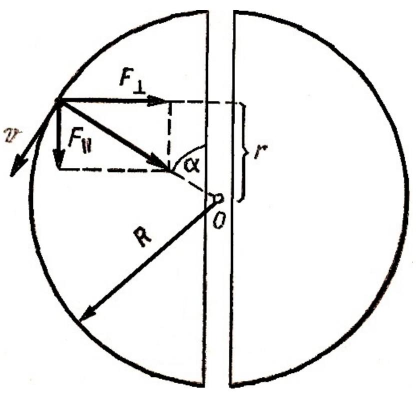
Да, полученный выше результат не случаен. К нему можно было бы прийти на основании закона независимости движения. Закон этот утверждает, что движение в данном направлении совершается только под действием той составляющей силы, которая направлена таким же образом, независимо от того, каковы остальные её составляющие. Этот закон обусловлен векторным характером таких параметров, как сила, положение, ускорение, входящих во второй закон механики, тогда как масса является скалярной величиной.

Рассмотрим спутник, движущийся вблизи поверхности Земли. Сила гравитационного притяжения, действующая на спутник, равна $\overrightarrow{F_{гр}} = -\dfrac{GmM}{R^2}\dfrac{\overrightarrow{R}}{R}$.

Будем считать, что эта сила имеет две составляющие: параллельную и перпендикулярную к шахте — и рассмотрим её параллельную составляющую $F_{\parallel} = -\dfrac{GmM}{R^2}\cos\alpha = -\dfrac{GmM}{R^2}\dfrac{r}{R}$.

Движение спутника в направлении, параллельном шахте, совершается только под действием этой силы. Ускорение этого движения, или проекция ускорения спутника на «ось» шахты, равно: $a_{\parallel} = -\dfrac{GM}{R^3}r$.

Видим, что проекция ускорения спутника на направление шахты и ускорение тела в шахте a выражаются одинаковыми формулами. Обе эти формулы можно записать одним и тем же дифференциальным уравнением $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{GM}{R^3}r$, поскольку $a = \dfrac{d^2r}{dt^2}$ и $a_{\parallel} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$.



Это уравнение описывает как движение тела в шахте, так и проекцию движения спутника на ось шахты. Мы употребили здесь слово «описывает», а не «определяет», поскольку это уравнение не позволяет ещё однозначно определить положение тела в любой момент времени $r(t)$, или, что то же самое, однозначно определить движение. Чтобы движение, то есть функция $r(t)$, было определено, кроме самого уравнения необходимо знать ещё и начальные условия, например положение и скорость тела в момент $t = 0$.

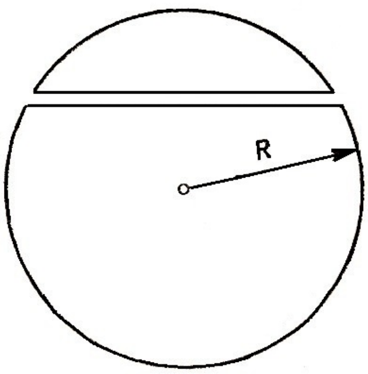
Согласно сказанному выше, если в начальный момент положение проекции спутника и положение тела в шахте будут одинаковыми и если одинаковыми будут скорость тела в шахте и проекция скорости спутника на направление шахты, то из условия одинаковых уравнений движения зависимость $r(t)$ для обоих объектов будет одинакова.

