Московский физико-технический институт

Зеркала
и отражающие поверхности.

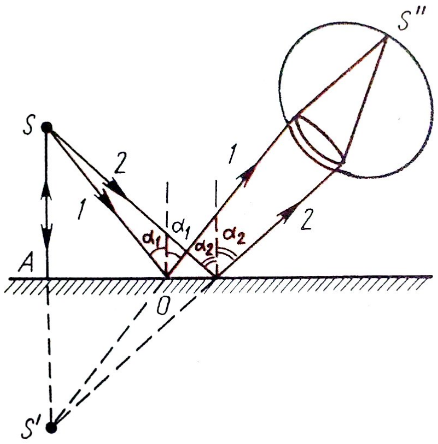
Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Плоское зеркало.

Построение изображения в плоском зеркале основано на использовании закона отражения света. Пусть над плоским зеркалом (см. рисунок) находится точечный источник света S, освещающий это зеркало. Из всего светового потока выберем два луча 1 и 2, которые падают на зеркало под различными углами α_1 и α_2. После отражения от зеркала эти лучи, как видно из рисунка, расходятся. Продолжения лучей пересекаются в точке S', находящейся по другую сторону зеркала относительно источника. Нашему глазу будет казаться, что лучи 1 и 2 выходят из этой точки, как будто там находится источник света. Следовательно, точка S" воспринимается нами как изображение точечного источника S.

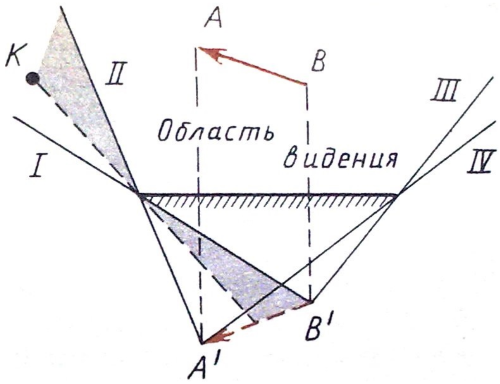


Изображение, которое получается за счёт пересечения не самих лучей, а их продолжений, называется мнимым. Такое название связано с тем, что в точку S' не попадает энергия от источника света.

Почему же мы видим мнимое изображение? Дело в том, что хрусталик глаза и стекловидное тело собирают расходящийся пучок на сетчатке в точке S''. Аналогично расходящийся пучок может собрать объектив фотоаппарата. Именно свойство линз собирать расходящийся пучок позволяет видеть мнимое изображение, заглянуть в "Зазеркалье". Оптика фотоаппарата собирает расходящийся пучок, поэтому фотоаппарат также способен фиксировать мнимое изображение.

Совсем не обязательно строить изображение источника или предмета в плоском зеркале, пользуясь двумя или большим числом лучей. Из равенства треугольников SAO и $S'AO$ следует, что $SA = S'A$. Значит, возможен более простой способ построения: на перпендикуляре, опущенном на зеркало из источника, надо отложить отрезок $S'A = SA$. Так мы найдём место мнимого изображения S'. Здесь мы, по существу, воспользуемся симметричностью предмета и изображения относительно зеркала.

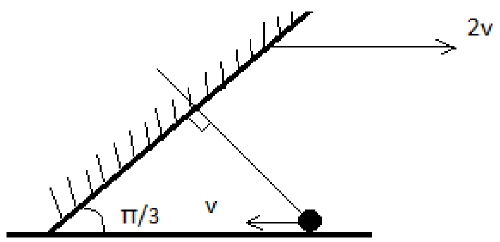
Дополнительно: Из практики хорошо известно, что не из любой точки можно увидеть изображение в зеркале. На рисунке показано изображение предмета AB в зеркале.



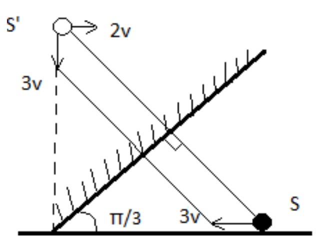
Из рисунка видно, что полностью изображение наблюдается только в из так называемой области видения, ограниченной прямыми $2 - 3$. Есть ещё две области 1-2 и 3-4, из которых видна только часть предмета. Например, из точки K видна только часть изображения предмета. Это- области частичного видения. За пределами прямых 1 и 4 изображение не видно.

Примеры.

Задача №1 По столу катится шарик со скоростью v. В противоположном направлении со скоростью $2v$ перемещают поступательно плоское зеркало. Поверхность зеркала составляет угол $\pi/3$ с поверхностью стола. Найдите скорость шарика относительно зеркала и покажите её направление. С какой скоростью (по модулю) относительно стола перемещается изображение шарика в зеркале?



Решение $\mapsto$ Ясно, что скорость шарика относительно зеркала равна $3v$. Теперь перейдём в систему отсчёта, связанную с зеркалом и рассмотрим мнимое изображение.

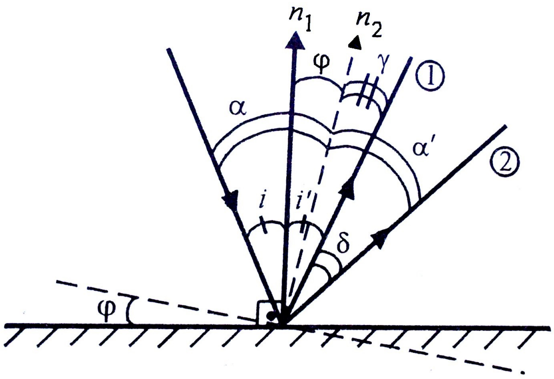


Из рисунка видно, что $v_{отн} = \sqrt{(2v)^2 + (3v)^2 + 2 \cdot 2v \cdot 3v \cdot \cos(\pi/3)} = \sqrt{19}v$.

Ответ: Относительно зеркала $v' = 3v$, относительно земли $v_{отн} = \sqrt{19}v$.

Задача №2 Плоское зеркало повернули вокруг оси, проходящей через точку падения луча и перпендикулярно плоскости падающего и отражённого лучей. На какой угол повернули зеркало, если отраженный от него луч повернулся на угол $\delta = 42°$?

Решение $\mapsto$ На рисунке показано исходное положение зеркала и положение зеркала, повёрнутого на угол φ.



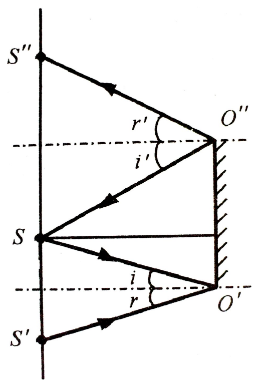
Законы отражения света для этих двух положений имеют вид: $\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ i = i' \end{cases}$

Найдём угол δ между двумя положениями отражённых лучей: $\delta = \alpha' - \gamma = \alpha' - (i' - \varphi) = \alpha - i' + \varphi = i + \varphi - i' + \varphi = 2\varphi$.

Следовательно, угол поворота зеркала $\varphi = \delta/2 = 21°$

Ответ: $\varphi = \delta/2 = 21°$.

Задача №3 На поверхности плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определите площадь светового пятна, образованного на экране отражёнными от зеркала лучами.

