1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\geq 0$. Тогда $\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\sin x\sin 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathrm{Z}$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathrm{Z}$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ и при $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

2. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 765.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{20}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{20}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{10}K_{11}$ – всего 10 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 10.

В итоге получаем $10\cdot 45+10\cdot 36=810$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 10, и таким образом, выходит $C_{10}^2=45$ прямоугольников. Получаем $810-45=765$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что k^2-1 делится нацело на 291.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\vdots(3\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\vdots 97$, т.е. $k=97p+96, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\vdots(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q+2, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=291q+193$, $k=291q+290$, $q\in\mathrm{Z}$.

б) $(k-1)\vdots 97$, т.е. $k=97p+1, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $97p(97p+2)\vdots(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=291q+98$, $k=291q+1$, $q\in\mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $193, 290, 98, 1$ при делении на 291, то есть подходят каждые 4 из 291 подряд идущих чисел. Так как $291000=291\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\leq 2,\\ 81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0 \Leftrightarrow 81x^4+18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+y^2\right)^2-40\left(9x^2+y^2\right)+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(9x^2+y^2-20\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x^2+y^2-20=6xy,\\ 9x^2+y^2-20=-6xy\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3x-y)^2=20,\\ (3x+y)^2=20\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-y=\pm 2\sqrt{5},\\ 3x+y=\pm 2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=3x+2\sqrt{5}$, то $x^2+\left(3x+2\sqrt{5}\right)^2\le 2$, $10x^2+12x\sqrt{5}+18\le 0$, $\left(x\sqrt{10}+3\sqrt{2}\right)^2\le 0$, $x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=|y-b|+\frac{3}{b},\\ x^2+y^2+32=a(2y-a)+12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-6)^2+(y-a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(6;a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{3}{b};b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 8$, т.е $\frac{3}{b}\le 8$ откуда $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK=2$, $CT=8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=4$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\angle BDC=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KAO_1 и TCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2C=90^\circ-\angle TCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{AK}=\frac{CT}{O_2T}$, $\frac{r}{2}=\frac{8}{r}$, $r=4$.

б) $O_2B=O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2T также является его медианой. Точки O, O_2 и T лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C=\sqrt{O_2T^2+CT^2}=4\sqrt{5}$, $O_2O=O_2C=4\sqrt{5}$ (как радиусы одной окружности)

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\angle COT=\operatorname{arctg}\dfrac{CT}{OT}=\operatorname{arctg}\dfrac{8}{4+4\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Во втором случае: $\angle BDC=\pi-\dfrac{1}{2}\angle BOC=\pi-\angle COT=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{CT}{OT}=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{8}{4\sqrt{5}-4}=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\geq 0$. Тогда $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ и при $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 364.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{16}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{16}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_8K_9 – всего 8 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 6 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 7 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_7^2=21$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 8.

В итоге получаем $8\cdot 28+8\cdot 21=392$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_8^2=28$ прямоугольников. Получаем $392-28=364$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $445\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 445.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\vdots(5\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+88, p\in Z$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\vdots(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=445q+276$, $k=445q+444$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+1, p\in Z$. Тогда получаем $89p(89p+2)\vdots(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in Z$, а второй – при $p=5q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=445q+179$, $k=445q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $276, 444, 179, 1$ при делении на 445, то есть подходят каждые 4 из 445 подряд идущих чисел. Так как $445000=445\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\leq 1,\\ 16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0 \Leftrightarrow 16x^4+8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+y^2\right)^2-10\left(4x^2+y^2\right)+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(4x^2+y^2-5\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2+y^2-5=4xy,\\ 4x^2+y^2-5=-4xy\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-y)^2=5,\\ (2x+y)^2=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-y=\pm\sqrt{5},\\ 2x+y=\pm\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=2x+\sqrt{5}$, то $x^2+\left(2x+\sqrt{5}\right)^2\le 1$, $5x^2+4x\sqrt{5}+4\le 0$, $\left(x\sqrt{5}+2\right)^2\le 0$, $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x=|y+a|+\dfrac{4}{a},\\ x^2+y^2+24+b(2y+b)=10x\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-5)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(5;-b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 6$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{4}{a};-a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 6$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 6$, т.е $\frac{4}{a}\le 6$ откуда $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK=3\sqrt{3}$, $DT=\sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=3$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KBO_1 и TDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2D=90^\circ-\angle TDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{BK}=\frac{DT}{O_2T}$, $\frac{r}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{r}$, $r=3$.

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1K этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и K лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1K^2+KB^2}=6$, $O_1O=O_1B=6$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOK = \operatorname{arctg}\frac{BK}{KO} = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{9} = 30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC = 2\angle O_1BK = 2\operatorname{arctg}\frac{O_1K}{BK} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC = 2\angle BOK = 2\operatorname{arctg}\frac{BK}{OK} = 2\operatorname{arctg}\frac{BK}{O_1O - r} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\cos 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,k\in\mathrm{Z}$. Учитывая условие, получаем $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\sin 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2},k\in\mathrm{Z}$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$ и при $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$.

2. Дан правильный 22-угольник M . Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 1045 .

