

Занятие 1 - Планиметрия

Курс читает: Агаханов Назар Хангельдыевич - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

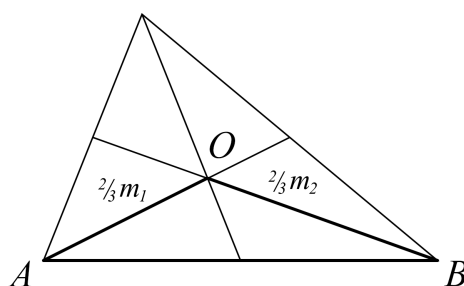
Медианы

Свойство - медианы треугольника пересекаются в одной точке и делят в отношении 2 : 1 считая от вершины. Также делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

Задача 1

Пусть известны длины двух медиан m_1 , m_2 . Какова наибольшая площадь такого треугольника?

Решение



Рассмотрим треугольник AOC . Его стороны $\frac{2}{3}m_1$ и $\frac{2}{3}m_2$. Площадь равна $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}m_1 \cdot \frac{2}{3}m_2 \sin \alpha$. По свойству медиан $S_1 = \frac{1}{3}S$. Максимум достигается при $\alpha = 90^\circ$. Значит $S = 3 \cdot \frac{2}{9}m_1m_2$.

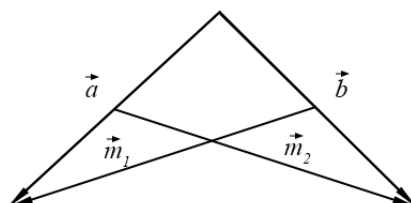
Важная формула: длина медианы:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Задача 2

Доказать, что в прямоугольном треугольнике $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$.

Решение



Рассмотрим векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$.

$$\vec{m}_1 = -\frac{\vec{b}}{2} + \vec{a}$$

$$\vec{m}_2 = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$$

$$\vec{m}_3 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

Тогда наше равенство примет вид:

$$\left(-\frac{\vec{b}}{2} + \vec{a}\right)^2 + \left(-\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}\right)^2 = 5\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2$$

Умножим на 4:

$$(-\vec{b} + 2\vec{a})^2 + (-\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 5(\vec{a} + \vec{b})^2$$

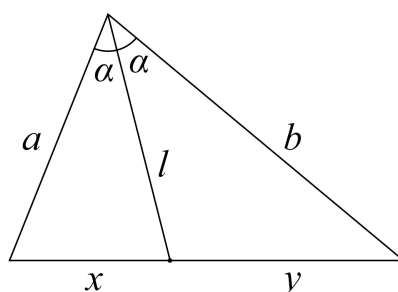
$$\vec{b}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{a}^2 + \vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 5\vec{a}^2 + 10\vec{a}\vec{b} + 5\vec{b}^2$$

$$18\vec{a}\vec{b} = 0$$

Эта цепочка равенств обратима, поэтому можем заключить что исходное равенство выполняется тогда и только тогда когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то есть треугольник прямоугольный.

Биссектрисы

Формула длины биссектрисы



Обозначим угол треугольника 2α . Тогда площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab \sin 2\alpha$$

С другой стороны

$$S = \frac{1}{2}al \sin \alpha + \frac{1}{2}bl \sin \alpha$$

То есть

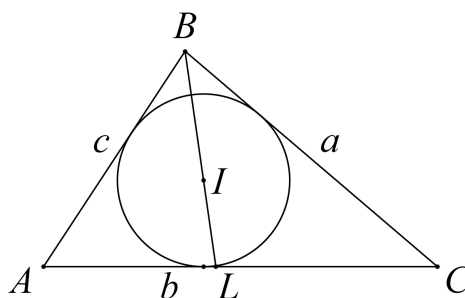
$$ab \sin 2\alpha = (a + b)l \sin \alpha \Rightarrow l = \frac{2ab \cos \alpha}{a + b}$$

Известно, что биссектрисы пересекаются в одной точке - центре вписанного в него окружности. Также воспользуемся тем фактом, что $x : y = a : b$.

