Московский физико-технический институт

Сложные механические конструкции с использованием блоков и тросов.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

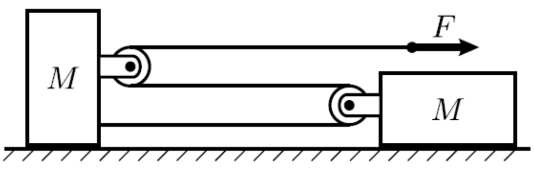
Москва 2014

Введение.

В этой статье мы рассмотрим способы описания процессов, происходящих в механических системах, содержащих блоки и другие специальные инструменты. Основными принципами, которыми мы будем здесь довольствоваться, это: законы сохранения (энергии, импульса и момента импульса), а также использовать свойства некоторых частей этих систем, таких как, например, не растяжимость и невесомость нити (троса). Задачи на данную тему бывают порой достаточно трудными, но вполне решаемыми, как и всегда в решении задачи будет лежать некая одна идея, до которой нужно догадаться, всё остальное — это как правило уже математический аппарат формального решения. Например, когда в задаче нас будут спрашивать об ускорении того или иного блока или груза, то как правило можно ввести прямоугольную систему координат с соответствующими координатами блоков и грузов, далее записать выражение для длины нити и уже из условия того, что она нерастяжима и невесома, получить все необходимые кинематические соотношения, путём обычного дифференцирования полученного выражения. В некоторых ситуациях описание может стать более сложным, например, когда дополнительно потребовать весомость блока, в этом случае, затрачиваемая энергия при подъёме грузов или блоков, может пойти на их вращение, и вот здесь уже надо будет учесть момент инерции соответствующих блоков. Ещё иногда бывает полезным рассматривать не всю систему или отдельную её часть, а лишь малый элемент (бесконечно малый) троса, например в случае когда требуется определить скорость его движения или его прокрутки через блок, при этом траектория движения троса может быть достаточно сложной.

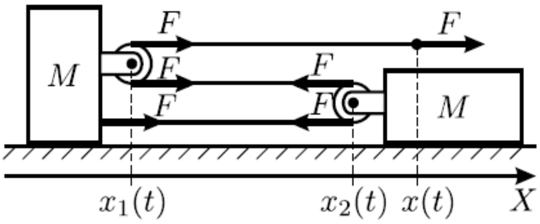
Примеры.

Задача №1 В системе, изображённой на рисунке, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нить невесомая и нерастяжимая, не лежащие на блоках участки нити горизонтальны. Массы грузов, лежащих на горизонтальной плоскости, одинаковы и равны M. Нить тянут за свободный конец в горизонтальном направлении с силой F. С каким ускорением движется конец нити, к которому приложена эта сила? Трения нет, движение грузов считайте поступательным.



Решение $\rightarrow$

Поскольку нить и блоки невесомые и трения нет, то на левый груз в горизонтальном направлении действует сила, равная $3F$ и направленная слева направо, а на правый груз — сила $2F$, направленная справа налево. Направим ось X неподвижной системы координат направо. Тогда проекция ускорения левого груза на ось X будет, очевидно, равна $a_1 = 3F/M$, а проекция ускорения правого груза $a_2 = -2F/M$.

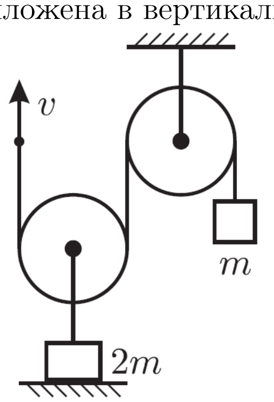


Найдём, как связаны друг с другом ускорения грузов и конца нити, то есть получим уравнение кинематической связи. Для этого обозначим координату оси левого блока в некоторый момент времени t через $x_1(t)$, координату оси правого блока — через $x_2(t)$, а координату конца нити через $x(t)$. Пусть длина нити равна L, радиусы блоков — r, расстояние от оси левого блока до левого груза — x_0. Так как нить нерастяжима, то можно выразить её постоянную длину L через введённые координаты: $x(t) = x_1(t)+\pi r+x_2(t)-x_1(t)+\pi r+x_2(t)-x_1(t)+x_0 = L$, отсюда $x(t) = 3x_1(t)-2x_2(t)+L-2\pi r-x_0$, такое же соотношение справедливо также и для момента времени $t + \triangle t$, близкого к моменту t: $x(t + \triangle t) = 3x_1(t + \triangle t) - 2x_2(t + \triangle t) + L - 2\pi r - x_0$. Вычитая из второго соотношения первое, найдём связь между перемещениями левого и правого грузов $\triangle x_1$ и $\triangle x_2$ и смещением конца нити $\triangle x$: $\triangle x = 3\triangle x_1 - 2\triangle x_2$. Деля полученное уравнение на величину промежутка времени $\triangle t$, найдём связь между скоростями грузов и конца нити: $v = 3v_1 - 2v_2$. Это соотношение также справедливо для любых двух близких моментов времени. Поэтому связь между ускорениями грузов может быть найдена аналогично и имеет вид: $a = 3a_1 - 2a_2$. Следует отметить, что ускорение правого груза a_2 направлено влево, против оси X, и поэтому отрицательно. Таким образом, из нерастяжимости нити следует, что ускорение, с которым движется конец нити, складывается из утроенной величины ускорения левого груза и удвоенной величины ускорения правого груза:

$$a = 3a_1 - 2a_2 = 3 \cdot \frac{3F}{M} - 2 \cdot \left(-\frac{2F}{M}\right) = \frac{13F}{M}.$$

Ответ: $a = \dfrac{13F}{M}$.

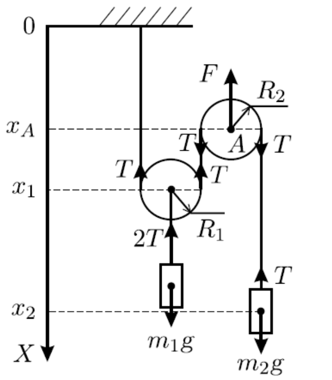
Задача №2 В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трение отсутствует. Массы грузов равны m_1 и m_2. Найдите ускорение оси блока A, к которой приложена в вертикальном направлении сила F. Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке крепления нити к потолку, направим координатную ось X вниз и запишем уравнения движения грузов m_1, m_2 и блока A в проекциях на эту ось. Учтём при этом, что ввиду невесомости нити и блоков сила натяжения T по всей её длине одинакова.

$m_1a_1 = m_1g - 2T$; $m_2a_2 = m_2g - T$; $F = 2T$



Здесь a_1 и a_2 — ускорения грузов m_1 и m_2 соответственно. Для того, чтобы решить данную систему, необходимо получить уравнение, связывающее эти ускорения — уравнение кинематической связи. Это можно сделать, воспользовавшись нерастяжимостью нити. Обозначим координаты оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока через x_1, x_2 и x_A соответственно. Тогда длина нити L выразится следующим образом: $L = x_1 + \pi R_1 + (x_1 - x_A) + \pi R_2 + (x_2 - x_A)$. Отметим, что радиусы нижнего и верхнего блоков R_1 и R_2 являются постоянными величинами. Данное соотношение справедливо для любого момента времени. Пусть за малый промежуток времени $\triangle t$ координаты оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока изменились и стали равны x_1', x_2' и x_A' соответственно. Тогда можно записать: $L = x_1' + \pi R_1 + (x_1' - x_A') + \pi R_2 + (x_2' - x_A')$. Вычитая друг из друга два последних уравнения, деля разность на $\triangle t$ и учитывая, что отношение $(x' - x)/\triangle t$ представляет собой скорость, найдём связь между скоростями оси нижнего блока, груза m_2 и оси верхнего блока: $2v_1 + v_2 = 2v_A$. Рассматривая аналогичным образом малые изменения скоростей за время $\triangle t$, можно убедиться, что ускорения a_1 и a_2 и a_A связаны аналогичным соотношением: $2a_1 + a_2 = 2a_A$. Это и есть уравнение кинематической связи. Решая уравнения движения с учётом полученного уравнения кинематической связи, найдём ускорение оси верхнего блока:

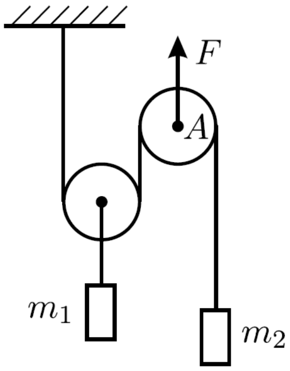
$$a_A = \tfrac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1m_2}F.$$

Отметим, что при некоторых соотношениях величин m_1, m_2 и F (в частности, при очень малых F) ускорение точки A может быть больше ускорения свободного падения g. Это связано с тем, что блок невесом, и на него действуют силы F и $2T$, равные в сумме нулю, так что его ускорение может быть как меньше, так и больше g.