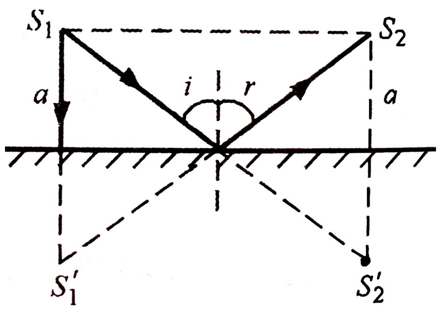


Решение $\mapsto$ Так как при отражении света угол падения равен углу отражения, а зеркало расположено параллельно экрану, то линейные размеры светового пятна от зеркала будут вдвое больше размеров самого зеркала (см. рисунок). Поэтому площадь светового пятна S_n будет в 4 раза больше площади зеркала. $S_n = \sqrt{3}a^2 \approx 692 см^2$.

Ответ: $S_n = \sqrt{3}a^2 \approx 692 см^2$.

Задача №4 Два точечных источника света находятся на одном и том же расстоянии $a = 20$ см от поверхности плоского зеркала. Расстояние от одного из источников до изображения другого равно $b = 50$ см. Определите расстояния между источниками.

Решение $\mapsto$ Из закона отражения света следует, что изображение S_1' и S_2' источников S_1 и S_2 находятся на тех же расстояниях от поверхности зеркала, что и сами источники (см. рисунок), то есть $S_1S_1' = S_2S_2' = 2a$, $S_1S_2' = S_1'S_2 = b$.

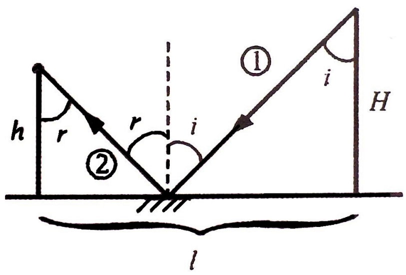


Поэтому расстояние между источниками $L = \sqrt{b^2 - 4a^2} = 30$ см.

Ответ: $L = \sqrt{b^2 - 4a^2} = 30$ см.

Задача №5 Человек, рост которого $h = 1.75$ м, находится на расстоянии $l = 6$ м от столба высотой $H = 7$ м. На каком расстоянии от себя человек должен положить на Землю горизонтальное маленькое плоское зеркало, чтобы видеть в нём изображение верхушки столба?

Решение $\mapsto$ В соответствии с законом отражения света луч 1, падающий из вершины столба на землю (см. рисунок), и луч 2, отражённый от зеркала и падающий в глаз человека, лежат в одной плоскости, а углы падения i и отражения r равны:



Если x — расстояние от человека до зеркала, то как видно из рисунка, $\operatorname{tg} i = \dfrac{l - x}{H} = \operatorname{tg} r = \dfrac{x}{h}$. Отсюда $x = \dfrac{hl}{H + h} = 1.2$ м.

Ответ: $x = \dfrac{hl}{H + h} = 1.2$ м.

Задача №6 Человек ростом $H = 1.8$ м видит Луну по направлению, составляющему угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом. На каком расстоянии от себя человек должен положить маленькое плоское зеркало, чтобы в нём увидеть отражение Луны?

Решение $\mapsto$ На рисунке без соблюдения масштаба показан ход лучей:

1 — прямой видимой Луны;

2 — падающего от Луны на зеркало;

3 — отражённого от зеркала и попадающего в глаз человека;

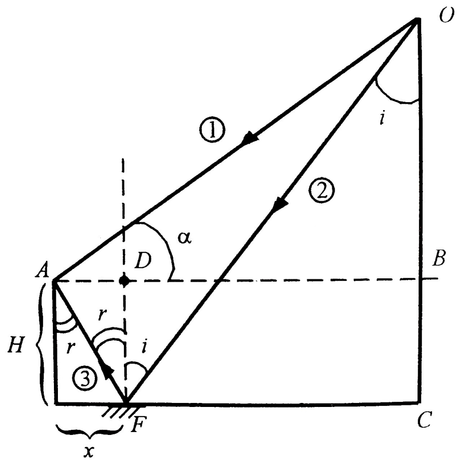
AB — прямая, параллельная горизонту;

OB — перпендикуляр, опущенный из Луны на прямую AB.

Обозначим L — расстояние от глаза человека до Луны, x — расстояние от человека до зеркала.

В соответствии с законом отражения света $i = r$. Следовательно, $\operatorname{tg} r = \dfrac{x}{H} = \operatorname{tg} i = \dfrac{FC}{OC} = \dfrac{AB - AD}{OC} = \dfrac{L\cos\alpha - x}{L\sin\alpha + H}$.

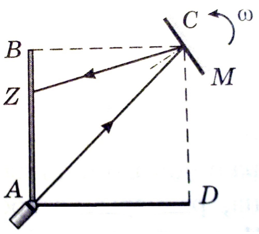
Решение этого уравнения относительно x даёт $x = \dfrac{HL\cos\alpha}{L\sin\alpha + 2H}$.



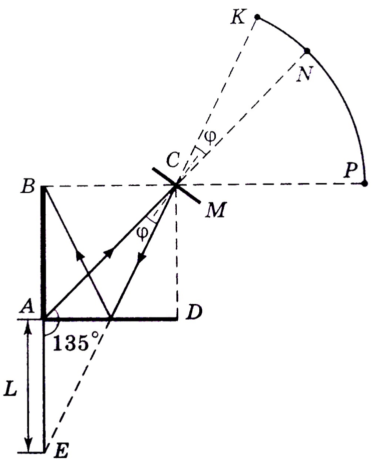
Поскольку $2H \ll L\sin\alpha$, то $x \approx H \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{H}{\sqrt{3}} \approx 1$ м.

Ответ: $x \approx H \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{H}{\sqrt{3}} \approx 1$ м.

Задача №7 Экран AB и плоское зеркало AD образуют две боковые грани прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Вдоль ребра C проходит ось вращения небольшого плоского зеркала M, которое равномерно вращается и совершает один оборот за время $T = 12$ мин. Из небольшого отверстия в ребре A в центр этого зеркала светит луч лазера. Вид сверху на эту систему показан на рисунке. В течение какого времени t лазерный зайчик Z скользит по экрану AB, если зеркало совершает один оборот?



Решение $\mapsto$ Лазерный зайчик может скользить по экрану AB в результате как отражения лазерного луча непосредственно от зеркала M, так и последовательного отражения от зеркала M и зеркала AD. Дуга KNP представляет собой геометрическое место изображений лазера, излучение от которых попадает на экран AB.



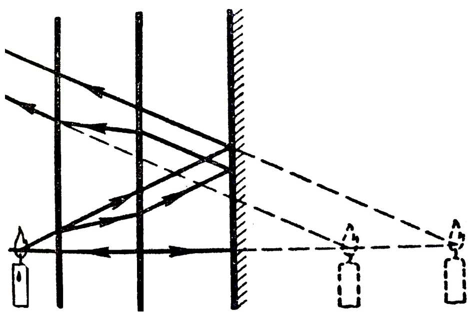
Угол $NCP = 45°$. Пусть длина экрана равна L. Тогда длина отрезка $EC = L\sqrt{5}$. Угол φ, равный углу NCK, найдём по теореме синусов: $\dfrac{L}{\sin\varphi} = \dfrac{L\sqrt{5}}{\sin 135°}$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\varphi \approx 18.4°$.

