Московский физико-технический институт

Тяжелый канат.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

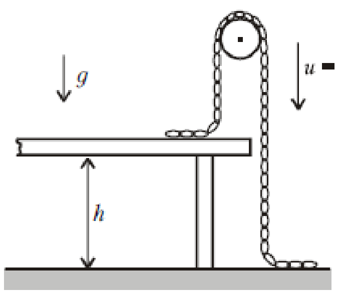
Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Как правило, когда речь заходит о механизмах, в которых используются металлические тросы или канаты, последние предполагаются невесомыми или обладающими бесконечно малой массой по сравнению с остальными устройствами, будь то подвешенные грузы или блоки, на которые наматывается нить. Всё это конечно идеализация или упрощение, в реальности всё обстоит на много сложнее. Наличие массы у троса приводит уже к качественным изменениям. В качестве иллюстрации рассмотрим некоторые задачи наиболее приближенные к практике. Как правило чаще всего с этим сталкиваются в системе блоков, когда трос имеет достаточно большую массу, как и сам блок. Рассмотрим некоторые задачи, в которых наличие массы троса уже существенно меняет ответ в задаче.

Задача №1 (Задача о «сифоне-цепочке») Через гвоздь перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой h, а часть — на полу (см. рис.). С какой установившейся скоростью будет двигаться цепочка цепочка после того, как ее отпустят? Явлениями, происходящими в прилегающих к блоку частях цепочки, пренебречь.



Решение:

Введем линейную плотность цепочки $\rho = M/L$, где M — ее масса, а L — длина. Пусть установилась скорость u. Тогда за малое время $\triangle t$ в движение вовлекается масса $\triangle m = \rho u \triangle t$, скорость которой изменяется от 0 до u, а импульс — от 0 до $\triangle p = \triangle m u = \rho u^2 \triangle t$. Этот импульс сообщает массе $\triangle m$ сила тяжести $\rho h g$, действующая на неуравновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона, получим: $F = \dfrac{\triangle p}{\triangle t} = \dfrac{\triangle (mu)}{\triangle t} = \dfrac{\triangle m}{\triangle t} u + m \dfrac{\triangle u}{\triangle t}$.

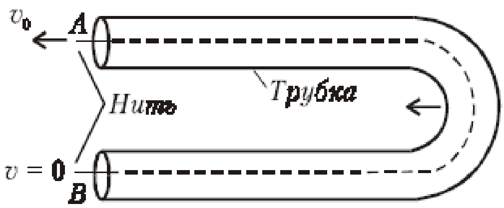
Так как рассматривается движение с установившейся скоростью, имеем: $F = \dfrac{\triangle m}{\triangle t} u = \dfrac{\rho u^2 \triangle t}{\triangle t} = \rho u^2 = \rho g h$. Отсюда получаем $u = \sqrt{gh}$.

Заметим, что закон сохранения энергии $\triangle m g h = \triangle m u^2/2$ дает неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол.

Отметим также, что, если убрать гвоздь, т.е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

Ответ: $u = \sqrt{gh}$.

Задача №2 (Задача о нити в трубке) Внутри U — образной трубки массой M, находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой m (см. рис; вид сверху). В начальный момент в каждом Трубка колене трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость конца A нити была равна v_0, а скорость конца B — нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Движение трубки допускается только вдоль ее прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.



Решение:

Так как нить нерастяжима, заданное в начальный момент соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость u_0 трубки относительно стола в этот момент равна $v_0/2$ и направлена в ту же сторону, что и скорость конца нити A. Перейдем в систему отсчета, где начальная скорость трубки равна нулю. В этой системе половина нити с концом A имеет скорость $v_0/2$, импульс $(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. А половина нити с концом B имеет скорость $-v_0/2$, импульс $-(m/2)(v_0/2)$ и кинетическую энергию $(m/2)(v_0/2)^2/2$. Таким образом, вначале в этой системе отсчета полный импульс нити, а также импульс и кинетическая энергия трубки равны нулю.

Энергия нити при этом равна $mv_0^2/8$. Пусть после вылета нити из трубки скорость нити равна v, а скорость трубки равна u. Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать следующим образом:

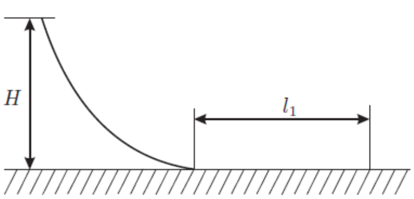
$0 = Mu + mv$, $\dfrac{mv_0^2}{8} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{Mu^2}{2}$, отсюда получим: $u = -\dfrac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\dfrac{v_0}{2}$. Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, находим искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\right).$$

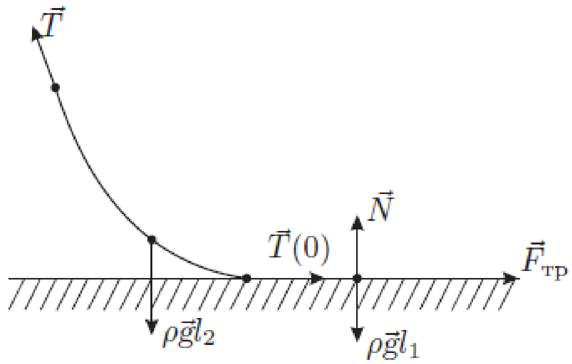
Ответ: $u_1 = u + \dfrac{v_0}{2} = \dfrac{v_0}{2}\left(1 - \dfrac{m}{\sqrt{M(m+M)}}\right)$.