Ответ: $a_A = \tfrac{3}{2}g - \dfrac{m_1 + 4m_2}{4m_1m_2}F$.

Задача №3 В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз m висит неподвижно, а груз $2m$ касается пола. Затем конец нити начинают тянуть

вверх с постоянной скоростью v. Как при этом будут двигаться оба груза? Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

Из условия задачи следует, что сила натяжения нити F везде вдоль нити одна и та же. До начала движения, очевидно, эта сила равна $F_0 = mg$, а груз $2m$ не давит на пол. В начале движения сила увеличивается на некоторую величину $\triangle F$ на короткое время $\triangle t$, за счёт чего грузы начинают двигаться вверх со скоростями v_1 и v_2.

По закону изменения импульса можно записать:

$\triangle F \cdot \triangle t = mv_1$ и $2 \triangle F \cdot \triangle t = 2mv_2$, откуда следует, что $v_1 = v_2$.

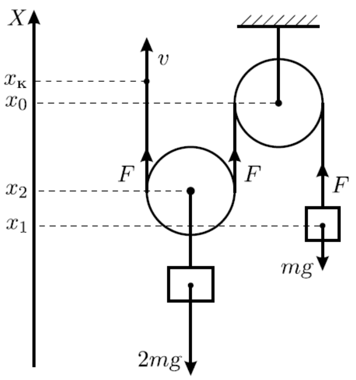
В дальнейшем эти скорости будут оставаться постоянными, а сила натяжения снова станет равной $F_0 = mg$. Поскольку конец нити вытягивают со скоростью v, а длина нити L, можно записать для двух моментов времени выражение для длины нити через координаты блоков и грузов

$$x_к - x_2 + x_0 - x_2 + x_0 - x_1 + 2\pi R = L;$$

$$(x_к + vt) - (x_2 + v_1 t) + x_0 - (x_2 + v_1 t) + x_0 - (x_1 + v_1 t) + 2\pi R = L \ \ (1).$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $vt - 3v_1 t = 0$, или $v_1 = v_2 = v/3$.

Задача может быть решена и другим способом, путём рассмотрения уравнений движения грузов на этапе их разгона от состояния покоя до конечной скорости. Обозначая ускорения грузов m и $2m$ через a_1 и a_2 соответственно, получаем уравнения движения: $F - mg = ma_1$; $2F - 2mg = 2ma_2$. Отсюда $a_1 = a_2$.

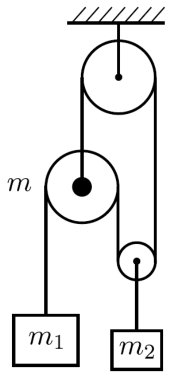


Из уравнения кинематической связи (1) следует, что $x_к - 2x_2 - x_1 = const$, следовательно, в каждый момент времени скорости грузов $v_1(t), v2(t)$ и конца нити $v_к(t)$ связаны соотношением $v_к(t) =$

$2v_2(t) + v_1(t)$, а связь соответствующих ускорений имеет вид: $a_к = 2a_2 + a_1$. С учётом равенства ускорений грузов получаем $a_1 = a_2 = a_к = 3$. Поскольку ускорения грузов в каждый момент времени одинаковы, а в начальный момент времени грузы покоятся, то скорости, которые приобретут грузы, также будут одинаковы и равны $v_1 = v_2 = v/3$.

Ответ: $v_1 = v_2 = v/3$.

Задача №4 В системе, показанной на рисунке, отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Найдите ускорение груза массой m_2, подвешенного на нити к лёгкой оси подвижного блока. Масса оси другого подвижного блока равна m, масса первого груза равна m_1. Трением и массой всех блоков пренебречь. Все нити невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения равно g.



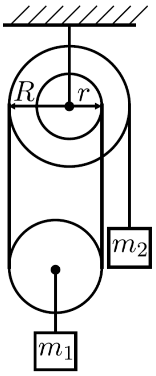
Решение →

Направим координатную ось X вертикально вниз. Тогда, если координаты тяжёлой оси блока, первого груза и второго груза равны x, x_1 и x_2 соответственно, условие нерастяжимости нити имеет вид: $x_1 + 2x_2 - x = L = const$. Это соотношение справедливо для любых двух близких моментов времени t и $t + \triangle t$, откуда следует связь изменений координат за время $\triangle t$: $\triangle x_1 + 2 \triangle x_2 - \triangle x = 0$. Деля полученное уравнение на $\triangle t$, находим связь скоростей грузов и блока: $v_1 + 2v_2 - v = 0$. Повторяя описанную процедуру, получаем соотношение, связывающее проекции ускорений первого груза, второго груза и тяжёлой оси блока на ось X: $a_1 + 2a_2 - a = 0$. Обозначим через T силу натяжения нити, прикреплённой к первому грузу и тяжёлой оси блока (сила натяжения постоянна вдоль нити, так как нить невесома). Тогда уравнения движения грузов и оси блока, спроецированные на координатную ось X, имеют вид: $m_1a_1 = m_1g - T; m_2a_2 = m_2g - 2T; ma = mg + T$.

Решая совместно четыре последних уравнения, получаем: $a_2 = \dfrac{(m + m_1)m_2}{m(4m_1 + m_2) + m_1m_2}g$

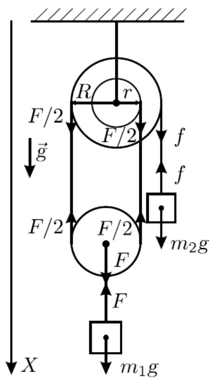
Ответ: $a_2 = \dfrac{(m + m_1)m_2}{m(4m_1 + m_2) + m_1m_2}g$.

Задача №5 Найдите ускорение груза массой m_1 в системе, изображённой на рисунке. Блоки невесомы, нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по верхнему двухступенчатому блоку с радиусами r и R. Один конец нити закреплён на этом блоке, к другому концу прикреплён груз массой m_2. Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны, трение в осях блоков и о воздух отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

Обозначим силу натяжения подвеса, на котором закреплён груз m_1, через F. Тогда сила натяжения нити на вертикальных участках по обе стороны от нижнего блока равна $F = 2$ — из-за невесомости этого блока и нити, а также из-за отсутствия трения в оси блока и о воздух. Силу натяжения нити, действующую на подвешенный к ней груз m_2, обозначим через f. Так как двухступенчатый блок невесом и трение в его оси и о воздух отсутствует, то сумма моментов сил натяжения нити, действующих на него, равна нулю: $\frac{F}{2}R = \frac{F}{2}r + fR$. Отсюда $f = \frac{R-r}{2R}F$.