Следовательно, угловая длина дуги $KNP = 45° + 18.4° = 63.4°$, а угол поворота α зеркала M будет в 2 раза меньше, то есть $\alpha = 31.7°$. Искомое время движения зайчика по экрану найдём из пропорции $\dfrac{t}{T} = \dfrac{\alpha}{360°}$, откуда $t \approx 63$ с.

Ответ: $t \approx 63$ с.

Задача №8 В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдёт с этим изображением, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную пластинку?

Решение $\mapsto$ Нарисовав ход нескольких лучей, нетрудно убедиться в том, что после того, как между свечой и зеркалом поставили плоскопараллельную стеклянную пластинку, изображение свечи приблизится к зеркалу.

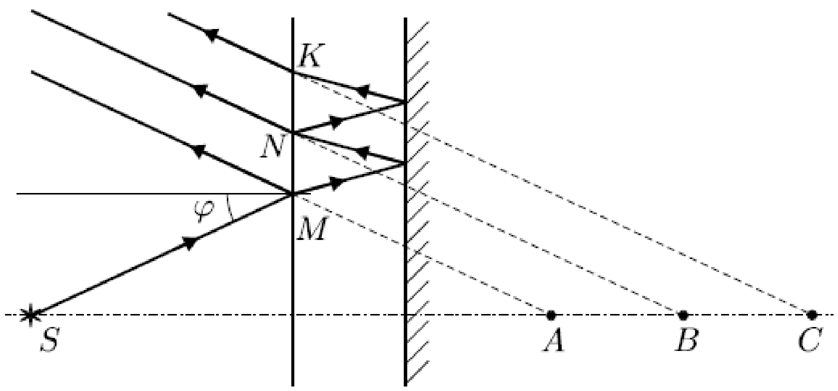


На рисунке показан ход лучей в отсутствии пластины и при её наличии.

Ответ: изображение свечи приблизится к зеркалу.

Задача №9 Если внимательно присмотреться к своему отражению, видимому в плоском стеклянном зеркале с посеребрённой задней поверхностью, то помимо основного изображения можно увидеть ещё два дополнительных изображения меньшей яркости. Как они будут располагаться относительно основного изображения? Толщина стекла равна d, показатель преломления n.

Решение $\mapsto$ Обычное плоское зеркало представляет собой стеклянную пластину с посеребрённой задней поверхностью. На рисунке приведена оптическая схема, поясняющая возникновение в таком зеркале основного изображения B и дополнительных изображений A и C (буквой S обозначен предмет, отражение которого наблюдается). Основное изображение возникает в результате отражения падающего света от посеребрённой поверхности, а дополнительные изображения — в результате отражения от передней поверхности пластины. Так как передняя поверхность отражает очень малую долю падающего на неё света, а задняя — наоборот, отражает практически весь свет, то изображение В получается гораздо ярче, чем изображения A и C. Заметим, что кроме этих двух дополнительных изображений, имеются и другие, связанные с наличием многократных отражений света внутри стеклянной пластины. Однако они имеют очень малую яркость при нормальном падении света на зеркало и видны, только если угол падения близок к 90°.



Определим, как будут располагаться дополнительные изображения A и C относительно основного. Пусть толщина стеклянной пластины d, показатель преломления стекла n. Если угол φ падения световых лучей на зеркало мал, то $MN \approx 2\varphi d = n \approx NK$, и $AB = BC \approx MN/\varphi = 2d/n$. Итак, эти дополнительные изображения будут располагаться впереди и позади основного на расстояниях $2d/n$ от него.

Ответ: впереди и позади основного на расстояниях $2d/n$ от него.

Задача №10 Если посмотреть на снег в солнечный зимний день, то можно увидеть, что снег «искрится». Считая, что поверхность снега состоит из хаотически расположенных плоских кристалликов со средним размером грани $d = 1$ мм, оцените среднее расстояние D между соседними блёстками. Как изменится D, если смотреть, закрыв один глаз? Угловой диаметр Солнца $\varphi = 0.5°$.

Решение $\mapsto$ Будем считать, что среднее расстояние между центрами граней соседних кристаллов снега $l \sim d$. На каждый из кристаллов падает свет Солнца в пределах угла $\varphi = 0.5° \approx 0.01$ рад. При этом кристалл отражает свет одной из своих граней в телесный угол $\Omega \sim \pi\varphi^2/4$. Так как кристаллы расположены на поверхности хаотически, то отражённый пучок может быть направлен произвольно в пределах телесного угла $\Omega = 4\pi$, то есть в один глаз попадает свет, отражённый от одной из $N_1 = \Omega/\omega \sim 16/\varphi^2 = 16 \cdot 10^4$ граней. Если же смотреть на снег двумя глазами, то хотя бы в один из них попадёт свет, отражённый от одной из $N_2 = N_1/2 = 8 \cdot 10^4$ граней.

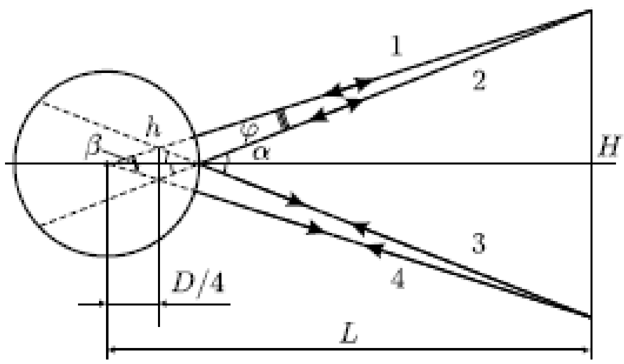
Для оценки расстояния между соседними кристаллами, свет от которых попадает в один глаз, будем считать, что все N_1 отражающих граней равномерно распределены по поверхности. Тогда на единицу длины на этой поверхности приходится $n_1 \sim \sqrt{N_1}$ отражающих граней, а среднее расстояние между гранями, отражающими свет в нужном направлении, составляет $D_1 \sim ln_1 \sim d\sqrt{N_1} \sim 4d/\varphi \approx$ 40 см. Аналогично для случая, когда на снег смотрят двумя глазами, $D_2 \sim d\sqrt{N_2} \sim 2\sqrt{2}d/\varphi \approx 28$ см. Полученные результаты являются, конечно, довольно грубыми оценками.

Интересно ответить ещё на один вопрос: на какое расстояние нужно переместить голову для того, чтобы одна блёстка, которую видит глаз, исчезла, а вместо неё появилась другая, в другом месте? Очевидно, что это расстояние определяется диаметром светового пятна, получающегося вблизи глаза при отражении света Солнца от снежинки. Если мы смотрим на снег стоя с расстояния $L \sim 2$ м, то диаметр этого пятна примерно равен $L\varphi \sim 2$ см, что примерно в 10 раз больше диаметра зрачка глаза, так что оценка искомого расстояния как раз и составляет около 2 см.

Ответ: смотри решение.

Задача №11 Вы смотрите с расстояния $L = 2$ м на своё отражение в ёлочном шарике диаметром $D = 10$ см. На каком расстоянии от вас должен стоять ваш двойник, чтобы вы видели его таким же маленьким, как ваше изображение в шарике?

Решение $\mapsto$ Пусть рост отражающегося человека равен $H \sim 2$ м, а размер его изображения $h(h \ll H)$. Для простоты рассуждений будем считать, что центр ёлочного шарика расположен на уровне половины роста человека. На рисунке приведён ход лучей, формирующих изображение.



