1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-25$.

Ответ. $x\in(-\infty;-6]\cup\{-5\}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in(-\infty;-5]$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=-5$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x<-5$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-25}$ и получаем $\sqrt{-2x-1}\le\sqrt{x^2-25}$; тогда $-2x-1\le x^2-25$, $x^2+2x-24\ge 0$, $x\in(-\infty;-6]\cup[4;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in(-\infty;-6]$.

Объединяя результаты, находим $x\in(-\infty;-6]\cup\{-5\}$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4 x+5\cos^2 x}{4\cos^4 x+3\sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{7}{5}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$; б) $g_{\min}=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=\dfrac{55}{39}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)^2+5\cos^2 x}{4\cos^4 x+3-3\cos^2 x}=\frac{4\cos^4 x-3\cos^2 x+4}{4\cos^4 x-3\cos^2 x+3}=1+\frac{1}{4\cos^4 x-3\cos^2 x+3}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{1}{4t^2-3t+3}=\dfrac{7}{5}\Leftrightarrow 4t^2-3t+3=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0{,}25,\\ t=0{,}5.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=0{,}25$ или $\cos^2 x=0{,}5$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$ или $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя.

Итак, $g_{\min}=g(1)=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=g\left(\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{55}{39}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{3}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Ответ. $(5;-1;-2)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $-\dfrac{15}{2}x(y+z)$, обе части второго – на $-\dfrac{3}{2}y(x+z)$, третьего – на $-4z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}-7{,}5(x+y+z)=xy+xz,\\ -1{,}5(x+y+z)=xy+yz,\\ -4(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=-6{,}5(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}-2{,}5(x+y+z)=xy,\\ (x+y+z)=yz,\\ -5(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x = -2{,}5z$, а разделив первое на третье – что $y = 0{,}5z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $-z = 0{,}5z^2$, откуда $z = -2$, $x = 5$, $y = -1$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $9 : 40$, б) $\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x$, $MC = 5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL : LC = AB : BC = 2x : 7x = 2 : 7$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP} = \dfrac{1}{2} S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{7} S_{ABC} = \dfrac{1}{7} S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}} = \dfrac{AP}{AM} \cdot \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$, следовательно, $S_{APL} = \dfrac{1}{9} S_{AMC} = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{5}{7} S$, $S_{LPMC} = \dfrac{8}{9} S_{AMC} = \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{5}{7} S = \dfrac{40}{63} S$. Искомое отношение равно $\dfrac{1}{7} S : \dfrac{40}{63} S = \dfrac{9}{40}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP : PL = S_{ABP} : S_{ALP} = \dfrac{1}{7} : \dfrac{5}{9 \cdot 7} = 9 : 5$. Пусть $BP = 9y$, $PL = 5y$.

Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma = \dfrac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma = \dfrac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x = y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(5x - y)(x - y) = 2^{100} \cdot 3^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 5x - y = 2^k \cdot 3^l, \\ x - y = 2^{100-k} \cdot 3^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x - y = -2^k \cdot 3^l, \\ x - y = -2^{100-k} \cdot 3^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0; 100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 2^{k-2} \cdot 3^l - 2^{98-k} \cdot 3^{100-l}, \\ y = 2^{k-2} \cdot 3^l - 5 \cdot 2^{98-k} \cdot 3^{100-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97 \cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = \dfrac{8}{(x - b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-15; 7)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2+(y+a)^2=7^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 7 с центром $(a;-a)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $b=0$. В точке $x=0$ она принимает максимальное значение, равно 8. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x\to\infty$. Если изменять b, то график сдвигается на $|b|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0<y\le 8$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a\in[-15;7)$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-16$.

Ответ. $x\in\{4\}\cup[5;+\infty)$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in[4;+\infty)$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=4$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x>4$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-16}$ и получаем $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{x^2-16}$; тогда $2x-1\le x^2-16$, $x^2-2x-15\ge0$, $x\in(-\infty;-3]\cup[5;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in[5;+\infty)$.

Объединяя результаты, находим $x\in\{4\}\cup[5;+\infty)$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{2\cos^4 x+\sin^2 x}{2\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{1}{2}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; б) $g_{\min}=\dfrac{7}{15}$, $g_{\max}=\dfrac{2}{3}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{2\cos^4 x+1-\cos^2 x}{2(1-\cos^2 x)^2+3\cos^2 x}=\frac{2\cos^4 x-\cos^2 x+1}{2\cos^4 x-\cos^2 x+2}=1-\frac{1}{2\cos^4 x-\cos^2 x+2}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1-\dfrac{1}{2t^2-t+2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-t+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=0{,}5.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=0$ или $\cos^2 x=0{,}5$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$ или $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя.