Задача 3

В треугольник вписали окружность. Определить в каком отношении центр этой окружности поделит биссектрису, то есть найти $BL : IL$.

Решение



$$AL : CL = c : a$$

$$AL + CL = b \Rightarrow AL = \frac{cb}{a + c}$$

Рассмотрим треугольник ABL и его биссектрису AI . Она делит BL в следующем отношении:

$$BI : IL = \frac{c(a + c)}{cb} = \frac{a + c}{b}$$

Задача 4

В некотором треугольнике известны длины высот: $h_1 = 12, h_2 = 15, h_3 = 20$. Найти площадь треугольника.

Решение

Заметим что в любом треугольнике

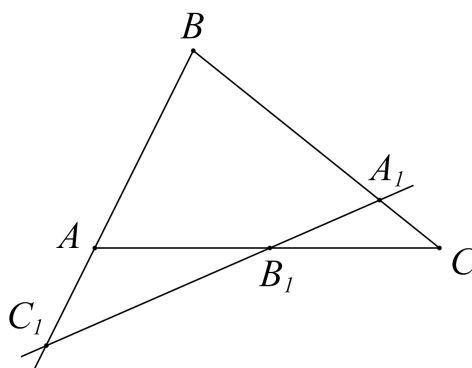
$$h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow a = \frac{2S}{h_a}$$

Значит по данным из условия можем заключить, что $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{2S}{h_1} : \frac{2S}{h_2} : \frac{2S}{h_3} = \frac{1}{12} : \frac{1}{15} : \frac{1}{20} = 5 : 4 : 3$. Получили, что треугольник прямоугольный. То есть две высоты являются двумя сторонами. Значит катеты равны 15 и 20 (так как самая короткая сторона в прямоугольном треугольнике лежит против гипотенузы). Значит площадь

$$S = \frac{1}{2} 15 * 20 = 150$$

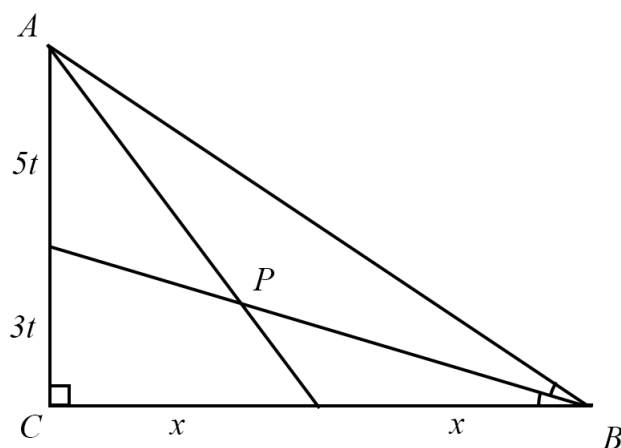
Теорема Менелая. Пусть есть треугольник и прямая, не проходит через вершины треугольника. Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$



Задача 5

Дан прямоугольный треугольник ACB . BL - биссектриса, AM - медиана, $BL \cap AM = P$. Найти стороны треугольника, если известно, что $BP = 8$, $LP = 5$.



Решение

Пусть $CM = MB = x$. Применим теорему Менелая к треугольнику LBC и прямой AM .

$$\frac{LP}{BP} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{AL} = 1$$

$$\frac{5}{8} \cdot 1 \cdot \frac{CA}{AL} = 1 \Rightarrow CA = 8t, AL = 5t \Rightarrow CL = 3t$$

То есть $LC : AL = 3 : 5$. Так как BL - биссектриса, то $CB : AB = 3 : 5$. Значит