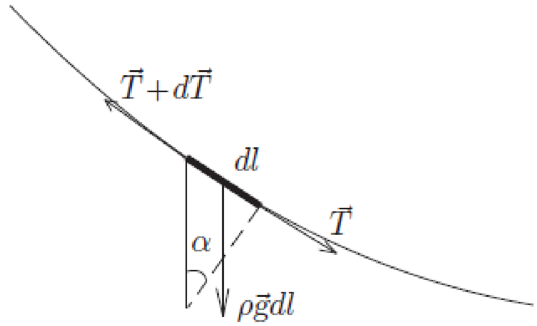
Задача №3 (Верёвка) Один конец тонкой гибкой верёвки с линейной плотностью ρ тянут с постоянной горизонтальной скоростью на высоте H над шероховатой поверхностью. Второй конец верёвки свободен (см. рис.). Длина части верёвки, соприкасающейся с поверхностью, равна l_1. Найдите длину верёвки l_2, не касающейся поверхности. Коэффициент трения скольжения верёвки по поверхности равен k.



Решение:

Верёвка движется равномерно. Следовательно, сумма сил, приложенных к ней, а также к её части, равна нулю. К верёвке приложены следующие силы: $\overrightarrow{T_0}$ — сила, удерживающая верхний конец верёвки на одной высоте; силы тяжести её двух частей $\rho g l_1$ и $\rho g l_2$; $\overrightarrow{N}$ — сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности; сила трения $\overrightarrow{F_{mp}}$ этой поверхности.





Запишем условие равновесия для части верёвки, висящей в воздухе: $\overrightarrow{T_0}+\rho\overrightarrow{g}l_2+\overrightarrow{T}(0)=0$, где $\overrightarrow{T}(0)$ — сила, действующая со стороны части верёвки, лежащей на поверхности. Из этого условия получим: (1) $T_0=\sqrt{(\rho g l_2)^2+(T(0))^2}$.

Чтобы найти $T(0)$ запишем условие равновесия малого элемента верёвки длиной dl: $T+dT=T+\rho g dl \sin\alpha$. Отсюда следует, что: $dT=\rho g dh$, то есть для силы натяжения $T(h)$ в точке верёвки, находящейся на высоте h над поверхностью, имеем: $T_0-T(h)=\rho g(H-h)$.

Отсюда получаем значение силы натяжения в самой нижней точке той части верёвки, которая не соприкасается с поверхностью: $T(0)=T_0-gH$. Такая же по модулю сила в соответствии с третьим законом Ньютона действует и на горизонтальную часть верёвки. Условия равновесия этой части имеют вид: (3) $\rho g l_1=N, T(0)=F_{mp}=kN=k\rho g l_1$.

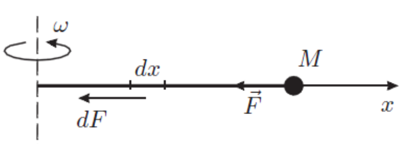
Из системы уравнений (1), (2) и (3) получим ответ: $l_2=\sqrt{H(H+2kl_1)}$.

Проанализируем полученный результат в предельном случае $k\to 0$. Видим, что $l_2\to H$, то есть при малом трении не лежащая на поверхности часть верёвки располагается почти вертикально, что вполне соответствует интуитивно ожидаемому результату.

Ответ: $l_2=\sqrt{H(H+2kl_1)}$.

Задача №4 (Упругий жгут) Шарик массой M прикреплён к концу упругого жгута массой m, длина которого в недеформированном состоянии равна L_0. Жгут с шариком вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через другой конец жгута.Шарик скользит по гладкой поверхности, жгут не провисает. Как зависит расстояние шарика до оси вращения L от угловой скорости ω? При растяжении жгута изменением его сечения S можно пренебречь. Жгут подчиняется закону Гука при любых деформациях. Модуль Юнга равен E.

Решение:



Для решения задачи нужно проанализировать движение системы. Запишем для установившегося движения шарика по окружности уравнение второго закона Ньютона (1) $M\omega^2 L=F$, где F — сила упругости, приложенная к шарику.

Поскольку деформация жгута неоднородна, для нахождения F следует рассмотреть движение малого его элемента длиной dx и массой dm. Длина этого элемента в недеформированном состоянии равна dx_0. Запишем для него второй закон Ньютона (2) $dm\omega^2 x=dF(x)$, где x — координата выбранного элемента, $dF(x)$ — действующая на него сила упругости. Масса элемента $dm=\rho_0 S dx_0=\rho(x)Sdx$, где ρ_0 плотность недеформированного жгута, а $\rho(x)$ плотность жгута в точке x. В соответствии с законом Гука, (3) $F(x)=-SE\dfrac{dx-dx_0}{dx_0}=-SE\left(\dfrac{\rho_0}{\rho(x)}-1\right)$.

Подставляя dm в (2), получим: $\rho(x)S\omega^2 x dx=ES\rho_0\dfrac{d\rho}{\rho^2(x)}$, или (4) $xdx=A\dfrac{d\rho}{\rho^3(x)}$, где (5) $A=\dfrac{E\rho_0}{\omega^2}$.

Проинтегрировав (4) от x до L, получим: $x^2 - L^2 = A\left(\frac{1}{\rho^2(L)} - \frac{1}{\rho^2(x)}\right)$.

Величину $\rho(L)$ выразим из (1), подставив в неё (3): (7) $\frac{1}{\rho(L)} = \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{M\omega^2 L}{ES}\right)$.

Из (6) и (7) получим: $\frac{1}{\rho^2(x)} = \frac{1}{A}(a^2 - x^2)$, где $a^2 = A\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{ML}{AS}\right)^2 + L^2$.

Функция $\rho(x)$ позволяет выразить массу жгута следующим образом (8) $m = S\int_0^L \rho(x)dx = S\int_0^L \frac{\sqrt{A}dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Вычислим интеграл в (8) и подставим $m = \rho_0 S L_0$: $\rho_0 S L_0 = S\sqrt{A}\arcsin\frac{L}{a}$, или

(9) $\sin\left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{AL^2}\left(\frac{A}{\rho_0} + \frac{ML}{S}\right)^2}}$.