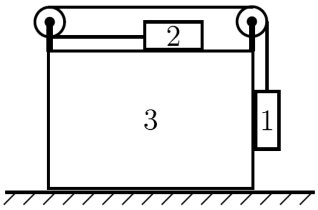
Поскольку система из таких блоков не даёт выигрыша в работе, то при смещении нижнего груза на расстояние $\triangle x_1$, например, вниз, верхний груз сместится на расстояние $\triangle x_2$ вверх, и будет справедливо соотношение: $F \triangle x_1 + f \triangle x_2 = 0$. Отсюда, с учётом найденной связи сил F и f, получаем: $\triangle x_1 + \frac{R-r}{2R} \triangle x_2 = 0$. Таким образом, связь проекций a_1 и a_2 ускорений грузов на вертикальную ось (уравнение кинематической связи) имеет вид: $a_1 + \frac{R-r}{2R}a_2 = 0$. Запишем уравнения движения грузов в проекциях на ту же ось: $m_1a_1 = m_1g - F; m_2a_2 = m_2g - f$.

Для решения получившейся системы подставим во второе уравнение выражения для a_2 и f: $m_1a_1 = m_1g - F; -m_2\frac{2Ra_1}{R-r} = m_2g - \frac{R-r}{2R}F$. Умножим второе уравнение на $-\frac{2R}{R-r}$ и сложим результат с первым уравнением. В итоге получим: $a_1\left(m_1 + m_2\left(\frac{2R}{R-r}\right)^2\right) = m_1g - m_2g \cdot \frac{2R}{R-r}$.

Отсюда $a_1 = \dfrac{m_1 - m_2 \cdot \dfrac{2R}{R-r}}{m_1 + m_2\left(\dfrac{2R}{R-r}\right)^2} \cdot g = \dfrac{(m_1(R-r) - 2m_2R) \cdot (R-r)}{m_1(R-r)^2 + 4m_2R^2}g.$

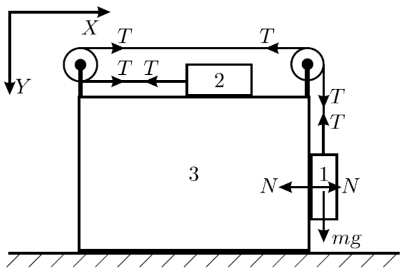
Ответ: $a_1 = \dfrac{(m_1(R-r) - 2m_2R)\cdot(R-r)}{m_1(R-r)^2 + 4m_2R^2}g.$

Задача №6 Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Горизонтальная плоскость гладкая, трения между грузами нет, нить и блоки невесомы, нить нерастяжима, массы всех трёх грузов одинаковы. В начальный момент все тела покоятся. Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

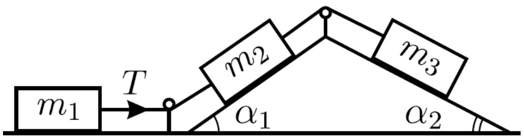
Введём неподвижную систему координат, как показано на рисунке. Обозначим силу натяжения нити через T (она постоянна вдоль всей длины нити, так как нить и блоки невесомы и трения нет), а силу нормального давления груза 3 на груз 1 через N.



Центр масс системы грузов остаётся на месте. Поэтому при движении системы груз 2 смещается влево, а груз 3 вместе с грузом 1 — вправо, причём груз 1 смещается ещё и вниз. Отсюда следует, что смещения грузов 1 и 3 по горизонтали одинаковы: $\triangle x_1 = \triangle x_3$. Из нерастяжимости нити следует, что смещение груза 1 по вертикали равно по величине и противоположно по знаку смещению груза 2 относительно груза 3 в горизонтальном направлении: $\triangle y_1 = -\triangle x_{2отн}$. В свою очередь, $\triangle x_{2отн} = \triangle x_2 - \triangle x_3 = \triangle x_2 - \triangle x_1$. Отсюда следуют уравнения кинематических связей: $a_{1x} = a_{3x}$ и $a_{1y} = a_{1x} - a_{2x}$. Уравнения движения тел системы в проекциях на оси координат имеют вид: $ma_{1x} = N; ma_{1y} = mg - T; ma_{2x} = -T; ma_{3x} = T - N$. Решая полученную систему уравнений, находим проекции ускорения первого груза: $a_{1x} = g/5, a_{1y} = 3g/5$. Следовательно, величина ускорения груза 1 равна $a_1 = \sqrt{{a_{1x}}^2 + {a_{1y}}^2} = g\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, и оно направлено вниз под таким углом α к горизонту, что $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a_{1y}}{a_{1x}} = \operatorname{arctg} 3$.

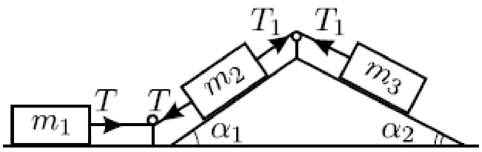
Ответ: $a_1 = g\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Задача №7 Два связанных тела массой m_2 и m_3 скользят по двум гладким наклонным поверхностям неподвижного клина (см. рисунок). К телу m_2 прикреплена нить, соединяющая его с телом массой m_1, лежащим на гладкой горизонтальной поверхности. Найдите силу натяжения T этой нити. Трением можно пренебречь, нити считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

Предположим, что все три тела движутся вправо.



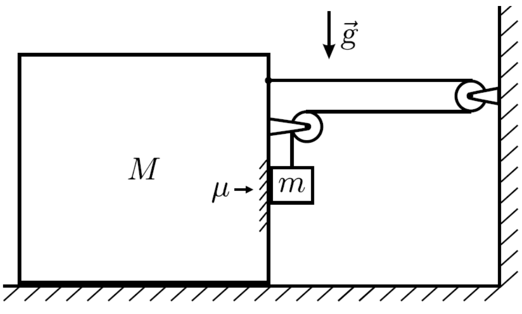
Тогда интересующая нас нить натянута, а поскольку все нити.нерастяжимы, то ускорения тел одинаковы по величине и равны a. Запишем уравнения движения тел в проекциях на направления их движений (T_1 — сила натяжения нити, связывающей тела 2 и 3):
$m_1a = T,\ \ m_2a = T_1 - T - m_2g\sin\alpha_1,\ \ m_3a = m_3g\sin\alpha_2 - T_1$

Складывая все уравнения друг с другом, находим: $(m_1+m_2+m_3)a = (m_3\sin\alpha_2 - m_2\sin\alpha_1)g$, откуда $T = \dfrac{m_3\sin\alpha_2 - m_2\sin\alpha_1}{m_1+m_2+m_3}m_1g$.

Если тела 2 и 3 движутся влево, то тело 1 стоит на месте, и $T = 0$. Так будет, если $m_3\sin\alpha_2 \le m_2\sin\alpha_1$.

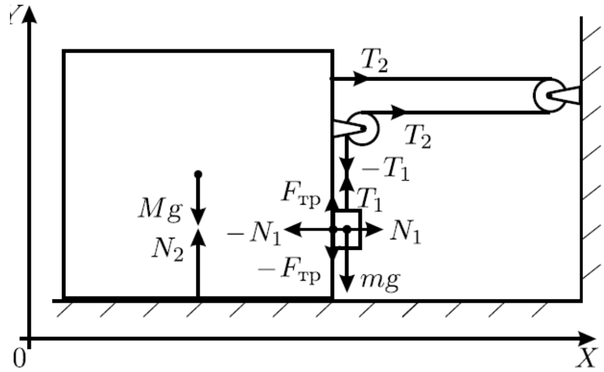
Ответ: $T = \dfrac{m_3\sin\alpha_2 - m_2\sin\alpha_1}{m_1+m_2+m_3}m_1g$, и $T = 0$, если $m_3\sin\alpha_2 \le m_2\sin\alpha_1$.

Задача №8 В системе, изображённой на рисунке, тело массой M может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телами M и m равен V. Найдите ускорение a тела M. Массой блоков и нерастяжимой нити пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.



Решение →

Из условия задачи ясно, что оба тела должны двигаться. Проведём координатные оси X и Y так, как указано на рисунке, и рассмотрим силы, действующие на тела в данной системе.