Так как $D \ll L$, то угол φ между лучами, формирующими изображения головы и ног человека, очень мал (изображение головы лежит на пересечении продолжений лучей 1 и 3, а ног — 2 и 4). Поэтому углы α и β примерно одинаковы, а это означает, что изображение человека расположено на расстоянии $\approx D/4$ от центра шарика. Из подобия треугольников следует отношение:

$$\frac{H/2}{L} = \frac{h/2}{D/4}, \text{ откуда } h = \frac{HD}{4L}.$$

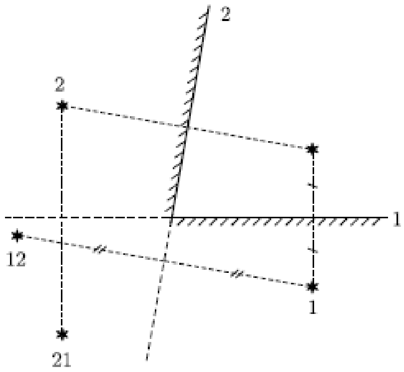
Так как $D \ll L$, то расстояние от человека до изображения примерно равно L. Поэтому угловой размер изображения человека в шарике $\varphi \approx \dfrac{h\cos\alpha}{L/\cos\alpha} = \dfrac{HD}{4L^2}\cos\alpha^2 = \dfrac{HD}{4L^2}\left(\dfrac{L}{\sqrt{L^2+(H/2)^2}}\right)^2 = \dfrac{HD}{4L^2+H^2}$.

Для того, чтобы человек видел своего двойника таким же маленьким, то есть под тем же углом, двойник должен стоять на таком расстоянии x от человека, чтобы выполнялось соотношение: $\varphi \cdot x \approx H$. Отсюда $x \approx \dfrac{H}{\varphi} = \dfrac{4L^2+H^2}{D} = 200$ м.

Ответ: $x \approx \dfrac{H}{\varphi} = \dfrac{4L^2+H^2}{D} = 200$ м.

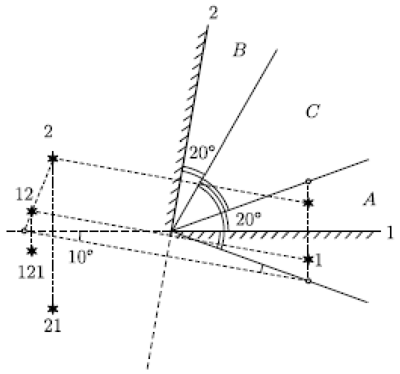
Задача №12 Два плоских зеркала образуют двугранный угол 80°, в котором находится точечный источник света. Сколько всего различных изображений источника можно увидеть?

Решение $\mapsto$ Если источник находится не очень далеко от биссектрисы двугранного угла, то наблюдаются четыре различных мнимых изображения (см. рис).



Они получаются при отражении света от первого зеркала (изображение 1), от второго (изображение 2), а также при отражении получившихся мнимых источников 1 и 2 в зеркалах 2 и 1 соответственно (изображения 12 и 21). Заметим, что источник может дать изображение только в том случае, если он находится перед отражающей поверхностью зеркала или её продолжением. Так как мнимые источники 12 и 21 находятся за продолжениями отражающих поверхностей зеркал 1 и 2, то свет от них больше отразиться не может.

Если источник приближать к поверхности какого-либо из зеркал (например, зеркала 1), то, как видно из рисунка, изображение 12 будет перемещаться в сторону плоскости зеркала 1, пересечёт её и окажется над продолжением его отражающей поверхности. При этом возникнет ещё одно мнимое изображение 121, получающееся при отражении мнимого источника 12 в зеркале 1.

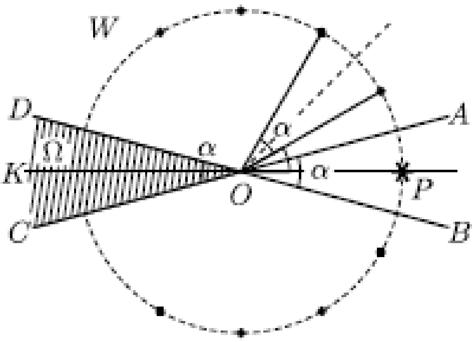


В этом случае всего будет наблюдаться пять различных мнимых изображений источника. Из построения видно, что мнимый источник 12 пересекает плоскость зеркала 1 тогда, когда источник света лежит в плоскости, составляющей с этим зеркалом угол $20°$. Аналогичные рассуждения можно провести и для случая приближения источника к зеркалу 2. Таким образом, если источник света находится внутри двугранного угла $20°$ от любого из зеркал (области A и B на рисунке), то наблюдается пять изображений, а в остальных случаях (область C, включая ограничивающие её плоскости) — четыре.

Ответ: смотри решение.

Задача №13* Два плоских зеркала образуют двугранный угол. Точечный источник света находится внутри этого угла и равноудалён от зеркал. При каких значениях угла α между зеркалами у источника будет ровно $N = 100$ различных изображений?

Решение $\mapsto$ Все изображения лежат на окружности с центром на ребре двугранного угла, образованного зеркалами, и проходящей через источник света P (см. рис.). Пусть α — угол между зеркалами, Ω — заштрихованная область (не включая границы), W — незаштрихованная область (включая границы). Совпадающие изображения будем считать, согласно условию, за одно изображение.



Изображения, лежащие под прямой AC, дают изображения в зеркале AO, которые лежат над прямой AC. Изображения, лежащие над прямой BD, дают изображения в зеркале BO, которые лежат под прямой BD. Отсюда следует, что изображения, лежащие в области W без границ, дают своё изображение; изображения, лежащие в Ω, не дают своих изображений.

Обозначим через α угол, который образуют лучи, проведённые из точки O к двум соседним изображениям. Из рисунка видно, что в области W лежит ровно $2\left[\dfrac{\angle POD}{\alpha}\right] = 2\left[\dfrac{\pi-(\alpha/2)}{\alpha}\right]$

изображений (квадратными скобками обозначена операция выделения целой части числа). При этом возможны три следующих случая.

1) В Ω не лежит ни одного изображения. Это имеет место тогда и только тогда, когда есть изображения, находящиеся на лучах OD и OC. Это условие эквивалентно тому, что $\dfrac{\pi-\alpha/2}{\alpha}$ является положительным целым числом. Тогда общее число различных изображений будет равно $N = 2\cdot\dfrac{\pi-\alpha/2}{\alpha}$.

Приравнивая в этом выражении $N=100$, получаем: $\alpha = \dfrac{2\pi}{N+1} = \dfrac{2\pi}{101}$.

2) В Ω лежит ровно одно изображение, находящееся на луче OK. Это имеет место тогда и только тогда, когда $\dfrac{\pi}{\alpha}$ является целым положительным числом. При этом общее число изображений будет равно $N = 2\left[\dfrac{\pi-(\alpha/2)}{\alpha}\right]+1$.

Это число не может быть равно 100 ни при каком α, так как является нечётным, то есть второй случай не удовлетворяет условию задачи.