Формула (9) содержит в неявном виде искомую зависимость L от ω, поскольку $A \sim \omega^{-2}$ согласно (5). Проанализируем эту зависимость. При $\omega \to 0$ ($A \to \infty$), получаем $L_0 \approx L$. Естественно, при медленном вращении жгут деформируется незначительно. При $L \to \infty$ в правой части (9) получается: $\left(1 + \frac{M^2}{AS^2}\right)^{-2}$

Левую часть преобразуем с помощью тригонометрического тождества: $\sin\alpha = \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^{-1/2}$

Тогда получим $\operatorname{tg}\left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}}\right) = \frac{\sqrt{A}S}{M}$, или после подстановки (5) $\operatorname{tg}\left(\omega L_0\sqrt{\frac{\rho_0}{E}}\right) = S\frac{\rho_0 E}{M\omega}$

Таким образом, когда угловая скорость стремится к критическому значению, являющемуся решением уравнения (10), длина нити неограниченно увеличивается. Проще осознать эту особенность для невесомой нити. При $\rho_0 \to 0$ из (10) получается $M\omega^2 L_0 = SE$. Уравнение движения шарика в этом случае имеет вид: $M\omega^2 L = \frac{SE}{L_0}(L - L_0) = f(L)$.

Корень этого уравнения и определяет длину L при установившемся движении. Графическое решение этого уравнения представлено на рисунке 1 (рядом с обозначениями углов указаны значения их тангенсов). Наклон прямой, проходящей через начало координат, увеличивается с ростом ω. При достижении критического значения, совпадающего с решением уравнения (11), прямые оказываются параллельными, то есть $L \to \infty$. Сила упругости не в состоянии обеспечить необходимого центростремительного ускорения. Наглядное представление функциональных зависимостей дают графики.

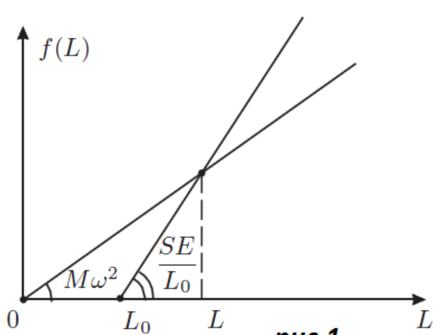


рис.1

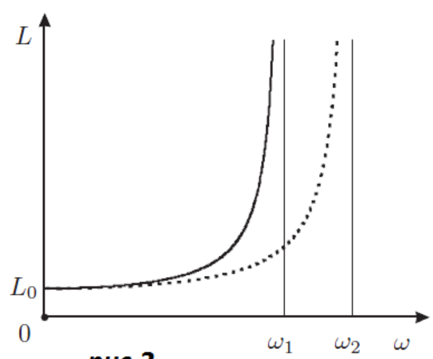
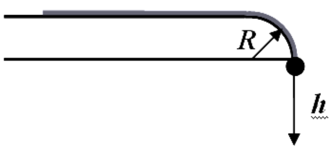


рис.2

Наглядное представление функциональных зависимостей дают графики. Построить графики функций, заданных неявно или громоздкими выражениями, помогает компьютер. На рисунке 2 изображены полученные с помощью MathCAD график функции $L(\omega)$, построенный по формуле (9) (сплошная линия), а также график аналогичной зависимости, даваемой формулой (12) (штрихованная линия). Видно, что различие в поведении массивного жгута и невесомого проявляются только вблизи критических угловых скоростей ω_1 и ω_2 (рис. 2). Для невесомого жгута эта скорость ω_2 больше.

Ответ: $\sin\left(\dfrac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{AL^2}\left(\dfrac{A}{\rho_0}+\dfrac{ML}{S}\right)^2}} \Rightarrow L(\omega).$

Задача №5 (Канат на краю стола) Однородный канат массой M лежит на краю горизонтальной гладкой поверхности, оканчивающейся закруглением радиусом R так, как показано на рисунке. Канат удерживают, а потом аккуратно прикрепляют к его нижнему концу груз массой m и отпускают. Найдите скорость груза в тот момент времени, когда он опустится на расстояние $h = R$ ниже исходного положения. Общая длина каната в 6 раз больше радиуса закругления. Считать, что канат в ходе такого смещения не отрывается от поверхности.

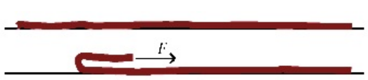


Решение:

Ясно, что кинетическая энергия системы связана со скоростью груза (скорость всех точек каната точно такая же) соотношением $E_k = \dfrac{(M+m)v^2}{2}$. Изменение (убыль) потенциальной энергии каната длиной L при смещении его конца на h связана с «переносом» кусочка каната длиной h из «начала» в «хвост». Масса этого кусочка $\triangle M = \dfrac{h}{L}M = \dfrac{h}{6R}M$, а смещение его центра масс по вертикали $\triangle x = R + \dfrac{h}{2}$, поэтому $\triangle U_1 = -\dfrac{Mg}{12R}h(2R+h)$. Убыль потенциальной энергии груза $\triangle U_2 = -mgh$. Теперь из закона сохранения механической энергии для всего перемещения находим: $\dfrac{(M+m)v^2}{2} = \dfrac{Mg}{12R}h(2R+h) + mgh \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{M}{m+M}\cdot\dfrac{gh(2R+h)}{6R} + \dfrac{2mgh}{M+m}} = \sqrt{\dfrac{gR(4m+M)}{2(M+m)}}$.

Ответ: скорость каната при $h = R$ равна $v = \sqrt{\dfrac{gR(4m+M)}{2(M+m)}}$.

Задача №6 (Складываемый коврик) Узкий длинный ковер (ковровая дорожка) лежит на полу. Конец ковра загибают и тянут назад со скоростью v. Масса единицы длины ковра равна ρ. Какую силу F прикладывают к концу ковра?



Решение:

Что происходит с механической энергией при движении по канату (или какому-то другому представителю гибкой связи) «точки перегиба»? На первый взгляд, кажется, что канат можно считать идеальным в том смысле, что при таком движении потери механической энергии не происходит. Но это не так!