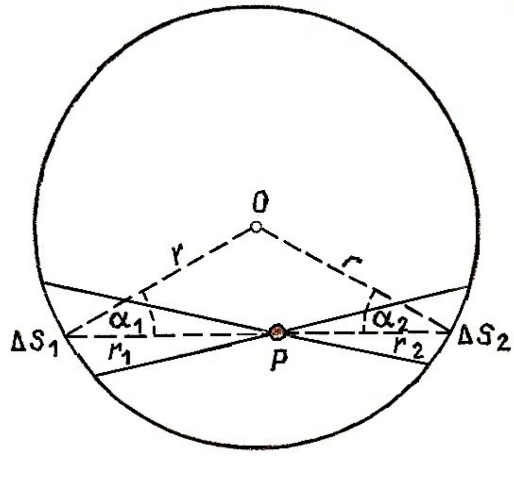
Следовательно, если в начальный момент спутник будет пролетать над входом шахты, в которую в этот момент будет брошено тело с нулевой начальной скоростью, то положение тела и проекция спутника будут определяться одинаковыми функциями времени. Оба эти объекта будут двигаться одинаково и одновременно достигнут противоположного отверстия шахты. Очевидно, что период обоих движений будет одинаков. Отсюда явствует, что в момент, когда тело проходит через центр шахты, его скорость равна скорости спутника. Значит, чтобы тело достигло поверхности Земли, его скорость в центре шахты должна равняться первой космической скорости, или скорости спутника, летящего вблизи поверхности Земли. Эта скорость примерно равна 7,9 км/с.

Таким образом, практически без расчетов мы получили ответы на вопросы (б) и (в), поставленные в условии задачи. Ответ на вопрос (а) был получен ранее. Теперь попытаемся ответить на вопрос (г). Если бы направление шахты не совпадало с направлением оси вращения Земли, то на тело в шахте помимо гравитационной силы действовала бы еще сила инерции: центробежная сила и сила Кориолиса. Влияние центробежной силы читатель без труда может определить сам. Сила Кориолиса не изучается в школьной программе, поэтому мы не будем ее рассматривать.

До сих пор мы рассматривали шахту, проходящую через центр Земли. Теперь представим себе, что в неподвижной (чтобы не принимать во внимание силы инерции) однородной Земле пробита шахта так, как показано на рисунке. Допустим, что движение тела в шахте происходит без трения. Интересно, что периоды движения тела в такой шахте и в шахте, проходящей через центр Земли, одинаковы. Доказательство этого факта не должно вызвать у читателя никаких затруднений. Итак, если бы мы построили туннель, соединяющий два пункта на поверхности Земли и пустили бы вагонетки, которые могли бы перемещаться в этом туннеле свободно и без трения, то время перемещения вагонетки из одного пункта в другой было бы равно половине периода обращения спутника (около 45мин). Интересный факт! Жаль, что нет технической возможности построить подобный туннель.

Покажем теперь, что сферическая однородная оболочка не притягивает тело, помещенное внутри нее.



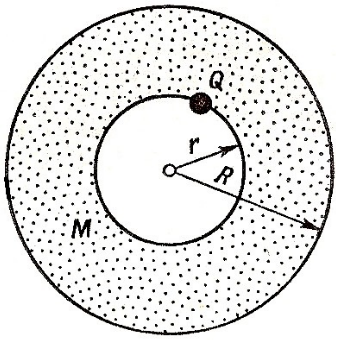


На рис. изображена такая сферическая материальная оболочка. Обозначенные здесь телесные углы с общими вершинами в точке P составляют $\triangle\Omega$ каждый. Расстояние точки P от поверхности, измеренное вдоль оси телесных углов, равно r_1 и r_2. Имеем: $\triangle S_1 = \dfrac{\triangle\Omega}{\cos\alpha_1} r_1^2$ и $\triangle S_2 = \dfrac{\triangle\Omega}{\cos\alpha_2} r_2^2$.

Массы элементарных поверхностей $\triangle S_1$ и $\triangle S_2$ равны $\triangle m_1 = \sigma\triangle S_1$ и $\triangle m_2 = \sigma\triangle S_2$, где σ — масса, приходящаяся на единицу поверхности. Если в точке P поместить точечную массу m, то массы $\triangle m_1$ и $\triangle m_2$ будут воздействовать на массу m с силами $\triangle F_1 = \dfrac{Gm\sigma\triangle S_1}{r_1^2}$ и $\triangle F_2 = \dfrac{Gm\sigma\triangle S_2}{r_2^2}$, где G — гравитационная постоянная.