3) В Ω лежат ровно 2 изображения. Это имеет место тогда и только тогда, когда $\dfrac{\pi-\alpha/2}{\alpha}$ и π/α не являются целыми положительными числами. Тогда общее число изображений будет равно

$N = 2\left[\dfrac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha}\right] + 2.$

Приравниваем в этом выражении $N = 100$, получаем $\left[\dfrac{\pi - \alpha/2}{\alpha}\right] = \dfrac{N-2}{2} = 49.$

Это уравнение эквивалентно неравенству $\dfrac{N-2}{2} = 49 \leq \dfrac{\pi - \alpha/2}{\alpha} < 50 = \dfrac{N}{2}$, откуда следует, что $\dfrac{2\pi}{N+1} = \dfrac{2\pi}{101} < \alpha \leq \dfrac{2\pi}{99} = \dfrac{2\pi}{N-1}$.

Учтя указанные выше условия, при которых возможен третий случай, получаем, что $\alpha = \dfrac{2\pi}{N} = 2\pi/100$ должен быть исключён из последнего неравенства.

Объединяя все случаи, получаем ответ: $\dfrac{2\pi}{101} < \alpha < \dfrac{2\pi}{100}; \dfrac{2\pi}{100} < \alpha \leq \dfrac{2\pi}{99}$.

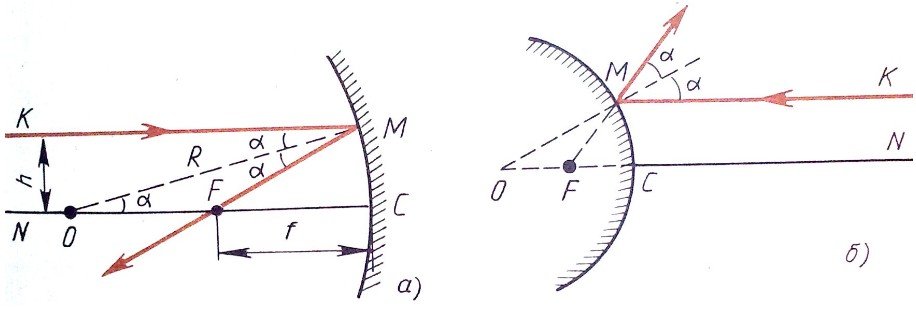
Ответ: $\dfrac{2\pi}{101} < \alpha < \dfrac{2\pi}{100}; \dfrac{2\pi}{100} < \alpha \leq \dfrac{2\pi}{99}$.

Сферическое зеркало.

Если взять в качестве отражающей поверхности часть внешней или внутренней поверхности зеркальной сферы, то получится сферическое зеркало. Его основные характеристики: главный фокус F, фокусное расстояние f, оптический центр, главная оптическая ось, оптическая сила.

Различают два типа сферических зеркал: вогнутые (у них отражающее покрытие нанесено на внутреннюю поверхность сферы) и выпуклые (у них отражающее покрытие нанесено на внешнюю поверхность сферы).

Фокусом F зеркала называется точка на оптической оси, через которую проходит после отражения от зеркала луч (или его продолжение), падавший на зеркало параллельно оптической оси. Найдём положение фокуса вогнутого зеркала. Для этой цели обратимся к рисунку а).



На зеркало падает луч KM параллельно оптической оси OC. В точке падения восстановим перпендикуляр к зеркалу- им будет радиус OM. Воспользовавшись законом отражения, строим луч MF, который проходит через точку F, являющуюся фокусом.

Очевидно, что $\angle COM = \angle KMO = \alpha$ как накрест лежащие при параллельных прямых. Но $\angle KMO = \angle FMO = \alpha$ по закону отражения. Следовательно, треугольник OFM является равнобедренным и отрезок $OF = \dfrac{OM}{2\cos\alpha} = \dfrac{R}{2\cos\alpha}$. Отсюда следует, что фокусное расстояние

$$f = CF = OC - OF = R - \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{R}{2}\left(2 - \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Учитывая, что $\sin\alpha = h/R$, получим окончательно: $f = \dfrac{R}{2}\left(2 - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) = \dfrac{R}{2}\left(2 - 1/\sqrt{1 - h^2/R^2}\right)$.

Мы видим, что в сферическом зеркале имеет место сферическая аберрация: фокусное расстояние оказывается различным для лучей, находящихся на разных расстояниях от оптической оси. Однако для параксиального пучка ($h \ll R$) условие фокусировки выполняется и фокусное расстояние вогнутого зеркала оказывается равным (1) $f = R/2$. (при $h \leq 0.1R$ это выражение справедливо с точностью, не меньшей 0.5 процента)

Оптическая сила зеркала — это величина, обратная фокусному расстоянию: $\varPhi = 1/f = 2/R$.

Как видно из рисунка б) у выпуклого зеркала фокус мнимый. Нетрудно убедиться, что и здесь для параксиального пучка справедливо условие (1).

Фокусное расстояние выпуклого зеркала принято считать отрицательным числом, то есть у выпуклого зеркала $f = -R/2$. Очевидно, что и оптическая сила выпуклого зеркала- число отрицательное.

Построение изображения в сферическом зеркале.

Для построения изображения точки в сферическом зеркале следует выбрать любые два луча из трёх стандартных:

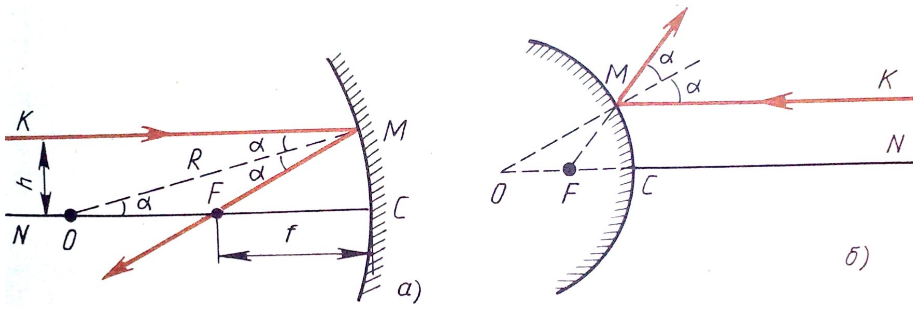
а) луч, проходящий через оптический центр зеркала 9центр сферы), называемый побочной оптической осью; после отражения от зеркала он опять проходит через центр;

б) луч, падающий на зеркало параллельно оптической оси; после отражения проходит через фокус зеркала;

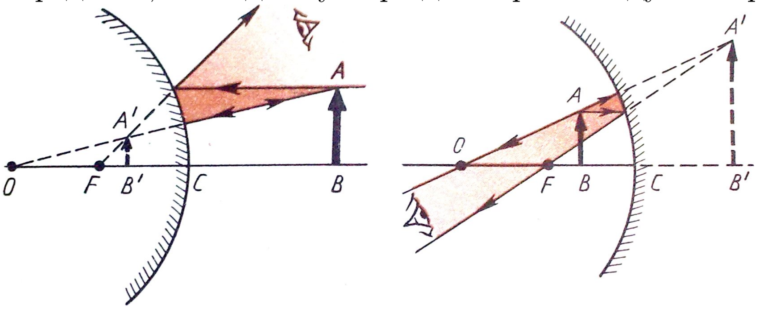
в) луч, проходящий через фокус зеркала, после отражения идёт параллельно оптической оси.