Когда конец ковра, к которому приложена сила, пройдет путь L, точка перегиба ковра пройдет путь $L/2$, т. е. она движется не со скоростью v, а со скоростью $u = v/2$. За время $\triangle t$ в движение вовлекается участок ковра длиной $\triangle l = u\triangle t$ и массой $\triangle m = \rho u \triangle t$. Исходя из второго закона Ньютона, получим: $F = \dfrac{\triangle p}{\triangle t} = \dfrac{\triangle(mv)}{\triangle t} = \dfrac{\triangle m}{\triangle t} v + m\dfrac{\triangle v}{\triangle t} = v\dfrac{dm}{dt} = v\rho u = \dfrac{\rho v^2}{2}$ (так как движение с постоянной скоростью).

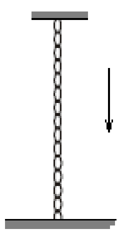
Нам известны все параметры, описывающие движение ковра. Рассмотрим разные члены в балансе энергии в тот момент, когда ковер сложен вдвое. К этому моменту точка приложения внешней силы F пройдет, как уже сказано, путь L. Значит, этой силой будет совершена работа: $A = FL = \dfrac{\rho v^2}{2} L$.

Теперь сосчитаем кинетическую энергию движущейся части (т. е. половины) ковра: $E_k = \dfrac{L}{2}\rho\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{1}{2}A$.

Мы получили, что ровно половина работы внешней силы потеряна. Такой вот удивительный результат! Отметим здесь то, что массивные гибкие связи нельзя считать идеальными — при движении точки перегиба мы обязательно теряем заметную часть механической энергии. Но, подчеркнем, речь идет именно о массивных связях — к «невесомым» нитям, связывающим грузы в школьных задачах, всё это отношения не имеет.

Ответ: $F = \dfrac{\rho v^2}{2}$.

Задача №7 Абсолютно гибкая однородная цепочка массой m и длиной l висит вертикально над поверхностью стола, подвешенная за верхний конец. Нижний конец цепочки касается стола. Верхний конец отпускают. Доказать, что в любой момент времени до тех пор, пока вся цепочка не упадет на стол, ее сила давления на поверхность стола равна утроенному весу лежащей на столе части цепочки.



Решение:

Пусть к моменту $t : (t \leq (2l/g)^{1/2})$ длина лежащей на столе части цепочки равна x, сила давления на стол этой части, т. е. её вес, — $G(x)$. Очевидно, что (1) $G(x) = mgx/l$.

Пусть за малый промежуток времени от t до $t + \triangle t$ на стол падает часть цепочки длиной $\triangle x$. Масса отрезка $\triangle x$ равна величине $\triangle m = m\triangle x/l$, а скорость падения $v = gt = (2gx)^{1/2}$, так как элемент $\triangle x$ находился в свободном падении время t и прошел при этом путь x. Величины $v, \triangle t$ и $\triangle x$ связаны соотношением $\triangle t = \triangle x/v$.

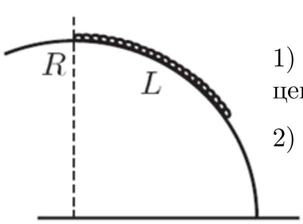
Воспользуемся вторым законом Ньютона в форме: (2) $\triangle mv = F\triangle t$, где F — сила, действующая со стороны стола на элемент $\triangle x$ и приводящая к остановке последнего.

Подставляя в выражение (2) значения $v, \triangle m$ и $\triangle t$, находим, что (3) $F = 2mgx/l$. На основании третьего закона Ньютона можно утверждать, что и элемент цепочки с силой F действует на стол. Полную силу давления на стол получим, суммируя величины (1) и (3): $F + G(x) = 3mgx/l = 3G(x)$.

Ч.т.д.

Задача №8 (Цепочка на сфере)

Однородная цепочка длины L закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиуса R, при $L = \pi R/3$. Верхний конец цепочки освобождают.

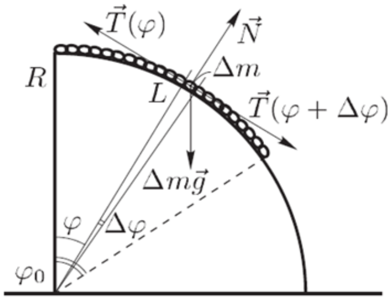


1) С каким ускорением a (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки?

2) В каком месте цепочки сила натяжения T сразу после освобождения будет максимальной?

Решение:

Рассмотрим малый элемент цепочки длины: $\triangle L = R\triangle\varphi$. Его масса: $\triangle m = \rho\triangle L$. На него действуют силы натяжения $\overrightarrow{T}(\varphi+\triangle\varphi)$ и $\overrightarrow{T}(\varphi)$, сила нормального давления $\overrightarrow{N}$ и сила тяжести $\overrightarrow{F_m} = \triangle m\overrightarrow{g}$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную: $\triangle ma_\tau = T(\varphi+\triangle\varphi) - T(\varphi) + \triangle mg\sin\varphi$.



Касательное ускорение всех элементов цепочки одинаково. Нормальное ускорение равно нулю, так как сразу после освобождения все её элементы имеют нулевую скорость.

Если просуммировать левые и правые части уравнения (15) по всей длине цепочки и принять во внимание, что на свободных концах натяжение обращается в ноль, то получим: $\rho Ra_\tau\sum\triangle\varphi = \rho Rg\sum\sin\varphi\triangle\varphi$.

Сила натяжения исключилась в соответствии с третьим законом Ньютона, так как это внутренняя сила системы. Переходя к пределу $\triangle\varphi\to 0$, получим: $a_\tau\dfrac{L}{R} = g\displaystyle\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi d\varphi = g(1-\cos\varphi_0)$, где $\varphi_0 = L/R$.

Таким образом: $a_\tau = g\sin\varphi_{max} = g\dfrac{L}{R}\left(1-\cos\dfrac{L}{R}\right)$. При $L/R = 2\pi/6 = \pi/3$ получим, что $a_\tau = \dfrac{3}{2\pi}g$.