На тело массой m действуют: сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила натяжения нити $\overrightarrow{T_1}$, направленная вверх и равная по величине T, сила реакции $\overrightarrow{N_1}$ со стороны тела массой M и сила трения $\overrightarrow{F_{mp}}$. Тогда второй закон Ньютона для тела m можно записать так: $m\overrightarrow{a_1} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{N_1} + \overrightarrow{F_{mp}}$. На тело массой M действуют: сила тяжести $M\overrightarrow{g}$, сила реакции со стороны горизонтальной плоскости $\overrightarrow{N_2}$, сила натяжения нити $-\overrightarrow{T_1}$, направленная вниз и равная по величине T, сила трения $-\overrightarrow{F_{mp}}$, две силы натяжения нити $\overrightarrow{T_2}$, направленные вправо и равные по величине T, и сила реакции $-\overrightarrow{N_1}$ со стороны тела массой m. Второй закон Ньютона для тела M имеет вид: $M\overrightarrow{a_2} = M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N_2} + (-\overrightarrow{T_1}) + (-\overrightarrow{F_{mp}}) + 2\overrightarrow{T_2} + (-\overrightarrow{N_1})$.

Запишем векторные уравнения второго закона Ньютона для тел в проекциях на координатные оси с учётом того, что оба тела двигаются вдоль оси X с одинаковым ускорением a: $ma_{1x} = N_1 = ma; Ma_{2x} = 2T + (-N_1) = Ma; ma_{1y} = -mg + T + F_{mp}; Ma_{2y} = -Mg + N_2 + (-T) + (-F_{mp}) = 0$. Складывая два верхних уравнения, получим: $ma + Ma = 2T$, и $N_1 = ma = \dfrac{2m}{m+M}T$. Поскольку тело m скользит по телу M, то сила трения $F_{mp} = \mu N_1$, откуда $ma_{1y} = -mg + T + \mu\dfrac{2m}{m+M}T$.

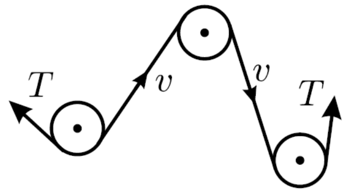
Так как нить нерастяжима, то величина смещения тела m по вертикали будет вдвое больше, чем смещение обоих тел в горизонтальном направлении, а значит, вертикальная составляющая ускорения тела m по величине также вдвое больше горизонтальной составляющей.

Следовательно, $a_{1y} = -2a$, и $ma_{1y} = -2ma = -\dfrac{4m}{m+M}T = T - mg + \mu\dfrac{2m}{m+M}T$.

Отсюда находим силу натяжения нити T: $T = \dfrac{m+M}{M+(5+2\mu)m}mg$, и для ускорения тела M получаем $a = \dfrac{2T}{m+M} = \dfrac{2mg}{M+(5+2\mu)m}$.

Ответ: $a = \dfrac{2T}{m+M} = \dfrac{2mg}{M+(5+2\mu)m}$.

Задача №9 Нерастяжимая, но очень гибкая и длинная цепь движется между блоками по траектории, изображённой на рисунке. При какой скорости v движения цепи она практически не будет давить на блоки? Сила натяжения цепи T, масса единицы её длины ρ; система находится в невесомости.

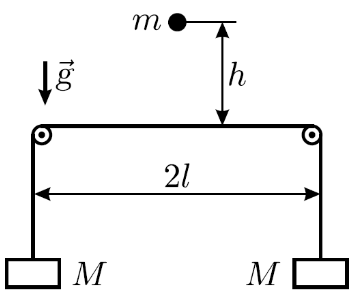


Решение →

Рассмотрим вращение маленького участка цепи вокруг оси блока, на котором находится этот участок, для него можно записать уравнение движения в отсутствие давления цепи на блок в виде: $\rho R\triangle\alpha\frac{v^2}{R} = T\triangle\alpha$. Здесь R — радиус блока, $\triangle\alpha$ — угол между радиусами, проведёнными от оси вращения к концам рассматриваемого участка цепи, v — скорость её движения. Отсюда получаем: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Заметим, что при постоянной скорости цепи сила её натяжения вдоль всей длины также постоянна. Кроме того, радиусы блоков в ответ не входят, так что они могут быть различными.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

Задача №10 Через два небольших блока перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы массой M каждый (см. рисунок). В начальный момент грузы уравновешены и покоятся. На нить с высоты h строго посередине между блоками падает небольшое тело массой m так, что при падении оно цепляется за нить. Какова будет максимальная скорость грузов в процессе движения, если $\frac{m}{M} \ll \frac{h}{l} \ll 1$?

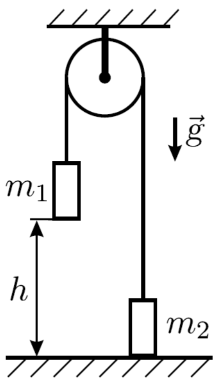


Решение →

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии. При падении тела m в поле силы тяжести его потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая — увеличивается, пока тело не зацепится за нить. Далее одновременно с его опусканием происходит подъём и ускорение двух грузов массой M. Скорости тела и грузов связаны между собой, поскольку нить по условию задачи нерастяжима. Если тело m сместилось вместе с нитью вниз на расстояние x от положения, когда нить горизонтальна, то скорость грузов v и скорость тела u связаны соотношением: $u = \frac{v}{x/\sqrt{l^2+x^2}} \approx \frac{vl}{x}$, покажем это → пусть за время $\triangle t$ груз массой m сместился на x, тогда $x = v\triangle t$ и из условия нерастяжимости нити $u\triangle t = \sqrt{l^2 + v^2\triangle t^2}$, откуда и следует нужное нам выражение. Здесь также использовано то обстоятельство, что, поскольку масса тела мала по сравнению с массами грузов, и оно падает на нить с небольшой высоты h, то смещение тела x будет также невелико по сравнению с h и, тем более, с l, то есть $x \ll h \ll l$. При этом из закона сохранения энергии следует, что $mg(h+x) = 2Mg(\sqrt{x^2+l^2}-l) + \dfrac{mu^2}{2} + 2\dfrac{Mv^2}{2}$, откуда $mg(h+x) - Mg\dfrac{x^2}{l} \approx \dfrac{m(vl/x)^2}{2} + 2\dfrac{Mv^2}{2} = v^2\left(M + \dfrac{m(l/x)^2}{2}\right)$, $v^2 \approx \dfrac{mg(h+x) - (Mgx^2/l)}{M + \dfrac{m(l/x)^2}{2}} \approx \dfrac{mgh - (Mgl \cdot x^2/l^2)}{M + \dfrac{m(l/x)^2}{2}}$. Обозначим малый параметр $z = x^2/l^2$. Теперь задача свелась к отысканию максимума выражения: $v^2 = \dfrac{mgh - Mglz}{M + (m/(2z))}$, для чего нужно приравнять нулю его производную по z. Это даёт уравнение: $2M^2l \cdot z^2 + 2mMl \cdot z - m^2h = 0$. Решая его, получим, что $z \approx mh/(2Ml)$. Следовательно, искомая максимальная скорость движения грузов будет равна: $v \approx h\sqrt{\dfrac{mg}{2Ml}}$.

Ответ: $v \approx h\sqrt{\dfrac{mg}{2Ml}}$

Задача №11 В машине Атвуда (см. рисунок) массы грузов равны m_1 и m_2, блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжёлый груз m_1 удерживают на высоте h над горизонтальной плоскостью, а груз m_2 стоит на этой плоскости, причём отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз m_1 после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g, блок находится достаточно далеко от грузов.



Решение →

Так как нить нерастяжима, то величины ускорений обоих грузов одинаковы. Поскольку блок и нить невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения T вдоль всей нити одинакова. Направим координатную ось вниз и запишем уравнения движения грузов с учётом того, что $m_1 > m_2$: $m_1 a = m_1 g - T; -m_2 a = m_2 g - T$. Отсюда следует, что ускорение равно $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.