Если мы строим изображение предмета, то надо, вообще говоря, строить изображения всех его точек. Однако в некоторых случаях, в частности, когда предмет — прямая линия, можно строить изображения двух его точек. При этом не надо забывать, что мы пользуемся только параксиальными пучками, ширина которых $h \ll R$ — радиуса кривизны зеркала.

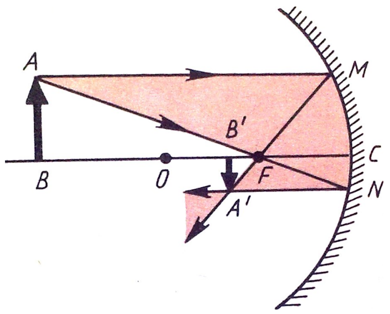
Воспользовавшись этими правилами, построим изображения в некоторых частных случаях (смотри следующие рисунки).



Как видно, в выпуклом зеркале изображение мнимое, прямое и уменьшенное при любом положении предмета; последнее утверждение рекомендуется проверить построением.



Мнимое, прямое, но увеличенное изображение возникает и в вогнутом зеркале, если предмет расположен между фокусом и зеркалом.

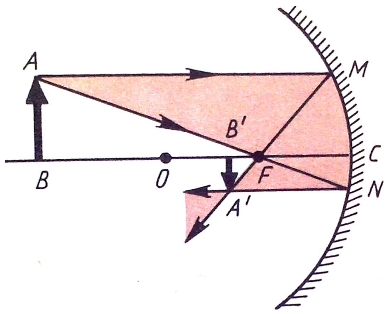


Если же предмет расположен дальше центра вогнутого сферического зеркала, то образуется перевёрнутое, уменьшенное действительное изображение между фокусом и центром. В самом деле, расходящийся световой пучок, исходящий из точки A (как и из любой другой точки), после отражения в зеркале собирается в точке A'. Здесь концентрируется энергия, что можно обнаружить, поместив в это место фотопластинку или фотоплёнку, на которой получится отпечаток.

Теперь легко сообразить, что если предмет поместить между фокусом и центром зеркала, то за центром возникнет действительное увеличенное и перевёрнутое изображение предмета. Выполните это построение самостоятельно.

Формула сферического зеркала.

Введём следующие обозначения: расстояние от предмета до вершины зеркала BC обозначим через d, расстояние до изображения $B'C - d'$.



Найдём связь между этими величинами и фокусным расстоянием в предложении, что размер предмета AB много меньше радиуса зеркала, то есть что все пучки параксиальные.

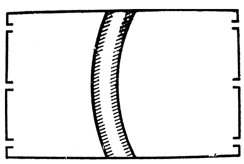
В этом случае $AM \approx BC = d, A'N \approx B'C = d', CM \approx AB$ и $CN \approx A'B'$. Из подобия треугольников ABF и CNF имеем: $BF/CF = AB/A'B'$, или $(d-f)/f = AB/A'B'$. Аналогично из подобия треугольников $A'B'F$ и MCF имеем: $CF/B'F = CM/A'B' = AB/A'B'$, или $f/(d'-f) - AB/A'B'$. Отсюда следует:

$$\frac{d-f}{f} = \frac{f}{d'-f}.$$

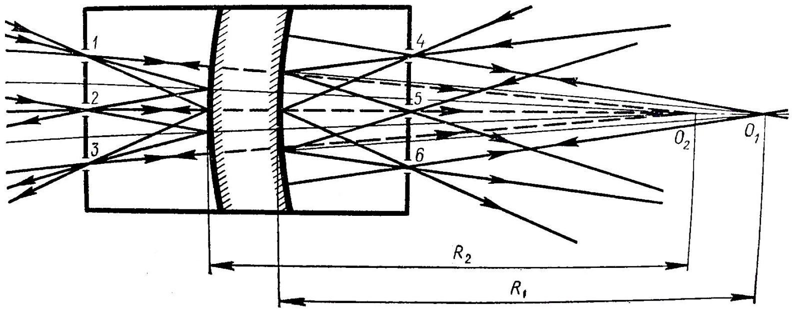
После простых преобразований получим: $d'f + df = dd'$. Разделив обе части равенства на величину $dd'f$, получим окончательно: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.

Это выражение называется формулой зеркала. При расчётах следует учесть, что расстояния до предмета и действительного изображения являются величинами положительными, расстояние до мнимого изображения — число отрицательное. Фокусное расстояние и оптическая сила вогнутого зеркала — величины положительные, выпуклого- отрицательные.

Задача №14 Как определить оптическую схему "чёрного ящика" и возможные параметры оптических элементов, находящихся в нём, имея при себе следующие приборы и материалы: коробка с шестью отверстиями, линейка масштабная, 4 булавки, подъёмный столик, бумага. Устройство коробки показано на рисунке.



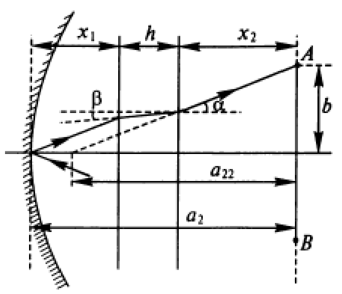
Ответ $\mapsto$ Если смотреть в отверстия 1, 2, 3, то при закрывании отверстий 4,5,6 не обнаруживают каких-либо изменений. Это говорит о наличии в ящике некой преграды для световых лучей. Ввиду того что при наблюдении через одно из отверстий видны остальные два, можно сделать вывод, что этой преградой является зеркало. Чтобы определить вид зеркала и его характеристики, необходимо наблюдать ход лучей, отражающихся от него. Для этого с помощью булавок отмечают направления, из которых через одно отверстие были видны два других отверстия. Пересечение соответствующих направлений (пунктирные линии на рисунке) даёт положение трёх точек зеркала с одной стороны и трёх точек зеркала с другой.



После этого определяют направления, по которым видны отверстия, через которые производится наблюдение. С этой целью булавка ставится таким образом, чтобы изображение булавки, сама булавка, отверстие и глаз находились на одной прямой. Это возможно, если луч проходит через оптический центр зеркала. Сделав подобные построения из других отверстий, находим оптический центр зеркала в месте пересечения построенных прямых. Из рисунка видно, что в одном случае эти прямые сходятся (вогнутое зеркало), а в другом расходятся (выпуклое зеркало). Измерив расстояния от полученных точек 0 и $0'$ до зеркала, определяем искомые значения радиусов кривизны зеркальных поверхностей.

Задача №15 Рассмотреть, как смещается изображение в вогнутом зеркале, когда между зеркалом и его фокусом помещают плоскопараллельную пластику, если предмет находится на оси зеркала дальше его фокуса (см. рис.)

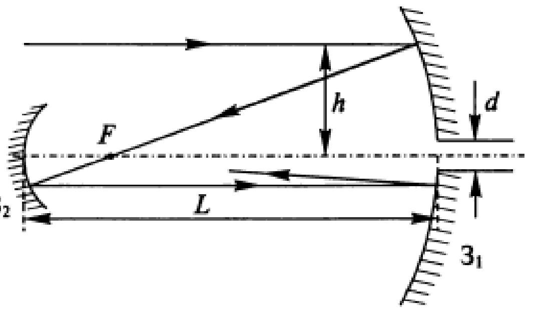
Решение $\mapsto$ Используя законы Снелла, параксиальность лучей и обозначения на рисунке, где показан ход луча к изображению AB) получаем $b = x_1 \operatorname{tg}\alpha + h \operatorname{tg}\beta + x_2 \operatorname{tg}\alpha = (a_2 - h + h/n) \operatorname{tg}\alpha$. Откуда $a_{22} = b/\operatorname{tg}\alpha = a_2 - h(n-1)/n$.