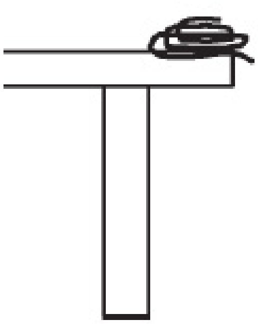
При ответе на второй вопрос следует учесть, что в том сечении, где сила натяжения T цепочки наибольшая, $\triangle T = T(\varphi+\triangle\varphi) - T(\varphi) = 0$. Обозначим положение малого элемента цепочки, находящегося в месте с наибольшим натяжением, через φ_{max}. Ускорение этого элемента создаётся только проекцией силы тяжести на касательную:

$$a_\tau = g\sin\varphi_{max} = g\frac{R}{L}\left(1-\cos\frac{L}{R}\right)$$

Следовательно, $\sin\varphi_{max} = \dfrac{R}{L}\left(1-\cos\dfrac{L}{R}\right)$. При $L/R = \pi/3$ получим, что $\sin\varphi_{max} = 3/(2\pi) \approx 0,48 \approx 0,5$. Отсюда $\alpha_{max} \approx 30^\circ$. Таким образом, точка, в которой натяжение максимально, находится приблизительно в середине цепочки.

Ответ: смотри решение.

Задача №9 (Задача Кейли) Тяжелая цепь свернута в клубок на самом краю стола, а одно звено свешивается за край стола. Как будет двигаться конец цепи, предоставленной самой себе?



Решение:

Будем отсчитывать вертикальную координату конца цепи x вниз от края стола. Запишем уравнение для движущегося участка цепи длиной x. Пусть масса единицы длины цепи равна ρ. Тогда движущийся участок имеет массу $m = \rho x$, на него действует сила тяжести ρgx, за единицу времени масса этого участка увеличивается на ρv. Скорость элемента цепи, лежащего на столе, относительно движущегося участка цепи равна $u_x = -v$. Исходя из второго закона Ньютона, получим: $F = \dfrac{\triangle p}{\triangle t} = \dfrac{\triangle(mv)}{\triangle t} = \dfrac{\triangle m}{\triangle t}v + m\dfrac{\triangle v}{\triangle t} = \rho x g - \rho v^2$, теперь можно записать уравнение для функции $x(t)$, учтём то, что $v(t) = x'(t)$, тогда получим: $xx'' = xg - x'^2$. Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение второго порядка. Увы, решение этого уравнения сильно выходит за рамки школьной программы, поэтому для его поиска воспользуемся физическим подходом.

Зададимся вопросом: какого типа движение может совершать свешивающийся участок цепи? О равномерном не может быть и речи. В качестве следующего варианта можно предположить, что движение равноускоренное.

Предположим, что свешивающийся со стола участок цепи движется с неким неизвестным нам пока постоянным ускорением a ($a < g$). Это предположение может показаться слишком смелым, но ведь мы ничем не рискуем — если оно неправильно, мы придем к противоречию и тогда будем придумывать что-нибудь другое. Итак, пусть $x'' = a =$const.

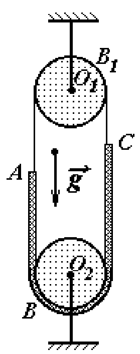
Тогда $x' = at, x = \dfrac{at^2}{2}$. Подставим эти соотношения в дифференциальное уравнение и после алгебраических преобразований получим: $a = \dfrac{g}{3}$

Таким образом, наше предположение подтвердилось — конец цепи движется с постоянным ускорением, то есть мы решили задачу Кейли.

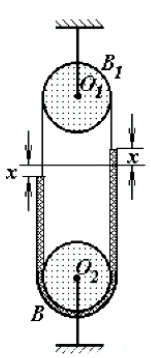
Почему же сила тяжести сообщает нашей цепи ускорение, меньшее g? На очень наивном языке можно было бы ответить, что часть силы тяжести тратится на приведение в движение покоящихся до этого элементов цепи.

Ответ: равноускоренно, с ускорением $a = \dfrac{g}{3}$.

Задача №10 (Колебание цепочки) Тонкая гибкая цепочка ABC массой m и длиной l соединена с невесомой нитью AB_1C. Нить переброшена через неподвижный блок O_1. Цепочка — через неподвижный блок O_2. Блоки невесомы, трения нет. Систему вывели из положения равновесия. Приподняв один из концов цепочки. Найдите период колебаний цепочки.



Решение:



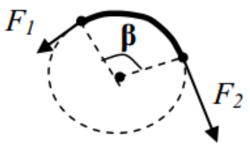
Рассмотрим смещение правого конца цепочки на величину x вверх.
При этом потенциальная энергия системы возрастает на величину: (1) $\triangle U = 2\dfrac{m}{l}xg\dfrac{x}{2} = \dfrac{mg}{l}x^2$.

Как видим из (1), $\triangle U$ пропорциональна квадрату смещения из положения равновесия, что является достаточным условием гармоничности колебаний.

Закон сохранения энергии для движения цепочки: (2) $\dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{mgx^2}{l} = E$, что совпадает по форме с аналогичной зависимостью для пружинного маятника: (3) $\dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = E$, где E — механическая энергия осциллятора. Сравнивая (2) и (3), получим ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{2mg}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

Задача №11 (Край стола) Гибкая цепочка длины L и массы m лежит на горизонтальной поверхности стола. Край стола представляет собой полуокружность радиуса R ($R \ll L$). Коэффициент трения цепочки о стол равен $\mu = \dfrac{2}{\pi}$.



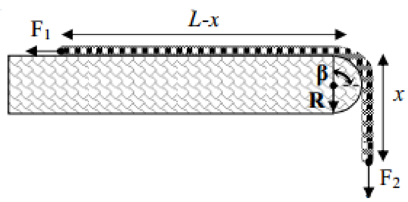
Определите минимальную длину цепочки, свисающую с края стола, при которой цепочка начинает соскальзывать без учета взаимодействия цепочки с краем стола.

