БИЛЕТ 7

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить $3x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+3)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+12} + c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2 + bx + c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4} + c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+12} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 9, \\ -\frac{b^2}{4a-4} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+12} = 9, \\ \frac{b^2}{4a-4} - \frac{b^2}{4a} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3b^2}{4a(a+3)} = 9, \\ \frac{b^2}{4a(a-1)} = 9. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{3(a-1)}{a+3} = 1$, откуда $a = 3$. Тогда $b^2 = 216$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{216}{12} + c = -18 + c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить x^2, то выйдет функция $(a+1)x^2 + bx + c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+4} + c = -\frac{216}{16} + c = -\frac{27}{2} + c$, что на $\frac{9}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $|x^3 - 2x^2 + 2| \geqslant 2 - 3x$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [0; +\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 2 \geqslant 2 - 3x, \\ x^3 - 2x^2 + 2 \leqslant -2 + 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 3x \geqslant 0, \\ x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(x^2 - 2x + 3\right) \geqslant 0, \\ (x-1)\left(x^2 - x - 4\right) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[1; \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [0; +\infty).$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $\sqrt{3} : 1$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH = 30^\circ$, $\angle HBC = 45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH = HC$. Но $HD = CH \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CH}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $BH : HD = \sqrt{3} : 1$.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60; 45)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 2070.

Решение. Проведём через данную точку $(60; 45)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 60$ и $y = 45$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 45 способами: $(60;\ 0), (60;\ 1), \ldots, (60;\ 44)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 60$ и $y = 45$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $15 \leqslant x \leqslant 59$, $0 \leqslant y \leqslant 44$. Получаем 45^2 способов.

Общее количество способов равно $45^2 + 45 = 46 \cdot 45 = 2070$.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = \left(a^2+b^2\right)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

Ответ. ± 2.

Решение. Подставляя $x = x_1$ в данное уравнение, получаем $\left(a^2+b^2\right)^4 - 4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2 = 4$, откуда $\left(a^2+b^2\right)^2\left(\left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2\right) = 4$, $\left(a^2+b^2\right)^2\left(a^2-b^2\right)^2 = 4$, $\left(a^4-b^4\right)^2 = 4$, следовательно, $a^4 - b^4 = \pm 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$ а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| = 2$; б) $|a| \in \left\{\dfrac{8}{5}\right\} \bigcup \left(2; \dfrac{16}{5}\right) \bigcup \left\{\sqrt{17}\right\}$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = 4 - \frac{4}{3}x$ – отрезок, соединяющий точки $(3; 0)$ и $(0; 4)$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем ромб с вершинами $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 0)$, $D(0; -4)$.

Второе уравнение системы может быть записано в виде $(x-1)^2 + y^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(1; 0)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И ромб, и окружность симметричны относительно оси абсцисс, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из общих точек окружности и ромба лежит на оси абсцисс. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 2$ или $|a| = 4$. Несложно видеть, что при $|a| = 2$ система имеет 3 решения, а при $|a| = 4$ – 5 решений. Значит, 3 решения возможны только при $a = \pm 2$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон BC и CD, а R_1 – радиус той окружности, которая касается сторон AB и AD ромба. Система имеет ровно два решения в том и только том случае, когда $|a| \in \{R_1\} \cup (QA;\ R_0) \cup \{QB\}$.

QA=2, $QB = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$. Пусть окружность радиуса R_1 касается стороны AB в точке J, а окружность радиуса R_0 касается стороны BC в точке L. Треугольник CLQ – прямоугольный, $tg\angle C$ равен угловому коэффициенту прямой BC, т.е. $tg\angle C = \frac{4}{3}$. Тогда $CL = \frac{LQ}{tg\angle C} = \frac{3R_0}{4}$. По теореме Пифагора для треугольника CLQ получаем $16 = R_0^2 + \frac{9R_0^2}{16}$, откуда $R_0 = \frac{16}{5}$. Поскольку треугольники JQA и LQC подобны и коэффициент подобия равен $\frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$, то $R_1 = QJ = \frac{1}{2}QL = \frac{8}{5}$. Окончательно получаем $|a| \in \left\{\frac{8}{5}\right\} \bigcup \left(2; \frac{16}{5}\right) \bigcup \left\{\sqrt{17}\right\}$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 8$; б) $R = 2\sqrt{85}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 16$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 4\sqrt{17}$, $CH = CM - MH = 8$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 4\sqrt{5}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 2\sqrt{85}$.