В момент касания первого груза с плоскостью оба груза разгонятся до скорости

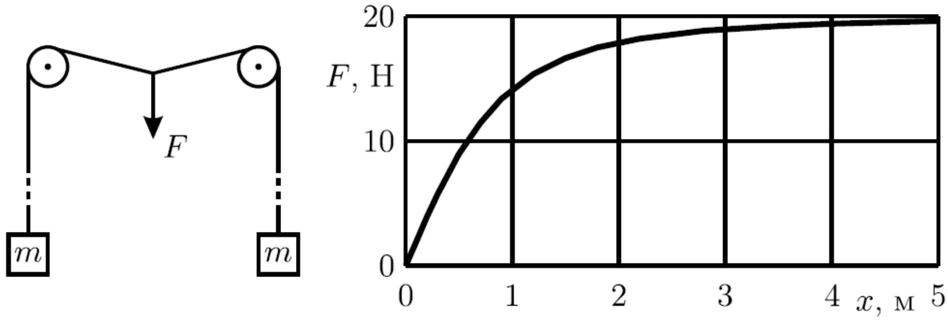
$$V = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

После этого груз m_1 остановится (так как удар о плоскость абсолютно неупругий), а груз m_2 полетит вверх со скоростью V и ускорением g, направленным вниз. Через некоторое время, достигнув максимальной высоты, груз m_2 начнёт падать с ускорением g и снова натянет нить. В этот момент его скорость будет по величине той же, что и в начале полёта, но направлена она будет уже вниз.

Поскольку нить неупругая, а блок невесомый, скорости обоих грузов после рывка выровняются: $m_2V = (m_1+m_2)V_1$, откуда начальная скорость движения груза m_1 вверх (а груза m_2 — вниз) будет равна $V_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}V = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}}$. Ускорение грузов при дальнейшем их движении будет прежним, равным $a = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$, а максимальная высота подъёма груза m_1 составит $h_1 = \dfrac{{V_1}^2}{2a} = \left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot 2gh \cdot \dfrac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)} \cdot \dfrac{(m_1+m_2)}{2g(m_1-m_2)} = \left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 h$. При дальнейшем движении в системе будут происходить те же процессы, но после каждого следующего удара о плоскость высота подъёма первого груза будет уменьшаться в $(1+(m_1/m_2))^2$ раз, так что h_1 действительно является искомой максимальной высотой подъёма.

Ответ: $h_1 = \left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 h$.

Задача №12 Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная лёгкая нить, к концам которой прикреплены два груза одинаковой массы (см. рисунок). Нить начинают медленно оттягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы F, прикладываемой к нити, от смещения x этой точки приведён на рисунке. Найдите приблизительно массу m каждого из грузов. Трения нет.

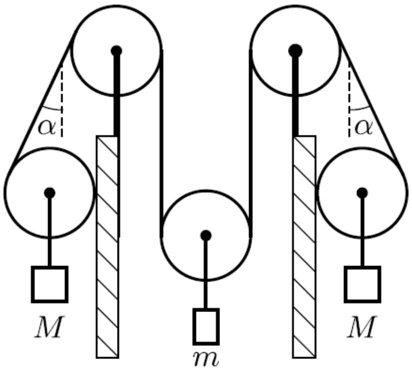


Решение →

Из приведённого в условии графика видно, что при достаточно больших смещениях x середины нити прикладываемая к ней сила F стремится к постоянной величине 20 Н. Это связано с тем, что при больших x все участки нити становятся почти вертикальными, и поэтому пути, проходимые каждым из грузов в единицу времени, совпадают с путём, который проходит середина нити. Из «золотого правила механики» следует, что отсутствие выигрыша (или проигрыша) в перемещении означает отсутствие проигрыша (или выигрыша) в силе. Следовательно, сила F должна стремиться к величине, равной суммарному весу двух грузов: $F \approx 2mg \approx 20$ Н. Отсюда $m \approx F/(2g) \approx 1$ кг.

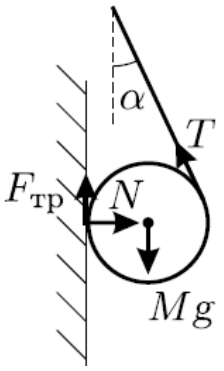
Ответ: $m \approx F/(2g) \approx 1$ кг.

Задача №13 В системе, изображённой на рисунке, блоки и нити невесомы. Массы грузов, подвешенных к крайним блокам, одинаковы и равны M, а наклонные участки нити составляют с вертикалью угол α. При каких значениях массы m груза, подвешенного к центральному блоку, и коэффициента трения μ между крайними блоками и опорами система будет находиться в равновесии? Будет ли это равновесие устойчивым?



Решение →

Сила натяжения нити, соединяющей блоки, одинакова по всей её длине и равна, очевидно, $T = mg = 2$. Рассмотрим условия равновесия какого-либо из боковых блоков (см. рис.). Вычисляя моменты сил, действующих на этот блок, относительно его центра, получаем, что $T = F_{тр}$, а из условий равновесия блока в горизонтальном и в вертикальном направлениях имеем: $N = T\sin\alpha$.

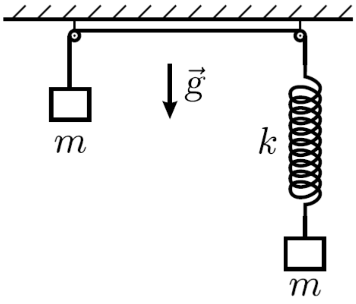


$F_{тр} + T\cos\alpha = T(1+\cos\alpha) = \dfrac{mg}{2}(1+\cos\alpha) = Mg$. Отсюда $m = \dfrac{2M}{1+\cos\alpha}$ и $N = F_{тр}\sin\alpha \leq \mu N\sin\alpha$, то есть $\mu > 1/\sin\alpha$.

Покажем, что это равновесие устойчиво. Предположим, что нижний груз поднялся выше положения равновесия, тогда боковые блоки опустятся вниз, и угол α уменьшится. Поэтому уменьшится и равновесное значение массы m, из чего следует, что при случайном поднятии груза m он будет возвращаться в прежнее положение. Опускание груза m рассматривается аналогично. Следовательно, равновесие действительно будет устойчивым.

Ответ: $m = \dfrac{2M}{1+\cos\alpha}$, $\mu > 1/\sin\alpha$.

Задача №14 В системе, изображённой на рисунке, массы грузов равны m, жёсткость пружины k. Пружина и нить невесомы, трения нет. В начальный момент грузы неподвижны, и система находится в равновесии. Затем, удерживая левый груз, смещают правый вниз на расстояние a, после чего их отпускают без начальной скорости. Найдите максимальную скорость левого груза в процессе колебаний, считая, что нити всё время остаются натянутыми, а грузы не ударяются об остальные тела системы.

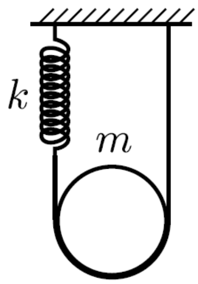


Решение →

Из равенства масс грузов следует, что в процессе колебаний, возникших после отпускания грузов, центр пружины остаётся неподвижным. Поэтому данная задача эквивалентна задаче о поиске максимальной скорости груза массой m, висящего на пружине жёсткостью $2k$, после его начального смещения вниз на расстояние $a/2$ и последующего отпускания. После отпускания груза он под действием силы упругости начнёт двигаться вверх. Его скорость будет максимальной тогда, когда он будет проходить через положение равновесия, то есть когда сила упругости станет равной силе тяжести, действующей на груз. Искомая максимальная скорость равна произведению круговой частоты колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ на их амплитуду $a/2$, поэтому $v_{max} = a\sqrt{k/2m}$.

Ответ: $v_{max} = a\sqrt{k/2m}$.

Задача №15 На обруч намотана нерастяжимая невесомая нить, один конец которой прикреплён к потолку непосредственно, а другой через невесомую пружину (см. рисунок). Масса обруча равна m, жёсткость пружины k. Если обруч немного сместить из положения равновесия вниз и отпустить, то возникнут колебания, при которых обруч будет двигаться вертикально и при этом вращаться. Найдите частоту этих колебаний.