При протягивании цепочки по закруглению сила натяжения цепочки изменяется по закону: $F_2 = F_1 e^{\nu\beta}$

Определите минимальную длину цепочки, свисающую с края стола, при которой цепочка начинает соскальзывать с учетом взаимодействия цепочки с краем стола.

Решение:

Из условия равновесия цепочки, $\dfrac{m}{L}x_1 g = \mu\dfrac{m}{L}(L - x_1)g$, следует, что максимально возможная длина свисающей части цепочки равна: $x_1 = \dfrac{L}{\dfrac{1}{\mu}+1} = \dfrac{L}{2,57} \approx 0,39L$.



Далее, так как $R \ll L$, то массой цепочки на изгибе стола можно пренебречь: $\triangle m = \dfrac{m}{L}R\dfrac{\pi}{2} \approx 0$.

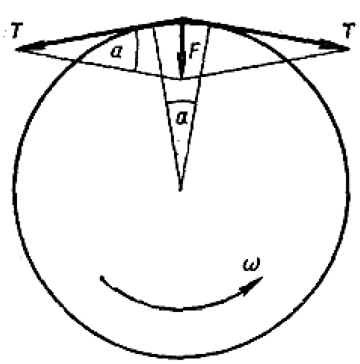
Тогда условие равновесия с учётом силы трения приобретёт вид: $\dfrac{m}{L}x_2 g = \mu\dfrac{m}{L}(L - x_2)g \cdot 2,7^{\mu\beta}$, где $\beta = \pi/2$.

Подстановка численных значений даёт результат: $x_2 = \dfrac{L}{\dfrac{1}{\mu 2,7^{\mu\beta}}+1} = \dfrac{L}{\dfrac{\pi}{2\cdot 2,7}+1} = \dfrac{L}{1,582} \approx 0,63L$.

Учёт действия края стола на цепочку увеличивает значение x более чем в полтора раза!

Ответ: смотри решение.

Задача №12 (Резиновое кольцо) Коэффициент жесткости резинового жгута, длиной которого l и масса m, равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определите радиус вращающегося кольца.



Решение:

Обозначим через L длину вращающегося кольца ($L = 2\pi R$). Рассмотрим небольшой участок кольца длиной $\triangle L$ и массой $\triangle m = \dfrac{m}{L}\triangle L$.

На выделенный участок с двух сторон действуют силы $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$ направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю ($T_1 = T_2$). Их равнодействующая $\overrightarrow{F}$ направлена по радиусу к центру кольца и сообщает рассматриваемому участку центростремительное ускорение: $a = \omega^2 R$.

Из рисунка видно, что $F = 2T\sin(\alpha/2)$.

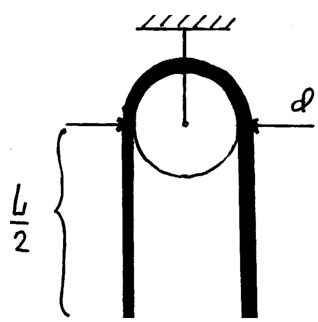
Запишем уравнение движения выделенного участка: $F = \omega^2 R\triangle m$, или (1) $2T\sin\dfrac{\alpha}{2} = \omega^2 R\dfrac{m\triangle}{L}$. Поскольку $T = k(L - l), L = 2\pi R$ и при малых углах $\sin\alpha/2 \approx \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\triangle}{2R}$, то из равенства (1) получаем: $k(2\pi R - l)\dfrac{\triangle L}{2R} = \dfrac{\omega^2 m}{2\pi}\triangle L$. Отсюда $R = \dfrac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}$.

Из этой формулы следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ кольцо должно неограничено растягиваться, пока выполняется закон Гука ($T \sim \triangle l$). Но закон Гука нарушится, конечно, уже при небольших $\triangle l$. Практически при такой скорости вращения кольцо разрушится.

Ответ: $R = \dfrac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}$.

В задаче под номером №1 мы написали, что пренебрежём явлениями, происходящими в прилегающих к блоку частях цепочки. Дело в том, что если мы учитываем наличие у неё массы, то также нужно учитывать и эти явления. Зададимся теперь вопросом: насколько сильно повлияют эти явления на количественный ответ в задаче. Для этого рассмотрим следующую задачу, где мы это всё учтём.

Задача №13 Тяжёлый и гибкий трос массой m и длиной L перекинут через лёгкий блок и висит почти симметрично. Диаметр блока d значительно меньше длины нити, т.е. $d \ll L$. Чему равна скорость троса в момент, когда он отрывается от блока?



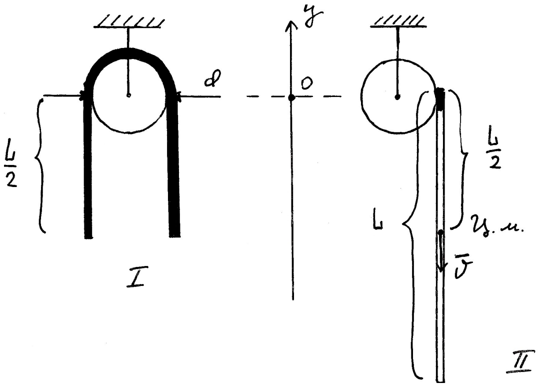
Решение:

Как видим в этой задаче мы должны учесть массу троса в отличие от массы блока, а также его гибкость, что означает, что сила натяжения в любой точке троса направлена по касательной к тросу. Рассмотрим энергетический подход. Изменение полной механической системы равно сумме работ сил сопротивления, которые по умолчанию равны нулю в нашем случае и работе внешних, в энергетическом смысле сил, у нас в эту роль играет сила реакции опоры со стороны блока, однако её мощность равна нулю в силу того, что сила реакции опоры перпендикулярна скорости движения троса в точке касания:

$$\triangle E = A_{силсопротив} + A_{внеш}$$

Следовательно изменение механической энергии равно нулю:

$$\triangle E = 0 \ \ \Rightarrow \ \ E = \text{const}$$



Если известно, что полная механическая энергия сохраняется, то выберем два состояния, составим уравнения, и приравняем их энергии.