Таким образом, новое положение зеркала должно быть сдвинуто в сторону предмета на $h(n-1)/n$.

Ответ: сдвинется на $h(n-1)/n$ в сторону предмета.

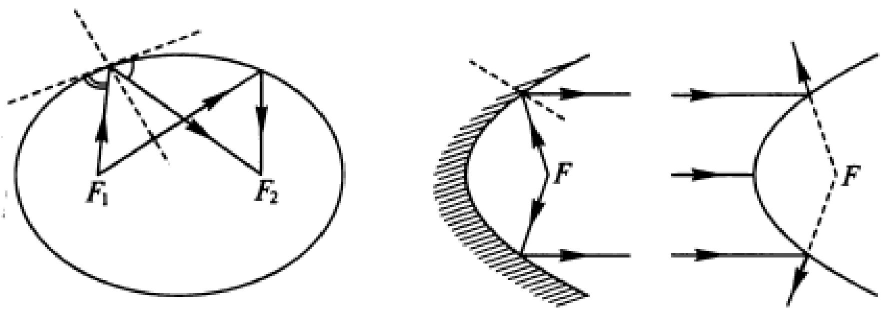
Задача №16 В оптической системе, предназначенной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух вогнутых сферических зеркал $З_1$ (радиус кривизны $r_1 = 10$ м), и $З_2$ (радиус кривизны $r_2 = 1$ м), расположенных на расстоянии $L = 5,5$ м друг от друга (см. рисунок). В центре зеркала $З_1$ имеется отверстие диаметром $d = 2$ мм. На это зеркало на высоте $h = 15$ см от оси системы падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Оцените, через какой промежуток времени $\triangle t$ этот луч выйдет через отверстие.



Решение $\mapsto$ Из формулы сферического зеркала следует, что L равно сумме фокусных расстояний, в таком случае луч, идущий параллельно оси зеркал (на расстоянии $h = 15$ см), пройдёт через фокус, а отразившись пойдёт параллельно оси на расстоянии $h/10$ (что следует из подобия треугольников). Пройдя шесть раз между зеркалами, то есть расстояние $6L$, луч выйдет через отверстие диаметром d в большом зеркале. Следовательно, для определения времени задержки t светового импульса необходимо $6L = 3.3 \cdot 10^3$ разделить на скорость света $3 \cdot 10^{10}$ см/с. Получим $t = 1.1 \cdot 10^{-7}$ с.

Ответ: $t = 1.1 \cdot 10^{-7}$ с.

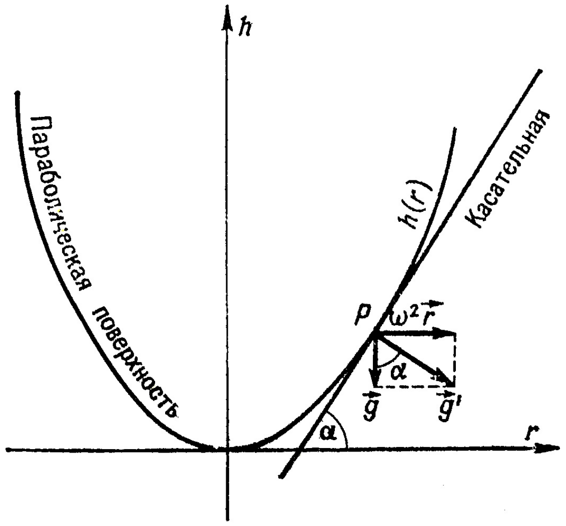
Параболическое зеркало.



Используя свойства эллипсоида и параболоида (И. Н. Бронштейн, К. А.Семендяев "Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов"), можно получить их замечательные отражающие свойства (см. рис.). Для эллипсоида лучи, исходящие из одного фокуса, собираются в другом фокусе. При удалении одного из фокусов в бесконечность получаем параболоид и, соответственно, параллельный пучок. При отражении от выпуклой поверхности параболоида лучи расходятся по направлениям, исходящим из фокуса.

Задача №17 Цилиндрический сосуд с ртутью поставлен на середину горизонтального диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Через некоторое время поверхность ртути становится вогнутой. Доказать, что параллельный пучок лучей, падающих сверху вдоль оси вращения сосуда, после отражения от поверхности ртути соберётся в одну точку. Определить положение этой точки. Сравнить свойства ртутного зеркала со свойствами обычного вогнутого сферического зеркала. Деформацией поверхности зеркала, вызванной силами поверхностного натяжения, пренебречь.

Решение $\mapsto$ Эту задачу целесообразнее решать в системе, вращающейся вместе с диском. В этой системе на каждую точку поверхности ртути действуют составляющая силы тяжести и центробежной силы. Как известно, свободная поверхность ртути в состоянии равновесия перпендикулярна равнодействующей указанных сил, действующих на неё. Это означает, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы, действующих на данную точку поверхности ртути, должна быть перпендикулярна к плоскости, касательной к поверхности в данной точке. На рисунке показано сечение системы плоскостью, проходящей через ось вращения и рассматриваемую точку на поверхности ртути.



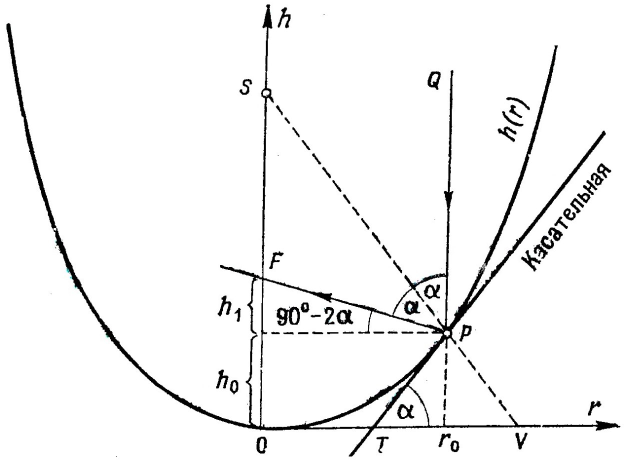
Из соображений симметрии ясно, что достаточно рассмотреть лишь одно такое сечение.

Определим вид линии, получившейся при пересечении поверхности ртути плоскостью, проходящей через ось вращения. Вместо понятия центробежной силы и силы тяжести можно воспользоваться понятиями центробежного ускорения и ускорения свободного падения. Результирующая этих ускорений g' лежит в плоскости сечения и должна быть перпендикулярна к кривой, представляющей поверхность ртути. Рассмотрим точку P, лежащую на поверхности ртути на расстоянии r от оси вращения h. В этой точке действует горизонтально направленное центробежное ускорение, равное $\omega^2 r$, а также вертикально направленное ускорение свободного падения g. Углы, обозначенные α, равны между собой как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из рисунка видно, что тангенс угла наклона касательной к кривой в точке P равен $\omega^2 r/g$, но в то же время тангенс угла наклона касательной равен производной функции, описывающей кривую, следовательно, имеем: $\dfrac{d}{dr}h(r) = \dfrac{\omega^2}{g}r$.