Итак, $g_{\min}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{15}$, $g_{\max}=g(1)=\dfrac{2}{3}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{1}{4}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ. $(-4;2;1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $12x(y+z)$, обе части второго – на $6y(x+z)$, третьего – на $2z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}12(x+y+z)=xy+xz,\\ 6(x+y+z)=xy+yz,\\ 2(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=10(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}8(x+y+z)=xy,\\ -2(x+y+z)=yz,\\ 4(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x = -4z$, а разделив первое на третье – что $y = 2z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z = 2z^2$, откуда $z = 1$, $x = -4$, $y = 2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT : TC = 1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $11:70$, б) $\arccos\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x$, $MC = 7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL : LC = AB : BC = 2x : 9x = 2:9$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP} = \dfrac{1}{2} S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{9} S_{ABC} = \dfrac{1}{9} S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}} = \dfrac{AP}{AM} \cdot \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{11}$, следовательно, $S_{APL} = \dfrac{1}{11} S_{AMC} = \dfrac{1}{11} \cdot \dfrac{7}{9} S$, $S_{LPMC} = \dfrac{10}{11} S_{AMC} = \dfrac{10}{11} \cdot \dfrac{7}{9} S = \dfrac{70}{99} S$. Искомое отношение равно $\dfrac{1}{9} S : \dfrac{70}{99} S = \dfrac{11}{70}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP : PL = S_{ABP} : S_{ALP} = \dfrac{1}{9} : \dfrac{7}{9 \cdot 11} = 11:7$. Пусть $BP = 11y$, $PL = 7y$.

Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma = \dfrac{11y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma = \dfrac{3x}{18y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x = y\sqrt{33}$, откуда $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $6x^2 - 7xy + y^2 = 10^{100}$.

Ответ. 19998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(6x - y)(x - y) = 2^{100} \cdot 5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 6x - y = 2^k \cdot 5^l, \\ x - y = 2^{100-k} \cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x - y = -2^k \cdot 5^l, \\ x - y = -2^{100-k} \cdot 5^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0; 100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 2^k \cdot 5^{l-1} - 2^{100-k} \cdot 5^{99-l}, \\ y = 2^k \cdot 5^{l-1} - 6 \cdot 2^{100-k} \cdot 5^{99-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях двойки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 98, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $0 \le k \le 100$, $1 \le l \le 99$ – всего $99 \cdot 101 = 9999$ вариантов.

Вторая система также имеет 9999 решений; итак, всего 19998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \dfrac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-11; 2)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(b;-b)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $a=0$. В точке $x=0$ она принимает максимальное значение, равно 9. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x\to\infty$. Если изменять a, то график сдвигается на $|a|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0<y\le 9$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b\in[-11;2)$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-9}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-9$.

Ответ. $x\in(-\infty;-4]\cup\{-3\}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in(-\infty;-3]$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=-3$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x<-3$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-9}$ и получаем $\sqrt{-2x-1}\le\sqrt{x^2-9}$; тогда $-2x-1\le x^2-9$, $x^2+2x-8\ge0$, $x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in(-\infty;-4]$.

Объединяя результаты, находим $x\in(-\infty;-4]\cup\{-3\}$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\cos^4x+5\sin^2x}{4\sin^4x+3\cos^2x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{4}{3}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{k\pi}{3}, k\in Z$; б) $g_{\min}=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=\dfrac{55}{39}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\cos^4x+5-5\cos^2x}{4(1-\cos^2x)^2+3\cos^2x}=\frac{4\cos^4x-5\cos^2x+5}{4\cos^4x-5\cos^2x+4}=1+\frac{1}{4\cos^4x-5\cos^2x+4}.$$

Обозначим $\cos^2x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{1}{4t^2-5t+4}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 4t^2-5t+4=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\t=0{,}25.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2x=1$ или $\cos^2x=0{,}25$, откуда $x=\dfrac{k\pi}{3}, k\in Z$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя.

Итак, $g_{\min}=g(0)=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=g\left(\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{55}{39}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{5}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=0$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