Рассмотрим соответственно энергии в состояниях I и II: $E(\text{I}) = E(\text{II})$.

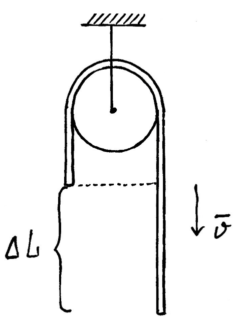
Так как в состоянии I никакого движения нет, то механическая энергия представлена только потенциальной энергией, а она для протяженного тела определяется центром масс, который имеет координату $y = -\dfrac{L}{4}$, имеем:

$$E(\text{I}) = mg\left(-\frac{L}{4}\right) = -\frac{mgL}{4}.$$

Энергия в состоянии II равна: $E(\text{II}) = \dfrac{mv^2}{2} + mgy_{ц.м.}$, где $y_{ц.м.} = -\dfrac{L}{2}$, получаем:

$$E(\text{II}) = \frac{mv^2}{2} + mgy_{ц.м.} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgL}{2} \ \ \Rightarrow \ \ -\frac{mgL}{4} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgL}{2}, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{gL}{2}}.$$

Заметим, что это решение ошибочно, так как мы неправильно трактуем понятие отрыва. Отрыв — это не тогда, когда исчезает касание между тросом и блоком, это тогда, когда между ними исчезает взаимодействие. Понятно, что без касания нет взаимодействия, но вполне может быть, что касание есть, а взаимодействия нет. На самом деле отрыв — это когда впервые исчезает сила реакции опоры. Мы все знаем, что на выпуклом мосту машина с определённой скоростью может оторваться от моста, аналогичная ситуация и у нас в задаче.

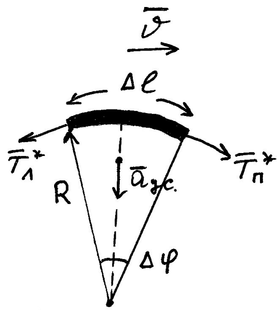


Подумаем, сколько мы можем составить уравнений. Кроме скорости, становится неизвестными разность длин $\triangle L$, свисающих частей троса в момент отрыва.

Значит требуется 2 уравнения для 2-ух неизвестных. Так как ЗСЭ даёт только одно уравнение, то надо лезть в дебри динамики.

С динамической точки зрения трос делится на две части: участки, которые свешиваются справа и слева от блока — это одна часть, а другая — это та, которая прилегает к блоку.

Формирование силы натяжения нити на этих частях разное, но в местах их встречи силы одинаковы согласно 3-ему закону Ньютона.



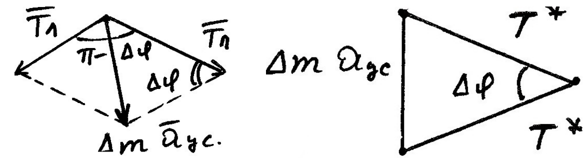
Это даёт надежду на то, что исследуя формирование силы натяжения на разных частях троса, мы получим недостающие уравнения. Сначала рассмотрим динамическое состояние маленькой части длиной $\triangle l$, соприкасающейся с блоком, участка троса в момент отрыва.

На него действуют соседние участки троса, слева и справа, а также сила тяжести Земли и сила реакции блока — как опоры. Но в момент отрыва сила реакции равна нулю.

Малый размер блока означает, что радиус кривизны траектории нашего участка

$$R = \frac{d}{2} \ll L \ \ \Rightarrow a_{центр} = \frac{v^2}{R} \gg a_{касательное} \text{ или } g$$

Пренебрежимость $a_{касат}$ означает равенство сил натяжения слева и справа. Также мы можем не учитывать силу тяжести.

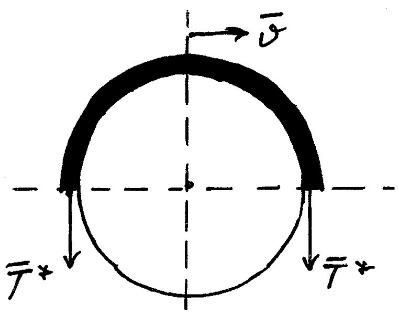


Теперь $\triangle\varphi = \dfrac{\triangle l}{R}$, а угол между $T_л$ и $T_п$ равен $\pi - \triangle\varphi$, как тупой и острый с взаимно перпендикулярными сторонами.

Запишем 2-ой закон Ньютона для участка $\triangle l$:

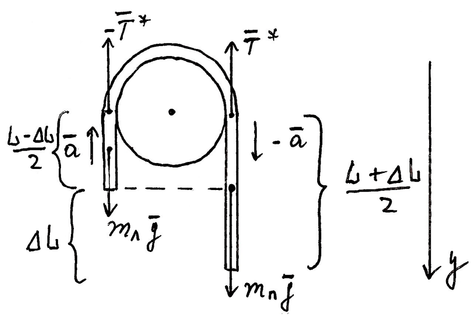
$\overrightarrow{T_л}^* + \overrightarrow{T_п}^* = \triangle m \overrightarrow{a}_{центр}$, так как $\triangle\varphi \ll 1$, то $\triangle m a_{центр} = T^*\triangle\varphi$, положим $\rho = \dfrac{\triangle m}{\triangle l}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle m = \rho\triangle l \Rightarrow \rho\triangle l\dfrac{v^2}{R} = T^*\dfrac{\triangle}{R} \Rightarrow T^* = \rho v^2$.



Это выражение справедливо для всех прилегающих к блоку точек троса, в том числе и для крайних точек свисающих частей. Значит по краям прилегающего к блоку участка троса силы натяжения одинаковы, следовательно, такие же силы действуют на верхних концах свисающих частей троса.