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{22}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{22}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7 . Существуют ещё 10 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 11 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{11}^2=55$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2 , … , $K_{11}K_{12}$ – всего 11 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8 . Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 11.

В итоге получаем $11\cdot 55+11\cdot 45=1100$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 11, и таким образом, выходит $C_{11}^2=55$ прямоугольников. Получаем $1100-55=1045$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих $485\,000$ таких, что k^2-1 делится нацело на 485 .

Ответ. 4000 .

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(5\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97 . Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+96,\ p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q,q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q+4,q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=485q+96$, $k=485q+484$, $q\in\mathrm{Z}$.

б) $(k-1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+1,\ p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $97p(97p+2)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+4,q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q,q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=485q+389$, $k=485q+1$, $q\in\mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $96,484,389,1$ при делении на 485 , то есть подходят каждые 4 из 485 подряд идущих чисел. Так как $485\,000=485\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 2,\\ x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4y^2\right)^2-20\left(x^2+4y^2\right)+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+4y^2-10\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4y^2-10=4xy, \\ x^2+4y^2-10=-4xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2y)^2=10, \\ (x+2y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=\pm\sqrt{10}, \\ x+2y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=2y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(2y+\sqrt{10}\right)^2\le 2$, $5y^2+4y\sqrt{10}+8\le 0$, $\left(y\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2\le 0$, $y=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Тогда $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{7}{b}-|y+b|, \\ x^2+y^2+96=-a(2y+a)-20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+10)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-10;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-12\le x\le -8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{7}{b};-b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-12\le x\le -8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -12$, т.е $\frac{7}{b}\ge -12$ откуда $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L, а вторая касается стороны BC в точке F.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $AL=\sqrt{2}$, $CF=2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=2$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов LAO_1 и FCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AL=\alpha$. Тогда $\angle FO_2C=90^\circ-\angle FCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1L}{AL}=\frac{CF}{O_2F}$, $\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{r}$, $r=2$.

б) $O_2B = O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2F также является его медианой. Точки O, O_2 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C = \sqrt{O_2F^2 + CF^2} = 2\sqrt{3}$, $O_2O = O_2C = 2\sqrt{3}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COF = \operatorname{arctg}\frac{CF}{OF} = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_2 лежит на биссектрисе угла BCD, поэтому

$$\angle BCD = 2\angle O_2CF = 2\operatorname{arctg}\frac{O_2F}{CF} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right).$$

Это означает, что вписанный угол BCD опирается на дугу BD, равную $2\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC = 2\angle COF = 2\operatorname{arctg}\frac{CF}{OF} = 2\operatorname{arctg}\frac{CF}{O_2O - r} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как в этом случае дуга BD должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$, $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\geq 0$. Тогда $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\operatorname{tg}2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathrm{Z}$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ и $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

2. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 540.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{18}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{18}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_9K_{10} – всего 9 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 9.

В итоге получаем $9\cdot 36+9\cdot 28=576$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_9^2=36$ прямоугольников. Получаем $576-36=540$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $267\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 267.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(3\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+88, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\,\vdots\,(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q+2, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=267q+88$, $k=267q+266$, $q\in\mathrm{Z}$.

б) $(k-1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+1, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $89p(89p+2)\,\vdots\,(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+2, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=267q+179$, $k=267q+1$, $q\in\mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $88, 266, 179, 1$ при делении на 267, то есть подходят каждые 4 из 267 подряд идущих чисел. Так как $267\,000=267\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\leq 1,\\ x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+9y^2\right)^2-20\left(x^2+9y^2\right)+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+9y^2-10\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9y^2-10=6xy, \\ x^2+9y^2-10=-6xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3y)^2=10, \\ (x+3y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y=\pm\sqrt{10}, \\ x+3y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=3y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(3y+\sqrt{10}\right)^2\le 1$, $10y^2+6y\sqrt{10}+9\le 0$, $\left(y\sqrt{10}+3\right)^2\le 0$, $y=-\frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{6}{a}-|y-a|, \\ x^2+y^2+b^2+63=2(by-8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+8)^2+(y-b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-8;b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-9\le x\le -7$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{6}{a};a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-9\le x\le -7$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -9$, т.е $\frac{6}{a}\ge -9$ откуда $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F, а вторая касается стороны AD в точке P.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $BF=3\sqrt{2}$, $DP=\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=\sqrt{6}$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов FBO_1 и PDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BF=\alpha$. Тогда $\angle PO_2D=90^\circ-\angle PDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1F}{BF}=\frac{DP}{O_2P},\ \frac{r}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{r},\ r=\sqrt{6}.$$

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1F этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1F^2+FB^2}=2\sqrt{6}$, $O_1O=O_1B=2\sqrt{6}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\angle BOF=\operatorname{arctg}\dfrac{BF}{FO}=\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC=2\angle O_1BF=2\operatorname{arctg}\frac{O_1F}{BF}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC=2\angle BOF=2\operatorname{arctg}\dfrac{BF}{OF}=2\operatorname{arctg}\dfrac{BF}{O_1O-r}=2\operatorname{arctg}\sqrt{3}=120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.