Ответ. $(2;3;-1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{3}{4}y(x+z)$, третьего – на $-\dfrac{5}{4}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}(x+y+z)=xy+xz,\\ \dfrac{3}{4}(x+y+z)=xy+yz,\\ -\dfrac{5}{4}(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{1}{4}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+y+z)=xy, \\ -\frac{3}{4}(x+y+z)=yz, \\ -\frac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=-2z$, а разделив первое на третье – что $y=-3z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $3z=-3z^2$, откуда $z=-1$, $x=2$, $y=3$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $21:100$, б) $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=8x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:11x=3:11$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}S_{ABC}=\frac{3}{22}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}=\frac{3}{28}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{28}S_{AMC}=\frac{3}{28}\cdot\frac{8}{11}S$, $S_{LPMC}=\frac{25}{28}S_{AMC}=\frac{25}{28}\cdot\frac{8}{11}S=\frac{50}{77}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{22}S:\frac{50}{77}S=\frac{21}{100}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{22}:\frac{6}{77}=7:4$. Пусть $BP=7y$, $PL=4y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{7y}{3x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{11y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=\frac{y\sqrt{77}}{2\sqrt{3}}$, откуда $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+5y)(x+y)=2^{100}\cdot5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+5y=2^k\cdot5^l, \\ x+y=2^{100-k}\cdot5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+5y=-2^k\cdot5^l, \\ x+y=-2^{100-k}\cdot5^{100-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} y=2^{k-2}\cdot5^l-2^{98-k}\cdot5^{100-l}, \\ x=5\cdot2^{98-k}\cdot5^{100-l}-2^{k-2}\cdot5^l. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях пятёрки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2\le k\le98$, $0\le l\le100$ – всего $97\cdot101=9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a - x - y) = 64, \\ y = \dfrac{7}{(x+b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in (-8; 15]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 8 с центром $(a; a)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $b = 0$. В точке $x = 0$ она принимает максимальное значение, равно 7. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x \to \infty$. Если изменять b, то график сдвигается на $|b|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $b \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0 < y \le 7$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in (-8; 15]$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-4$.

Ответ. $x\in\{2\}\cup[3;+\infty)$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in[2;+\infty)$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=2$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x>2$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-4}$ и получаем $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{x^2-4}$; тогда $2x-1\le x^2-4$, $x^2-2x-3\ge 0$, $x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in[3;+\infty)$.

Объединяя результаты, находим $x\in\{2\}\cup[3;+\infty)$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4 x+7\cos^2 x}{4\cos^4 x+\sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=4$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$; б) $g_{\min}=\dfrac{7}{4}$, $g_{\max}=\dfrac{63}{15}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)^2+7\cos^2 x}{4\cos^4 x+1-\cos^2 x}=\frac{4\cos^4 x-\cos^2 x+4}{4\cos^4 x-\cos^2 x+1}=1+\frac{3}{4\cos^4 x-\cos^2 x+1}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{3}{4t^2-t+1}=4\Leftrightarrow 4t^2-t+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=0{,}25.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=0$ или $\cos^2 x=0{,}25$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя. Итак, $g_{\min}=g(1)=\dfrac{7}{4}$, $g_{\max}=g\left(\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{63}{15}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{1}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ответ. $(1;2;3)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $\dfrac{5}{6}x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{4}{3}y(x+z)$, третьего – на $\dfrac{3}{2}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{5}{6}(x+y+z)=xy+xz,\\ \dfrac{4}{3}(x+y+z)=xy+yz,\\ \dfrac{3}{2}(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{11}{6}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y+z)=xy,\\ (x+y+z)=yz,\\ \frac{1}{2}(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=\frac{1}{3}z$, а разделив первое на третье – что $y=\frac{2}{3}z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=\frac{2}{3}z^2$, откуда $z=3$, $x=1$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $39:161$, б) $\arccos\sqrt{\frac{13}{15}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:10x=3:10$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}S_{ABC}=\frac{3}{20}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3}{26}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{26}S_{AMC}=\frac{3}{26}\cdot\frac{7}{10}S$, $S_{LPMC}=\frac{23}{26}S_{AMC}=\frac{23}{26}\cdot\frac{7}{10}S=\frac{161}{260}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{20}S:\frac{161}{260}S=\frac{39}{161}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{20}:\frac{21}{260}=13:7$. Пусть $BP=13y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{13y}{3x}$, а из треугольника BTL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{20y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{\frac{65}{3}}$, откуда $\cos\gamma=\sqrt{\frac{13}{15}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

Ответ. 4998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+6y)(x+y)=5^{50}\cdot 3^{50}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases}x+6y=5^k\cdot 3^l,\\ x+y=5^{50-k}\cdot 3^{50-l}\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}x+6y=-5^k\cdot 3^l,\\ x+y=-5^{50-k}\cdot 3^{50-l}\end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;50]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases}x=6\cdot 5^{49-k}\cdot 3^{50-l}-5^{k-1}\cdot 3^l,\\ y=5^{k-1}\cdot 3^l-5^{49-k}\cdot 3^{50-l}.\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 48, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $1\le k\le 49$, $0\le l\le 50$ – всего $49\cdot 51=2499$ вариантов.

Вторая система также имеет 2499 решений; итак, всего 4998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2b(b+x+y)=81, \\ y=\dfrac{5}{(x-a)^2+1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in[-14;9)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+b)^2+(y+b)^2=9^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b;-b)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $a=0$. В точке $x=0$ она принимает максимальное значение, равно 5. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x\to\infty$. Если изменять a, то график сдвигается на $|a|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0<y\le 5$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b\in[-14;9)$.