Решение →

Обозначим длину пружины в недеформированном состоянии через l_0, а в положении равновесия — через l_1. Условие равновесия обруча имеет вид: $mg = 2T = 2k(l_1 - l_0)$, где T — сила натяжения нити, перекинутой через обруч. Пусть в процессе колебаний центр обруча сместился вниз от положения равновесия на расстояние x и приобрёл при этом скорость $v = dx/dt$. Тогда потенциальная энергия системы с учётом условия равновесия станет равной:

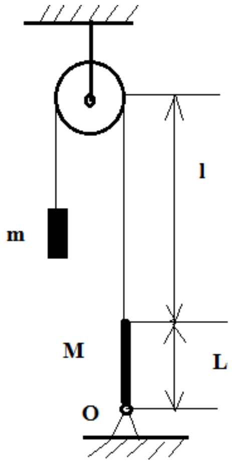
$$U = -mgx + \frac{k}{2}\left((l_1 - l_0 + 2x)^2 - (l_1 - l_0)^2\right) = -mgx + 2kx(l_1 - l_0) + 2kx^2 = 2kx^2$$

(за начало отсчёта потенциальной энергии выбрано положение равновесия оси обруча).

Кинетическая энергия обруча, как и в предыдущей задаче, складывается из энергий его поступательного и вращательного движений и равна $W = W_п + W_в = mv^2$, где $W_в = \dfrac{mv^2}{2}$, так как вся масса сосредоточена на границе обруча и распределена равномерно, плюс считаем, что проскальзывания между обручем и нитью нет, поэтому скорость его центра масс совпадает со скоростью вращательного движения. Отсюда для круговой частоты колебаний ω получаем: $\omega = \sqrt{2km}$.

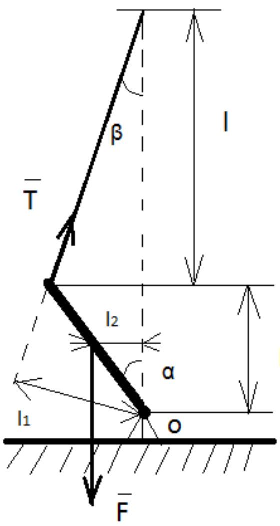
Ответ: $\omega = \sqrt{2km}$.

Задача №16 Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O, а другой прикреплён к лёгкой нити, перекинутой через блок. К свободному концу нити привязан груз массой m. Расстояние от стержня до оси блока равно l. При какой массе груза m вертикальное положение стержня будет устойчивым (то есть при его отклонении от вертикали на малый угол будет возникать сила, возвращающая стержень в исходное положение)?



Решение →

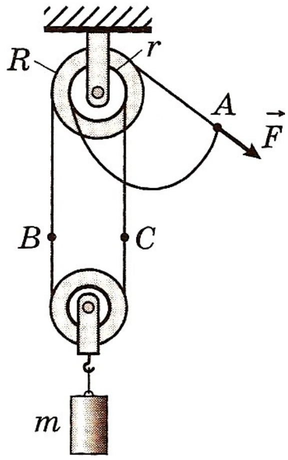
Пусть стержень отклонился от вертикали на малый угол α, тогда нить отклонится от вертикали на угол $\beta \approx \alpha \dfrac{L}{l}$ (так как $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$).



Чтобы он вернулся в исходное положение, момент силы натяжения нити $T = mg$, имеющий плечо $l_1 \approx \beta(l + L)$ относительно точки O, должен превысить момент силы тяжести стержня $F = mg$, имеющий плечо $l_2 \approx \alpha\dfrac{L}{2}$ относительно той же точки: $mg\beta(l + L) > Mg\alpha\dfrac{L}{2}$, откуда $m > \dfrac{M/2}{1 + L/l}$.

Ответ: $m > \dfrac{M/2}{1 + L/l}$

<u>**Задача №17**</u> Для облегчения подъёма грузов часто применяют приспособление, схематически показанное на рисунке. Верхние блоки один относительно другого неподвижны. Трос, соединяющий блоки, не проскальзывает. Какую силу F надо приложить к тросу, чтобы груз находился в равновесии? Верхние блоки имеют радиусы соответственно R и r. (Весом нижнего блока и трением можно пренебречь.)



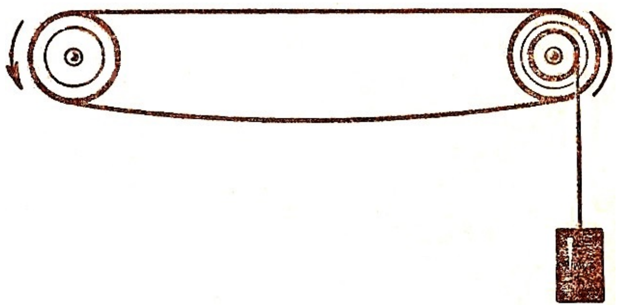
Решение →

Предположим, что под действием силы $\overrightarrow{F}$ точка A переместилась на расстояние l. Тогда работа этой силы $A = Fl$ будет равна работе по подъему груза массой m на некоторую высоту h. При этом точка B поднимается так же на l, а точка C опустится на $l\dfrac{r}{R}$, покажем это: так как точка A получила приращение l, то есть за некоторое время $\triangle t$ большой блок повернулся на угол $\triangle\varphi_1 \rightarrow Rw\triangle t = \triangle\varphi_1 R = \triangle_R$; за то же время маленький блок повернётся на $\triangle\varphi_2 \rightarrow rw\triangle t = \triangle\varphi_2 r = \triangle_r$. Ну а так как $\triangle_R = l$, то $\triangle_r = l\dfrac{r}{R}$. Здесь мы ещё воспользовались тем, что блоки неподвижны относительно друг друга, то есть $w_R = w_r$ (угловые скорости вращения равны).

Значит, высота h, на которую поднимется груз, будет равна: $h = \dfrac{1}{2}\left(l - l\dfrac{r}{R}\right)$. Так как $Fl = mgh$, то можно записать: $Fl = \dfrac{mg}{2}\left(l - l\dfrac{r}{R}\right) = \dfrac{mgl}{2}\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$. Отсюда получаем $F = mg\dfrac{R - r}{2R}$.

Ответ: $F = mg\dfrac{R - r}{2R}$.

<u>**Задача №18**</u> Два шарика соединены ременной передачей. Ведомый шкив, вращаясь, поднимает груз. При этом совершается некоторая работа. Энергия, необходимая для совершения работы, передаётся от ведущего шкива к ведомому через ремень в виде потенциальной энергии упругой деформации растянутого ремня. Однако, как видно из рисунка, растянутые части ремня, несущие энергию, движутся не от ведущего шкива к ведомому, а наоборот. Как же происходит передача энергии от ведущего шкива к ведомому?

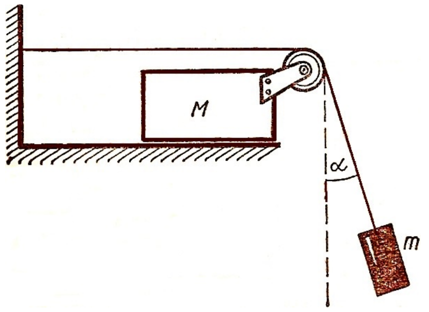


Решение →

Проще всего разобраться в том, как передаётся энергия, если рассмотреть, что происходит при увеличении скорости вращения ведущего шкива. Действительно, тогда шкив сообщает ближайшим участкам ремня ускорение и деформация ремня возрастает. Возрастает и сила натяжения ремня. Это приводит к тому, что появляется ускорение у следующих участков ремня и так далее. По ремню бежит волна деформации от ведущего шкива к ведомому. Если c — скорость звука в ремне (с такой скоростью распространяется упругое возмущение в неподвижном ремне) и v- скорость движения ремня, то $c - v$ есть скорость распространения волны деформации от ведущего шкива к ведомому.

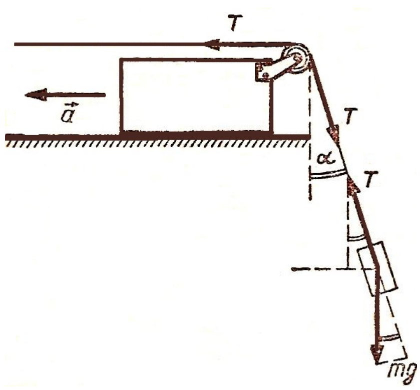
Ответ: см. решение.