$$CB = 3z = 2x$$

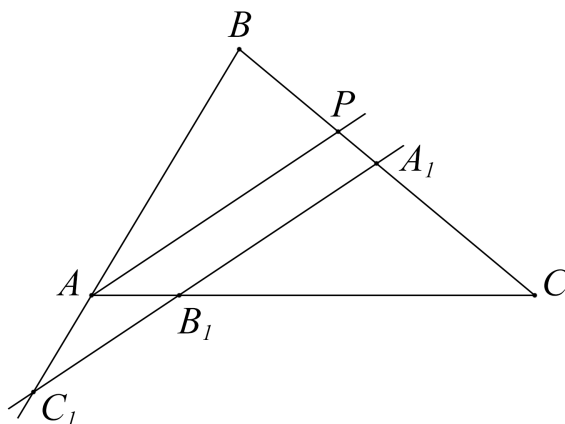
$$AB = 5z$$

По теореме Пифагора $AC = 4z = 8t \Rightarrow z = 2t$. Тогда $CB = 3z = 6t$. Из теоремы Пифагора для треугольника CLB находим t :

$$(3t)^2 + (6t)^2 = 13^2 \Rightarrow t = \dots$$

Зная t , можно легко найти стороны треугольника.

Доказательство теоремы Менелая



Проведем прямую l' , параллельную прямой l через точку A .
По теореме Фалеса

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CA_1}{A_1P}$$

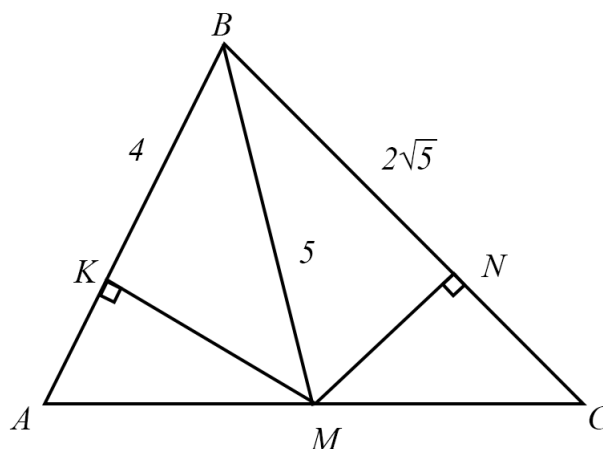
$$, \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{PA_1}{BA_1}$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1P} \cdot \frac{PA_1}{BA_1} = 1$$

Задача 6

В треугольнике ABC проведена медиана BM . Ее длина равна 5. Рассматриваются ортогональные проекции точки M на стороны треугольника - K и N . Известно, что $BK = 4$, $BN = 2\sqrt{5}$. Найти сторону AC .

Решение



Пусть $AM = MC = x$. Будем использовать тот факт, что медиана треугольника делит его на равновеликие части.

По теореме Пифагора

$$MK = 3, MN = \sqrt{5}, AK = \sqrt{x^2 - 9}, CN = \sqrt{x^2 - 5}$$

Значит

$$AB = 4 + \sqrt{x^2 - 9}, BC = 2\sqrt{5} + \sqrt{x^2 - 5}$$

$$S_{ABM} = S_{CMB} \Rightarrow \frac{1}{2} * 3 * (4 + \sqrt{x^2 - 9}) = \frac{1}{2} * \sqrt{5} * (2\sqrt{5} + \sqrt{x^2 - 5})$$

$$2 + 3\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{5x^2 - 25}$$

Обозначим $z = \sqrt{x^2 - 9} \geq 0, x^2 = z^2 + 9$. Тогда уравнение примет вид

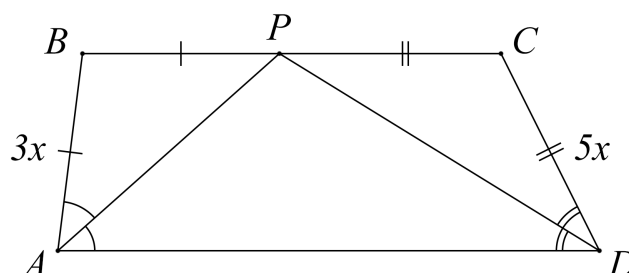
$$2 + 3z = \sqrt{5z^2 + 20}$$

Возводя уравнение в квадрат и выбирая неотрицательный корень, мы получаем ответ.