Эти силы противоположно направлены, но равны по абсолютной величине: $\triangle S_1/r_1^2 = \triangle S_2/r_2^2$, так как $\alpha_1 = \alpha_2$.

Равнодействующая сил $\triangle\overrightarrow{F_1}$ и $\triangle\overrightarrow{F_2}$ равна нулю. Такое же рассуждение можно провести для каждой пары одинаковых малых телесных углов с общими вершинами в точке P. Отсюда следует, что полная сила, действующая на тело массой m, помещенное в точке P, равна нулю. Это относится, очевидно, и к любой точке внутри рассматриваемой шаровой поверхности. Следовательно, внутри однородной материальной шаровой поверхности гравитационное поле отсутствует.



Рассмотрим теперь точку Q, находящуюся на расстоянии r от центра однородного материального шара радиуса $R (r < R)$ и массой M (см. рис.).

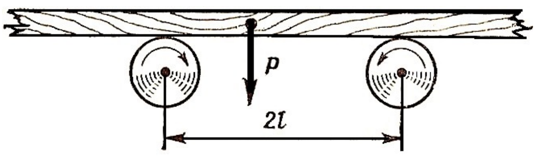
Согласно сказанному выше, гравитационное поле от заштрихованной части шара равно нулю, поскольку эту часть можно считать системой концентрических материальных оболочек, а гравитационное воздействие каждой из таких оболочек равно нулю.

Следовательно, на материальную точку, находящуюся в точке Q, действует гравитационная сила только со стороны незаштрихованной части шара.

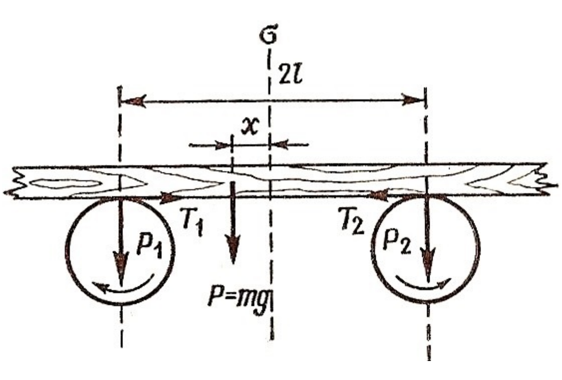
Таким образом, доказано предположение, сделанное в условии задачи. Нетрудно заметить, что наше доказательство имеет общий характер, и его можно применить не только в случае гравитационного взаимодействия, но и для других взаимодействий, убывающих пропорционально квадрату расстояния, например для электростатических взаимодействий. В случае электростатического взаимодействия это означает, что внутри равномерно заряженной шаровой поверхности нет электрического поля.

Ответ: смотри решение.

Задача №13 Два параллельных одинаковых валика вращаются с равными скоростями в направлениях, показанных на рисунке. На валики горизонтально положена доска весом P, центр которой несколько смещен относительно середины расстояния между валиками. Расстояние между осями валиков равно $2l$. Коэффициент трения между валиками и доской равен f. Как движется доска? Вывод обосновать вычислениями.



Решение $\mapsto$ Сначала рассмотрим случай, когда доска положена так, что её центр тяжести находится в плоскости σ, равноудаленной от валиков. В этом случае давление на оба валика одинаково, а силы трения в точках соприкосновения равны по величине, но противоположно направлены, следовательно горизонтальная результирующая сил, действующих на доску, равна нулю, то есть рассматриваемое положение является положением равновесия доски.



Предположим теперь, что центр тяжести доски смещен относительно плоскости σ на некоторое расстояние x.

Определим вертикальные силы, действующие на валики со стороны доски: $P_1 + P_2 = mg$ (сумма моментов сил P_1 и P_2 должна быть равна нулю; для удобства мы рассматриваем моменты относительно центра тяжести доски).

Решая полученную систему уравнений, находим $P_1 = mg\dfrac{l+x}{2l}$, $P_2 = mg\dfrac{l-x}{2l}$.