Задача №19 В механической системе, изображённой на рисунке, брусок массой M может скользить по рельсам без трения. В начальный момент подвешенный на нити груз отводят на угол α от вертикали и отпускают. Какова масса m этого груза, если угол, образуемый нитью с вертикалью, не меняется при движении?



Решение →

Обозначим через T модуль силы упругости нити и через a модуль ускорения бруска. Так как угол α при движении системы не меняется, то горизонтальная проекция ускорения груза тоже равна a. Очевидно, что равна a и проекция ускорения груза на направление нити (изменение длины отрезка нити, находящегося за блоком, всегда равно модулю перемещения бруска). Поэтому $mg\cos\alpha - T = ma$ и $T\sin\alpha = ma$, где m — масса груза. (1)

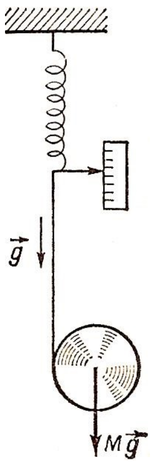


На брусок с блоком действуют две силы упругости нити. Поэтому для бруска можно записать следующее уравнение (в проекциях на горизонтальное направление): $T - T\sin\alpha = Ma$. (2)

Из уравнений (1) и (2) получаем: $m = M\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}$.

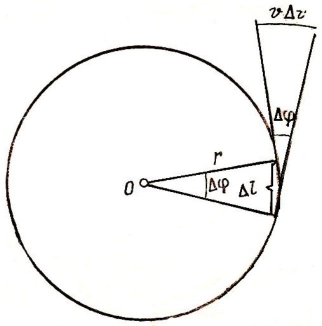
Ответ: $m = M\dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}$

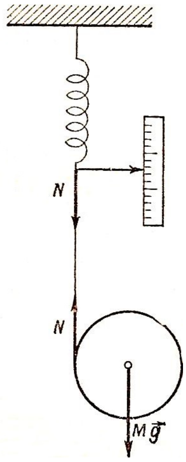
Задача №20 На катушку, имеющую форму однородного вала, навита тонкая, лёгкая и гибкая бумажная лента. Конец ленты прикреплён к зажиму пружинного динамометра. В начальный момент система выглядит так, как показано на рисунке. Затем лента начинает разматываться- катушка падает вниз. Что показывает динамометр в процессе падения катушки? Всё время ли размотавшаяся часть ленты направлена вертикально? Масса катушки равна M. Колебаниями пружины пренебрегаем.



Решение →

Натяжение ленты, определяемое по показанию пружинного динамометра, обозначим через N.





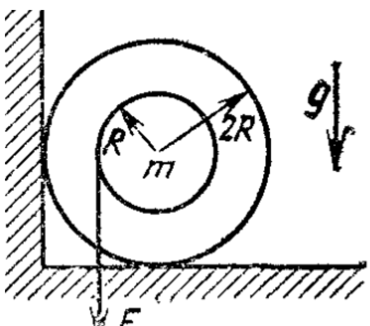
Линейное ускорение центра катушки равно $a = \dfrac{Mg-N}{M}$. Угловое ускорение катушки относительно центра симметрии равно $\varepsilon = \dfrac{NR}{I}$, где $I = MR^2/2$ — момент инерции катушки относительно центра (R — радиус катушки). Поскольку лента не проскальзывает относительно катушки, a и ε связаны соотношением $a = \varepsilon R$.

Следовательно, $\dfrac{Mg-N}{M} = \dfrac{NR}{\frac{1}{2}MR^2}R$, откуда $N = \dfrac{1}{3}Mg$.

Значит, пружинный динамометр покажет $\dfrac{1}{3}$ веса катушки. Отметим, что если вначале лента расположена вертикально, то она всё время остаётся вертикальной, так как на центр катушки не действуют никакие горизонтально направленные силы.

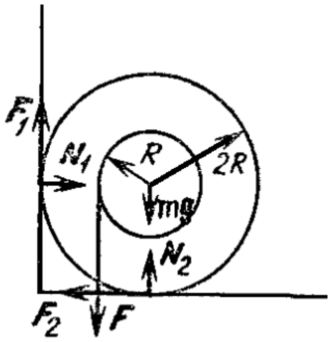
Ответ: $N = \dfrac{1}{3}Mg$.

Задача №21 У стенки, прижимаясь к ней, лежит катушка массы m радиуса $2R$, на внутренний цилиндр которой намотана нить. За нить тянут вертикально вниз. При каком значении силы натяжения нити F катушка начнёт вращаться? Коэффициенты трения о пол и стенку одинаковы и равны k, радиус внутреннего цилиндра равен R.



Решение →

Условие равенства моментов относительно центра катушки: $FR = (F_1+F_2)2R$, где $F_1 = kN_1, F_2 = kN_2$.

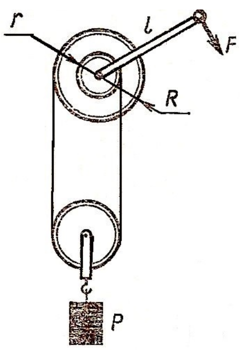


Равновесие по горизонтали даёт $N_1 = kN_2$, а по вертикали приводит к условию $N_2 + kN_1 = mg + F$. Из этих уравнений получаем $F = mg\dfrac{2k(1+k)}{1-2k-k^2}$ при $k \le k_1 = \sqrt{2} - 1$.

Условие заклинивания: $k > k_1 = \sqrt{2} - 1$ (k_1 получается из уравнения $1 - 2k_1 - {k_1}^2 = 0$).

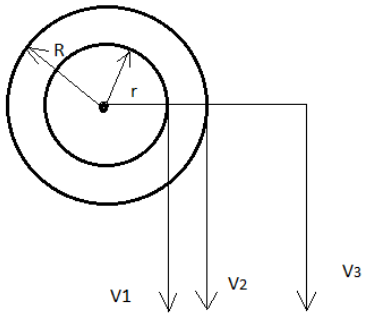
Ответ: $F = mg\dfrac{2k(1+k)}{1-2k-k^2}$ при $k \le k_1 = \sqrt{2} - 1$.

Задача №22 Для облегчения подъёма грузов часто применяют ворот, состоящий из двух валов, неподвижно закреплённых на одной оси. При работе такого ворота трос (или цепочка), сматывается на другой. Какую силу F нужно приложить к рукоятке ворота, чтобы груз находился в равновесии? Весом блока и трением пренебречь. Известно также, что ворот делает n оборотов в секунду, с какой скоростью при этом движется груз, если верёвка нигде не проскальзывает?



Решение →

Так как при вращении ручки двухступенчатый блок вращается, то скорость вращения большого больше, чем у первого, поэтому нить на первый наматывается меньше. Так как валы закреплены друг относительно друга, то их угловые скорости вращения одинаковы. Далее рассматривая ворот как рычаг, легко видеть, что по часовой стрелке действует сила F и сила, приложенная к валу радиусом r. Так как груз висит на двух веревках, то силы, действующие на валы, равны $\dfrac{1}{2}P$. При равновесии должно быть: $Fl + \dfrac{1}{2}Pr = \dfrac{1}{2}PR$, или $Fl = \dfrac{1}{2}P(R-r)$, откуда $F = \dfrac{P(R-r)}{2l}$.

