

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 25} \cdot \sqrt{-2x - 1} \leq x^2 - 25.$$

2. Дана функция $g(x) = \frac{4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x}{4 \cos^4 x + 3 \sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x) = \frac{7}{5}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = -\frac{2}{15}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = -\frac{2}{3}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = \frac{8}{(x-b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{2x - 1} \leq x^2 - 16.$$

2. Дана функция $g(x) = \frac{2 \cos^4 x + \sin^2 x}{2 \sin^4 x + 3 \cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x) = \frac{1}{2}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT : TC = 1 : 6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $6x^2 - 7xy + y^2 = 10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \frac{9}{(x+a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 7

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 9} \cdot \sqrt{-2x - 1} \leq x^2 - 9.$$

2. Дана функция $g(x) = \frac{4 \cos^4 x + 5 \sin^2 x}{4 \sin^4 x + 3 \cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x) = \frac{4}{3}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = 1, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{4}{3}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 3 : 8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $x^2 + 6xy + 5y^2 = 10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a - x - y) = 64, \\ y = \frac{7}{(x+b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 8

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4} \cdot \sqrt{2x - 1} \leq x^2 - 4.$$

2. Дана функция $g(x) = \frac{4 \sin^4 x + 7 \cos^2 x}{4 \cos^4 x + \sin^2 x}$. Найдите:

- а) корни уравнения $g(x) = 4$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{6}{5}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 3 : 7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90° .
- а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.
- б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT : TC = 1 : 6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL .

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $x^2 + 7xy + 6y^2 = 15^{50}$.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b + x + y) = 81, \\ y = \frac{5}{(x-a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.