Доска всё время скользит по валикам. Значит, силы T_1 и T_2, действующие на доску, есть силы трения скольжения. Они равны произведению коэффициента трения f на давление валиков на доску, которое численно равны P_1 и P_2 (по 3-ему закону Ньютона), давление валиков на доску равно соответственно $-P_1$ и $-P_2$. Следовательно, имеем: $T_1 = fP_1 = fmg\dfrac{l+x}{2l}$. $T_2 = fP_2 = fmg\dfrac{l-x}{2l}$.

В горизонтальном направлении на доску действует сила $F = T_2 - T_1 = -\dfrac{fmg}{l}x$.

Эта сила направлена к плоскости σ и пропорциональна отклонению доски от положения равновесия, следовательно, доска будет совершать гармонические колебания. Ускорение доски в горизонтальном направлении равно $a = \dfrac{F}{M} = -\dfrac{fg}{l}x$.

При гармоническом движении выполняется равенство $a = -\omega^2 x$, где $\omega = 2\pi/T$. Значит, $\dfrac{fg}{l} = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$. Период колебаний доски равен $T = 2\pi\sqrt{l/fg}$.

Важно отметить, что период не зависит от веса доски и угловых скоростей валиков. Угловые скорости валиков могут быть разными и даже меняться во времени. Важно лишь, чтобы направление вращения валиков было таким, как показано на рисунке, в противном случае не выполнялось бы условие изменения знака сил трения, как это имеет место в рассматриваемой задаче.

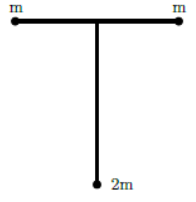
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/fg}$.

Упражнения.

1) На гладкой поверхности, имеющей угол наклона α к горизонту, находится подвес, к которому прикреплена пружина жёсткостью k, к нижнему концу пружины прикреплён груз массой m. Груз отводят немного вниз и отпускают. Найдите период малых колебаний груза на пружине.

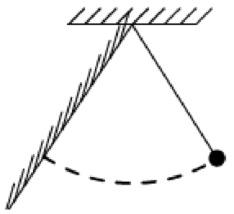
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{g}}$.

2) Два небольших шарика массами m каждый соединены жестким лёгким стержнем длиной $2L$. К середине первого стержня прочно прикреплён конец точно такого же стержня, расположенного перпендикулярно первому. К концу второго стержня прикреплен еще один шарик массой $2m$. Вся система расположена в вертикальной плоскости и может совершать в этой плоскости колебания относительно точки соединения стержней. Определить период малых колебаний этой системы.

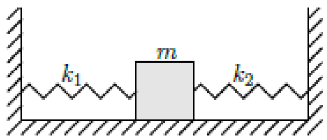


Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5l}{2g}}$.

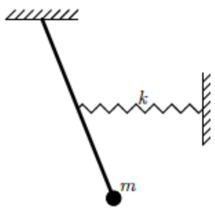
3) К стене, наклоненной к вертикали под небольшим углом α, прикреплен один конец нерастяжимой нити длиной l. На другом конце нити прикреплен маленький шарик массой m. Шарик отводят немного в сторону, так, что натянутая нить образует угол β ($\beta > \alpha$) с вертикалью и опускают. Определите период колебаний шарика, считая его столкновения со стеной абсолютно упругими, а время столкновения пренебрежимо малым.



4) Найти период малых колебаний механической системы, состоящей из двух невесомых пружин с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 и груза массой m. Трение не учитывать. В положении равновесия пружины не деформированы.



5) Определить период малых колебаний системы, состоящей из невесомого жесткого стержня длиной l, на конце которого закреплена точечная масса m, а середина стержня прикреплена к стене при помощи пружины жесткостью k. Трение в креплениях и о воздух не учитывать. Считать, что колебания происходят в вертикальной плоскости.



Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{mg}{4mg + kl}}$.

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[6] Г.Я. Мякишев, физика 10 класс, механика.