Задача 7

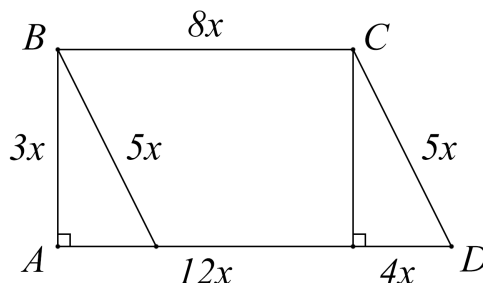
Дана трапеция $ABCD$, биссектрисы углов A и D пересеклись на стороне BC в точке P . $BC : AD = 2 : 3$, $AB : CD = 3 : 5$. Найти углы трапеции.

Решение



Напомним, что биссектрисы в трапеции отсекают равнобедренные треугольники.

Пусть $AB = 3x$. Тогда $CD = 5x$. Получаем, что $BP = AB = 3x, CP = CD = 5x \Rightarrow BC = 8x, AD = 12x$.



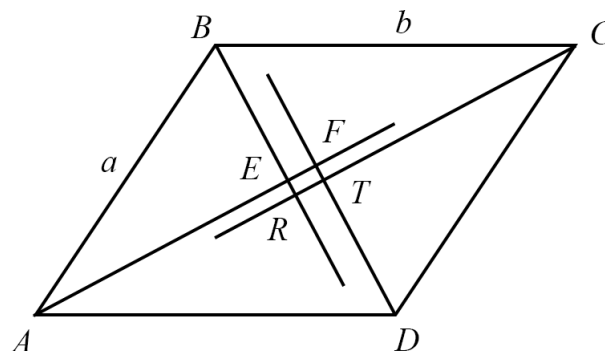
Проведем прямую BL , параллельную CD . Тогда $BL = 5x, AL = 4x$. По теореме Пифагора ABL - прямоугольный. Значит $\angle A = 90^\circ$.

Проведем высоту CH на основание. Тогда $HD = 4x$. Тогда $\angle D = \arcsin \frac{3}{5}$.

Задача 8

Дан параллелограмм. Его стороны равны a и b . Точки пересечения его биссектрис образуют параллелограмм. Найти отношение $\frac{S_1}{S}$, где S_1 - площадь этого параллелограмма, а S - площадь исходного параллелограмма.

Решение



Пусть $\angle A = 2\alpha$. Тогда $\angle B = \pi - 2\alpha$. $\angle BEA = \frac{\pi}{2}$. Получаем, что $EFTR$ - прямоугольник.

Пусть

$$EF = x, FT = y$$

$$. S_1 = xy, S = ab \sin 2\alpha.$$

$$x = AF - AE = AD \cos \alpha - AB \cos \alpha = (b - a) \cos \alpha$$

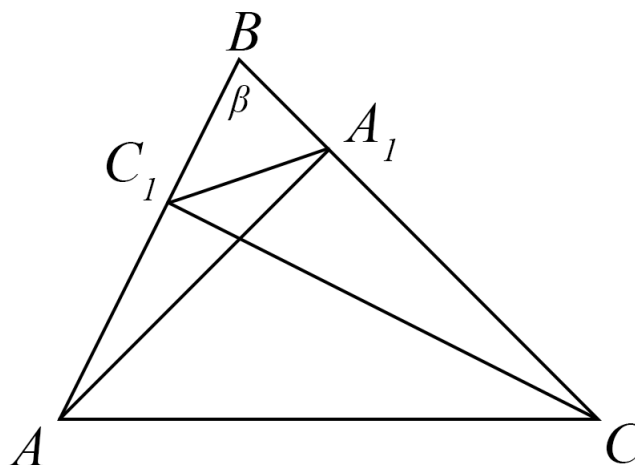
$$y = AD \sin \alpha - CD \sin \alpha = (b - a) \sin \alpha$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(b - a)^2 \cos \alpha \sin \alpha}{ab \sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \frac{(b - a)^2}{ab} = \frac{1}{2} \frac{(k - 1)^2}{k} \quad (k = \frac{b}{a})$$

Задача 9

В треугольнике ABC провели высоты AA_1, CC_1 . $\angle B = \beta$. Найти $\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}}$