В момент отрыва, от 1-го свисающего участка отняли длину $\dfrac{\triangle L}{2}$, а в правом прибавили $\dfrac{\triangle L}{2}$. Здесь нам опять нужна T^*.



Запишем 2-ой закон Ньютона для левой и правой свисающих частей:

$\begin{cases} m_л\overrightarrow{g} + (-\overrightarrow{T}^*) = m_л\overrightarrow{a} \\ m_п\overrightarrow{g} + (-\overrightarrow{T}^*) = m_п(-\overrightarrow{a}) \end{cases}$, так как трос нерастяжимый и движение прямолинейное, то $\overrightarrow{a_л} = \overrightarrow{a_п}$

Разделим первое уравнение на второе, получим:

$\dfrac{T^* - m_л g}{m_п g - T^*} = \dfrac{m_л}{m_п} \Rightarrow T^* = \dfrac{2m_п m_л g}{m_п + m_л} = \dfrac{2m_п m_л g}{m} = \dfrac{2l_п\rho l_л\rho g}{L\rho} = \dfrac{2l_п l_л g\rho}{L} = \dfrac{2g\rho}{L}\dfrac{L-\triangle}{2}\dfrac{L+\triangle L}{2} = \dfrac{g\rho}{L}\dfrac{L^2-\triangle L^2}{2} = \dfrac{g\rho}{2L}(L^2-\triangle L^2) \Rightarrow \rho v^2 = \dfrac{g\rho}{2L}(L^2-\triangle L^2)$

$\Rightarrow v^2 = \dfrac{g}{2L}(L^2 - \triangle L^2)$

Запомним это выражение: $v^2 = \dfrac{g}{2L}(L^2 - \triangle L^2)$.

Теперь $E(\mathrm{I}) = -\dfrac{mgL}{4} = -\dfrac{\rho LgL}{4} \Rightarrow E(\mathrm{I}) = -\dfrac{\rho gL^2}{4}$, аналогично найдём:

$E_к(\mathrm{II}) = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{\rho Lv^2}{2}$ и $E_п(\mathrm{II}) = m_л g\cdot y_{ц.м._л} + m_п g\cdot y_{ц.м._п} = \rho\dfrac{L-\triangle L}{2}g(-\dfrac{L-\triangle}{4}) + \rho\dfrac{L-\triangle L}{2}g\left(-\dfrac{L+\triangle L}{4}\right) =$

$= -\dfrac{g\rho}{8}\left((L-\triangle L)^2 + (L+\triangle L)^2\right) = -\dfrac{g\rho}{8}(L^2+\triangle L^2)\cdot 2 = \dfrac{-g\rho}{4}(L^2+\triangle L^2)$, таким образом: $E(\mathrm{II}) = \dfrac{\rho L^2 v^2}{2} - \dfrac{g\rho}{4}(L^2+\triangle L^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(\mathrm{I}) = E(\mathrm{II}) \Rightarrow \frac{\rho Lv^2}{2} - \frac{g\rho}{4}(L^2+\triangle L^2) = -\frac{g\rho L^2}{4} \Rightarrow \frac{\rho Lv^2}{2} = \frac{g\rho}{4}\triangle L^2 \Rightarrow v^2 = \frac{g}{2L}\triangle L^2$$

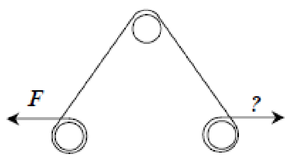
Приравниваем полученные выражения для скорости: $v^2 = \frac{g}{2L}(L^2 - \triangle L^2)$ и $v^2 = \frac{g}{2L}\triangle L^2$, получаем: $v = \frac{\sqrt{gL}}{2}$.

Заметим, что окончательный результат отличается от того, что мы получили в первый раз в $\sqrt{2}$ раз!

Ответ: $v = \frac{\sqrt{gL}}{2}$.

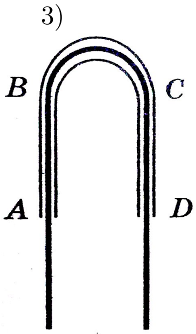
Упражнения.

1) (Движение гибкого троса) Канат намотан на три цилиндрические тумбы так, как показано на рисунке. Корабль натягивает канат с силой F. Какую силу должен приложить матрос, чтобы удержать корабль? Коэффициент трения троса о тумбу равен k. Радиусы тумб R, они расположены в вершинах равностороннего треугольника.



2) Как будет двигаться цепь (или канат) в задаче №15 под действием силы тяжести, если, наоборот, элементы цепи останавливаются?

3)



(Соскальзывающий канат) Симметричная жестко закрепленная труба состоит из трех частей: двух прямых вертикальных участков AB и CD и соединяющего их участка BC, имеющего форму полуокружности. Через трубу пропущен однородный тяжелый канат, который может двигаться внутри ее без трения. В начальный момент времени его концы находятся на одной высоте. Вследствие пренебрежимо малого внешнего воздействия канат начинает соскальзывать в одну из сторон. Определите ускорение a концов каната и долю k длины каната, на которую опустится один из его концов в тот момент, когда вертикальная составляющая силы, действующей на канат со стороны трубы, станет равна нулю. Длиной изогнутого участка трубы можно пренебречь по сравнению с длиной вертикальных кусков каната в любой момент времени.

Литература

[1] Сохранение импульса, уравнение Мещерского и банджи-джампинг, А. Рыбаков,«Квант» №3, 2012.

[2] XLIV Всероссийская олимпиада школьников по физике Заключительный этап Теоретический тур г. Белгород, 2010 9 класс.

[3] Григорьев Ю. М., Муравьёв В. М., Потапов В. Ф. Олимпиадные задачи по физике, Международная олимпиада Туймаада.

[4] Слободецкий, Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике (1982).

[5] Санкт-Петербургские олимпиады по физике (physolymp.spb.ru).

[6] Окружные, региональные этапы по физике, Москва.

[7] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.