Известно, что если производная какой-либо функции является линейной функцией, то сама функция должна быть многочленом второго порядка. Нетрудно доказать, что записанное уравнение является производной функции: $h(r) = \dfrac{\omega^2}{2g}r^2 + C$, где C — некая постоянная; она равна значению функции в точке $r = 0$. Если начало системы координат выберем так, как на рисунке, то $C = 0$ и $h(r) = \dfrac{\omega^2}{2g}r^2$.

Следовательно, сечение поверхности ртути плоскостью, проходящей через ось вращения, представляет собой параболу, а сама поверхность ртути является параболоидом вращения.

Перейдём теперь к оптической части задачи. Имеется парабола $h(r) = (\omega^2/g)r^2$; требуется определить точку, в которой соберётся пучок лучей, падающих на поверхность параболоида вращения параллельно оси вращения- оси симметрии.



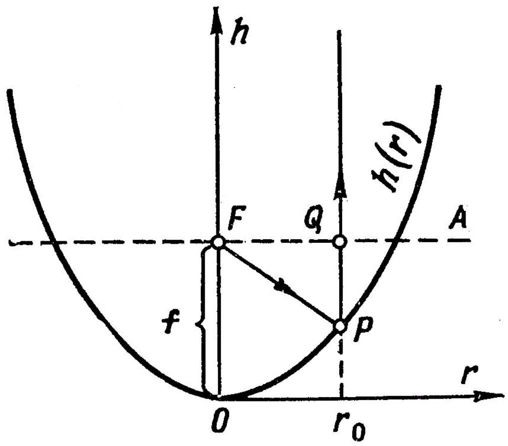
Рассмотрим луч, падающий на параболу в точке P, отстоящей на расстоянии r_0 от оси h. Пусть после отражения этот луч пересекает ось симметрии в точке F. Углы QPS и SPF равны в силу закона отражения. Углы QPS и PTV равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, угол FPR равен $90^\circ - 2\alpha$, где α- угол наклона касательной в точке $r = r_0$, тангенс которого равен $\dfrac{\omega^2}{g} r_0$. Расстояние f точки F от вершины параболы O равно $h_0 + h_1$. Тогда $f = h_0 + h_1 = \dfrac{\omega^2}{2g}{r_0}^2 + r_0 \dfrac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{g}{2\omega^2}$, откуда $f = \dfrac{g}{2\omega^2}$.

Видим, что расстояние точки F от точки O не зависит от r_0. Это означает, что все лучи, независимо от того, на каком расстоянии от оси находились точки их падения на параболу, после отражения пересекут ось симметрии в точке F, отстоящей на $f = g/2\omega^2$ от вершины параболы. Следовательно, точка F является фокусом рассматриваемого зеркала. Величину f назовём фокусным расстоянием.

В рассмотренном решении нет никаких приближений. Сделанные выводы абсолютно точны. И этим, собственно, параболическое зеркало отличается от сферического, для которого фокус (в точном значении этого слова) существует лишь для лучей, падающих вблизи оптической оси. В отличие от сферического параболическое зеркало не имеет сферической аберрации.

Положение фокуса можно определить ещё одним способом. Предположим, что все лучи после отражения пересекаются в одной точке F, лежащей на оптической оси.

Воспользуемся законом обратимости хода лучей и поместим в точку F точечный источник света. Источник этот испускает сферические волны, которые после отражения от поверхности должны стать плоскими волнами. Фронт плоской волны, то есть поверхность постоянной фазы, образует плоскость, перпендикулярную к направлению движения волны. Отсюда следует, что оптический путь различных лучей, приходящих в точку плоскости A после отражения, должен быть одинаковым. В противном случае разные лучи доходили бы до этой плоскости в разных фазах, то есть после отражения не было бы плоской волны.



Рассмотрим пути FOF и FPQ: $2f = \sqrt{{r_0}^2 + [f - h(r_0)]^2} + [f - h(r_0)]$.

После несложных преобразований получаем $h(r_0) = \dfrac{1}{4f}r^2$.

Поскольку r_0 произвольно, то $h(r) = \dfrac{1}{4f}r^2$.

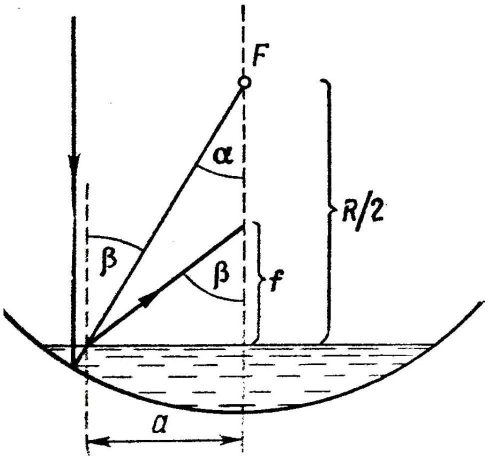
Приравнивая полученное уравнение отражающей поверхности к уравнению, найденному ранее при механическом решении задачи, убеждаемся, что $\dfrac{1}{4f} = \dfrac{\omega^2}{2g}$, а значит, $f = \dfrac{g}{2\omega^2}$.

Отсутствие сферической аберрации у параболического зеркала используются практически, например, в прожекторах и зеркальных телескопах. В прожекторах источник света помещается вблизи фокуса параболического зеркала, благодаря чему свет выходит из прожектора в виде точно направленного параллельного пучка. В зеркальных телескопах с параболическим зеркалом свет, приходящий от звёзд, собирается в фокусе независимо от размеров зеркала. Таким образом, увеличивая диаметр зеркала, можно повысить чёткость и яркость изображения. Один из способов получения параболических зеркал для телескопов заключается в следующем: сосуд, имеющий форму параболоида, наполняется ртутью и раскручивается до определённой угловой скорости, при которой ртуть равномерно растекается по стенкам сосуда, образуя параболоид вращения и выравнивая неровности сосуда.Этот способ применяется редко, потому что полученное таким образом зеркало очень чувствительно к малейшим сотрясениям.

Ответ: смотри решение.

Задача №18 Горизонтально расположенное цилиндрическое вогнутое зеркало с радиусом кривизны $R = 60$ см наполнено водой. Определить фокусное расстояние зеркала. Коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Принять, что глубина воды мала по сравнению с радиусом кривизны зеркала R.

Решение $\mapsto$ Введём обозначение согласно рисунку.



Если бы не было видно воды, то после отражения луч проходил бы через точку F, отстоящую от центра зеркала на $R/2$. Имеем $\dfrac{a}{R/2} = \operatorname{tg}\alpha, \dfrac{a}{f} = \operatorname{tg}\beta$.

При малых углах α и β (параллельный пучок идёт вблизи) тангенсы практически равны синусам.

Следовательно, $\dfrac{2a}{R} = \sin\alpha, \dfrac{a}{f} = \sin\beta$.

Значит, $n = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = R/2f$. Отсюда $f = \dfrac{R}{2n}$. В численном выражении $f = 60см/(2 \cdot 4/3) = 22.5$ см.

Ответ: $f = \dfrac{R}{2n} = 22.5$ см.

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[6] Лекции по спектроскопии, ФИАН.