Решение



Заметим, что $\frac{BA_1}{AB} = \cos \beta = \frac{BC_1}{BC}$. То есть $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC, k = \cos \beta$. Значит площади относятся как квадрат коэффициента подобия:

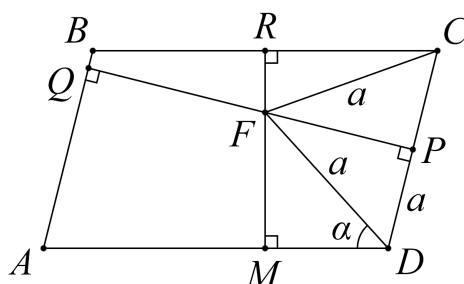
$$\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = k^2 = \cos^2 \beta$$

.

Задача 10

Дан параллелограмм $ABCD$. Дана точка F внутри него. Треугольник CDF - равносторонний. Точка F на расстояниях 10, 3, 6 от AD, AB, BC . Найти периметр параллелограмма.

Решение



Пусть $CD = a$. Тогда $FC = FD = a$. Обозначим $\angle FDA = \alpha$.

$$\angle BCF = \pi - \alpha - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \alpha$$

Пусть FK - высота на BC , FM - высота на AD . Тогда из треугольников FKC, FMD получаем

$$6 = a \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$10 = a \sin \alpha$$

$$3 \sin \alpha = 5 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \Rightarrow 6 \sin \alpha = 5\sqrt{3} \cos \alpha - 5 \sin \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{11}{14}, \sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

Значит

$$a = \frac{10}{\sin \alpha} = \frac{28}{\sqrt{3}}$$

Проведем высоты FP на CD и FQ на AB .

$$FP = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FP = 14$$

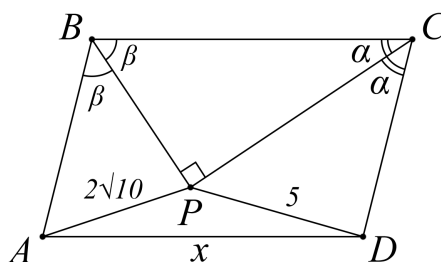
Тогда $PQ = 17$.

$$S_{ABCD} = 17 \cdot a = 16 \cdot AD \Rightarrow AD = \dots$$

Задача 11

Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке P . $AP = 2\sqrt{10}$, $DP = 5$, $\angle A = 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$. Найти стороны параллелограмма.

Решение



Пусть $AD = x$, $CD = y$. Угол C равен 2α , $B - 2\beta$. По условию $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Тогда

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$BP = x \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}x$$

$$CP = \frac{3}{\sqrt{13}}x$$

Из треугольника ABP по теореме косинусов:

$$(2\sqrt{10})^2 = y^2 + \frac{4}{13}x^2 - 2y \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}x \cos \beta$$

$$40 = y^2 + \frac{4}{13}x^2 - \frac{8}{13}xy$$

$\triangle CDP$:

$$25 = y^2 + \frac{9}{13}x^2 - \frac{18}{13}xy$$

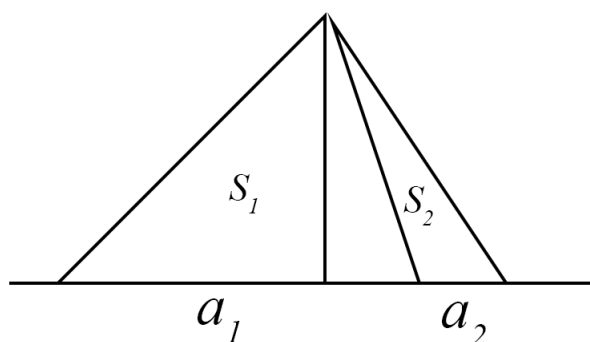
1 способ:

$$40 = y^2 + \frac{4}{13}(x^2 - 2xy), 25 = y^2 + \frac{9}{13}(x^2 - 2xy)$$

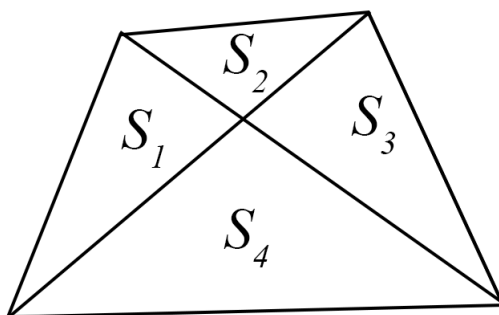
Замена $u = y^2$, $v = x^2 - 2xy$. Получим систему линейных уравнений, которую легко решаем.