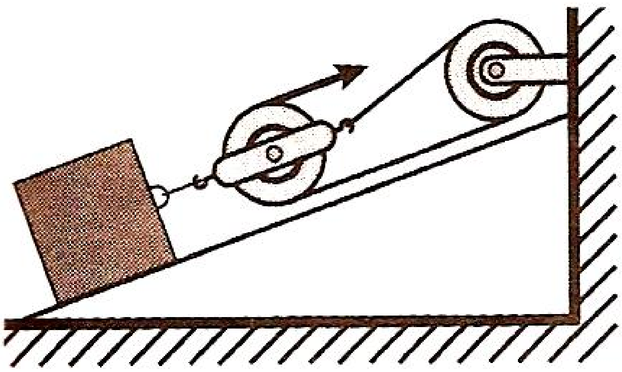


Как видим из рисунка $v_3 = \omega 2R$, $v_2 = \omega R$, $v_1 = \omega r$, $v_2 > v_1$, тогда скорость подъёма груза равна $v = v_2 - v_1 = 2\pi(R - r)n$.

Ответ: $F = \dfrac{P(R - r)}{2l}$, $v = 2\pi(R - r)n$.

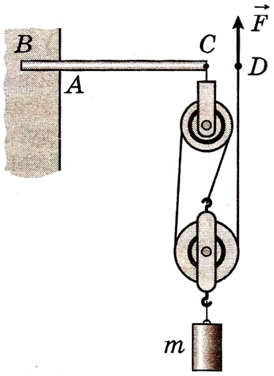
Упражнения.

1) Определите КПД установки, если масса бруска 360 кг, длина наклонной плоскости 4,5м, высота 1,5 м, сила трения в блоках 50Н, сила трения между бруском и наклонной плоскостью 1,65 кН.



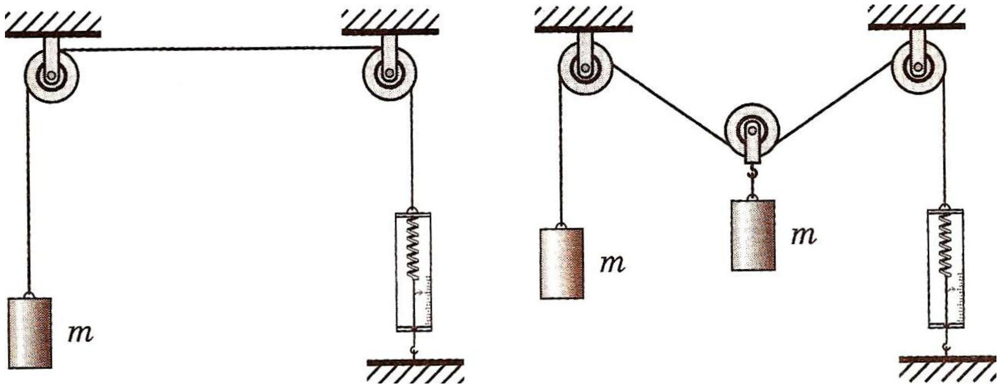
Ответ: 40 %.

2) Стальная труба длиной 1 м заделана в стену на глубину 20 см. К свободному концу трубы в точке C подвешены неподвижный и подвижный блоки. Чему равны силы, действующие на стену в точках A и B, если для удержания груза массой m необходимо к точке D приложить силу 200 Н? (Трением в блоках пренебречь, блоки и трубу считать невесомыми.)



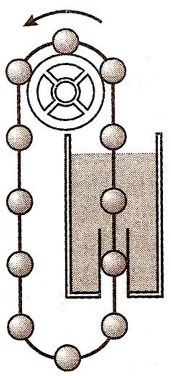
Ответ: 2,4 кН; 3кН.

3) В установке, изображённой на рисунке, динамометр показывает, что сила натяжения нити $F = mg = 5$ Н. Если на нить, расположенную горизонтально, поместить невесомый подвижный блок с таким же грузом, то система примет вид, показанный на рисунке b). Какое значение силы F_1 показывает динамометр? (Трением в блоках и их весом пренебречь.)



Ответ: $F_1 = F$.

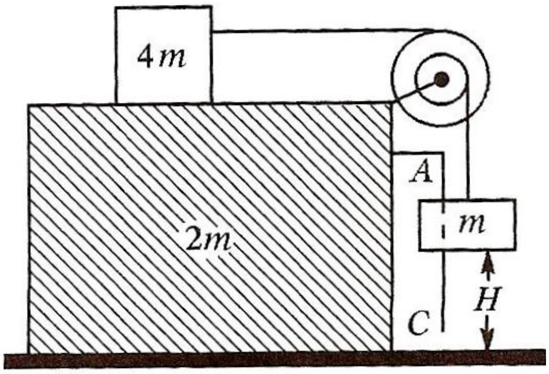
4) Вечный двигатель, схема которого изображена на рисунке, состоит из колеса и перекинутой через него " бесконечной" цепи с поплавками. Правая сторона цепи проходит через сосуд с водой. По замыслу автора поплавки, всплывая, нарушат равновесие и поэтому будут вращать колесо. Будет ли вращаться колесо?



<u>**Указание:**</u> Сравнить силу давления воды на нижний поплавок (шарик в трубке) с архимедовой силой, действующей на поплавки в воде.

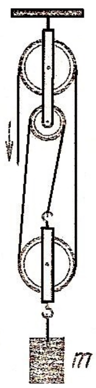
Ответ: нет.

5) Брусок в форме прямоугольного параллелепипеда находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. На бруске укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов r и $R = 3r$ и вертикальная штанга AC. На шкивы намотаны лёгкие нити, прикреплённые к грузам с массами m и $4m$. Масса бруска $2m$. Груз с массой m может свободно скользить вдоль штанги AC. Вначале груз с массой $4m$ удерживали в покое. При этом груз с массой m находился на расстоянии $H = 14$ см от стола. Затем грузы отпустили. Брусок и грузы стали двигаться поступательно, их скорости оказались в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится брусок к моменту удара груза с массой m о стол? При ударе другой груз не достигает блока. Массами блока и штанги пренебречь.

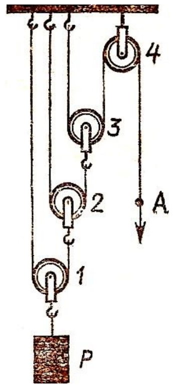


Ответ: сместится влево на $\frac{4}{7}\frac{R}{r}H = \frac{12}{7}H = 24$ см.

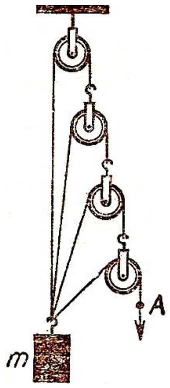
6) Определите силу, действующую в точке закрепления блоков к потолку, если груз массой $m = 75$ кг, подвешенный к блоку, удерживается на весу человеком, который тянет за верёвку вертикально вниз.



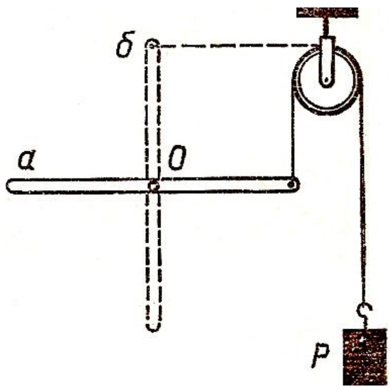
7) Груз весит 100 Н. Определите: 1) какую силу надо приложить к концу верёвки в точке A, чтобы равномерно поднять груз на некоторую высоту (трение и вес блоков не учитывать); 2) какую силу надо приложить в точке A, если сила трения в каждом из блоков одинакова и равна 0.25 Н. 3) на какую высоту поднимется груз, если блок 3 поднялся на высоту 1 м; 4) какую мощность надо развить силой, действующей в точке A, чтобы поднять груз на высоту 0ю25 м в течение 1 секунды (без учёта трения); 5) чему равен КПД установки.



8) Груз массой 200 кг поднимают с помощью системы блоков. Какую силу надо приложить к концу верёвки в точке A, чтобы можно было осуществить равномерный подъём груза? (трением пренебречь).



9) Равноплечий рычаг, насаженный с некоторым трением на ось O, под действием груза P удерживается в горизонтальном положении а) . (При не значительном увеличении груза P равновесие рычага нарушается). Останется ли рычаг в вертикальном положении б), если его расположить так, как показано на рисунке штриховой линией?



Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.