БИЛЕТ 8

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\dfrac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{45}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить $2x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+2)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+8} + c$. Если из $f(x)$ вычесть $5x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-5)x^2 + bx + c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-20} + c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+8} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 10, \\ -\frac{b^2}{4a-20} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+8} = 10, \\ \frac{b^2}{4a-20} - \frac{b^2}{4a} = \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2b^2}{4a(a+2)} = 10, \\ \frac{5b^2}{4a(a-5)} = \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{2(a-5)}{5(a+2)} = \frac{20}{15}$, откуда $a = -5$. Тогда $b^2 = 300$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{300}{-20}+c = 15+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $3x^2$, то выйдет функция $(a+3)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c = -\frac{300}{-8}+c = \frac{75}{2}+c$, что на $\frac{45}{2}$ больше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $|x^3 + 2x^2 - 2| \geqslant -2 - 3x$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1; +\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 - 2 \geqslant -2 - 3x, \\ x^3 + 2x^2 - 2 \leqslant 2 + 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 + 3x \geqslant 0, \\ x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(x^2 + 2x + 3\right) \geqslant 0, \\ (x+1)\left(x^2 + x - 4\right) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[-1; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1; +\infty).$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны $120°$ и $90°$ соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $1 : \sqrt{3}$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH = 60°$, $\angle HBC = 45°$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH = HC$. Но $HD = CH \operatorname{tg} 60° = CH\sqrt{3}$. Следовательно, $BH : HD = 1 : \sqrt{3}$.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1560.

Решение. Проведём через данную точку $(55; 40)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 55$ и $y = 40$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 39 способами: $(55;\ 1), (55;\ 1), \ldots, (55;\ 39)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 55$ и $y = 40$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $16 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 39$. Получаем 39^2 способов.

Общее количество способов равно $39^2 + 39 = 39 \cdot 40 = 1560$.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 + 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = \left(a^2 - b^2\right)^2$. Найдите $b^4 - a^4$.

Ответ. ± 2.

Решение. Подставляя $x = x_1$ в данное уравнение, получаем $\left(a^2 - b^2\right)^4 + 4a^2b^2\left(a^2 - b^2\right)^2 = 4$, откуда $\left(a^2 - b^2\right)^2\left(\left(a^2 - b^2\right)^2 + 4a^2b^2\right) = 4$, $\left(a^2 - b^2\right)^2\left(a^2 + b^2\right)^2 = 4$, $\left(a^4 - b^4\right)^2 = 4$, следовательно, $b^4 - a^4 = \pm 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 5|x| + 12|y| = 60, \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$ а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| = 4$; б) $|a| \in \left\{\dfrac{48}{13}\right\} \bigcup \left(4; \dfrac{72}{13}\right) \bigcup \left\{\sqrt{145}\right\}$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = 4 - \frac{4}{3}x$ – отрезок, соединяющий точки $(12; 0)$ и $(0; 5)$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем ромб с вершинами $A(0; 5)$, $B(-12; 0)$, $C(0; -5)$, $D(12; 0)$.

Второе уравнение системы может быть записано в виде $x^2 + (y - 1)^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(0; 1)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И ромб, и окружность симметричны относительно оси ординат, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из общих точек окружности и ромба лежит на оси ординат. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 4$ или $|a| = 6$. Несложно видеть, что при $|a| = 4$ система имеет 3 решения, а при $|a| = 6$ – 5 решений. Значит, 3 решения возможны только при $a = \pm 4$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон BC и CD, а R_1 – радиус той окружности, которая касается сторон AB и AD ромба. Система имеет ровно два решения в том и только том случае, когда $|a| \in \{R_1\} \cup (QA; R_0) \cup \{QB\}$.

QA=4, $QB = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145}$. Пусть окружность радиуса R_1 касается стороны AB в точке J, а окружность радиуса R_0 касается стороны BC в точке L. Треугольник JAQ – прямоугольный, $\angle JQA = 90^\circ - \angle JAQ = \angle ABD$, поэтому $tg\angle JQA = tg\angle ABD = \frac{5}{12}$, т.к. он равен угловому коэффициенту прямой AB. Тогда $AJ = JQtg\angle JQA = \frac{5R_1}{12}$. По теореме Пифагора для треугольника JQA получаем $16 = R_1^2 + \frac{25R_1^2}{144}$, откуда $R_1 = \frac{48}{13}$. Поскольку треугольники JQA и LQC подобны и коэффициент подобия равен $\frac{QA}{QC} = \frac{2}{3}$, то $R_0 = QL = \frac{3}{2}QJ = \frac{72}{13}$. Окончательно получаем $|a| \in \left\{\frac{48}{13}\right\} \cup \left(4; \frac{72}{13}\right) \cup \left\{\sqrt{145}\right\}$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 6$; б) $R = 3\sqrt{65}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 3$. Аналогично получаем, что $EP = 3$ и тогда $DE = 6$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 15$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 3\sqrt{26}$, $CH = CM - MH = 9$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 3\sqrt{10}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 3\sqrt{65}$.