2 способ: Такие системы легко решают приведением к однородному уравнению и заменой $t = \frac{x}{y}$.

Лемма. Пусть есть два отрезка на прямой и точка, не лежащая на этой прямой. Эта точка и концы отрезков образуют два треугольника. Их площади относятся как длины отрезков.



Доказательство очевидно (достаточно расписать площадь как половину произведения высоты на основание).

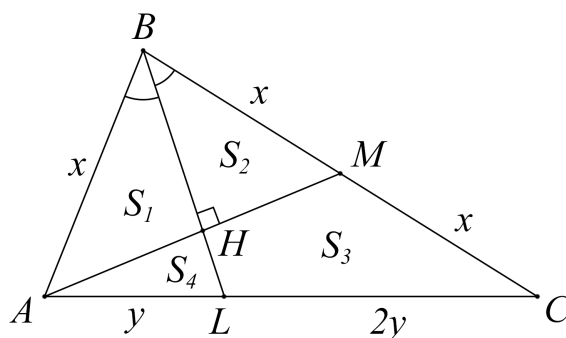


Следствие. В четырехугольнике $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Задача 12

В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса BL . Они пересекаются под прямым углом. Эти отрезки разбили треугольник на 4 части. Найти отношение их площадей.

Решение



Пусть AM пересекает BL в точке H . В треугольнике ABM BH - биссектриса и высота, значит ABM - равнобедренный. Тогда $S_1 = S_2$.

$$S_{ABM} = \frac{S}{2} \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{S}{4}$$

Пусть $AB = BM = MC = x$. Тогда $AL : LC = x : 2x = 1 : 2 \Rightarrow AL = y, LC = 2y$.

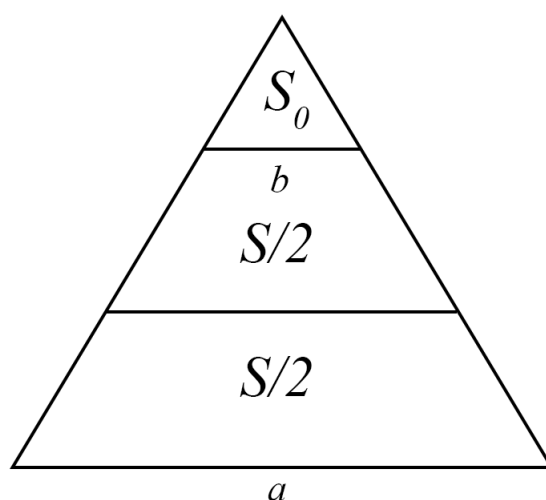
$$S_{ABL} : S_{ABC} = y : 3y \Rightarrow S_{ABL} = \frac{S}{3} \Rightarrow S_{AHL} = \frac{S}{3} - \frac{S}{4} = \frac{S}{12}$$

$$S_{HMCCL} = \frac{S}{2} - \frac{S}{12} = \frac{5S}{12}$$

Задача 13

В трапеции со основаниями a и b провели отрезок, параллельный основаниям, который делит площадь пополам. Найти длину этого отрезка.

Решение



Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения. Пусть площадь верхнего треугольника равна S_0 . Тогда

$$\frac{S_0}{S_0 + S/2} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

$$\frac{S_0}{S_0 + S} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{S_0 + S/2}{S_0} = 1 + \frac{S}{2S_0}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{S_0 + S}{S_0} = 1 + \frac{S}{S_0}$$

Умножим первое уравнение на 2 и вычтем первое из него:

$$2\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$