Предел и непрерывность функций многих переменных

Предел функции многих переменных

Определение 1 *ε-окрестностью точки x_0 называется множество*

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Проколотой ε-окрестностью точки x_0 называется множество

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Определение 2 (предела по Коши) *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Говорят, что элемент $A \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty, \infty\}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (по совокупности переменных) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (0, \delta_0)\ :\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ \hookrightarrow\ f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Определение 3 (предела по Гейне) *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Говорят, что элемент $A \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty, \infty\}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (по совокупности переменных) и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, если для любой последовательности Гейне $\{x_k\} \subset \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ (то есть такой последовательности, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ и $x_k \neq x_0\ \ \forall k \in \mathbb{N}$) выполняется условие $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = A$.*

Теорема 1 *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство проводится так же, как и для функций одной переменной.

Задача 1 *Вычислить предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 y}{y^5 x + (x+y)^3}$.*

Решение: Заметим, что при $x = -y \neq 0$ справедливо равенство $f(x,y) = \frac{-y^6}{-y^6} = 1$, а при $x = 0,\ y \neq 0$ – равенство $f(x,y) = 0$. Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k, y_k)\} = \left\{\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\} = \left\{\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k\to\infty} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k),$$

то предел функции f в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует.

Задача 2 *Вычислить предел* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}}$.

Решение: Сделаем замену переменных: $v = x-1$, $u = y$. Теперь задача заключается в вычислении следующего предела $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\ln^2(1+u+v)}{\sqrt{v^2+u^2}}$. Перейдем к полярным координатам: $u = \varrho\cos\varphi$, $v = \varrho\sin\varphi$. Тогда $\forall\varphi \in [0,2\pi)$ нужно вычислить предел $\lim\limits_{\varrho\to+0} \frac{\ln^2(1+\varrho\cos\varphi+\varrho\sin\varphi)}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi}}$ или показать, что он не существует. $f(\varrho,\varphi)$. При $\cos\varphi = -\sin\varphi$ выполняется равенство $(\varrho,\varphi) = 0$. При $\cos\varphi \neq -\sin\varphi$ выполняется неравенство

$$0 \le f(\varrho,\varphi) \le \frac{\varrho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}{\varrho} \le 2\varrho \to 0 \text{ при } \varrho \to +0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} = 0$.

Пределы по направлению

Определение 4 *Направлением в пространстве $\mathbb{R}^n$ назовем любой вектор $e \in \mathbb{R}^n$ единичной длины.*
Элемент $A \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty,\infty\}$ называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению $e \in \mathbb{R}^n$, если $\lim\limits_{t\to+0} f(x_0+te) = A$, то есть

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ :\ \forall\ t\in(0,\delta)\ \hookrightarrow\ f(x_0+te)\in U_\varepsilon(A).$$

Лемма 1
1. *Если $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то по любому направлению предел функции f в точке x_0 существует и равен A.*
2. *Обратное неверно.*

Доказательство 2. Рассмотрим функцию $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Покажем, что в точке $(0,0)$ предел функции f по любому направлению $e = (\cos\varphi,\sin\varphi)$ (где $\varphi\in[0,2\pi)$) существует и равен 0, однако предел по совокупности переменных $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует.

$$1) f(x_0+te) = f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) = \frac{t^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{t^2\cos^2\varphi+t^4\sin^4\varphi} = \frac{t\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+t^2\sin^4\varphi}.$$

При $\cos\varphi = 0$ имеем $\sin\varphi\neq 0$, и выполняется равенство $f(t\cos\varphi,t\sin\varphi) = 0$. При $\cos\varphi\neq 0$ имеет место неравенство $|f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)| \le \left|\frac{t\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right| \to 0$ при $t\to+0$.

Следовательно, $\forall e \in \mathbb{R}^2 \ : \ |e| = 1 \ \ \exists \lim\limits_{t \to +0} f(x_0 + te) = 0.$

2) Заметим, что при $x = y^2 \neq 0$ справедливо равенство $f(x,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$, а при $x = 0, \ y \neq 0$ – равенство $f(x,y) = 0$. Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k, y_k)\} = \left\{\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\} = \left\{\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{k \to \infty} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k),$$

то предел функции f в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует.

Повторные пределы

Определение 5 *Пусть задана функция двух переменных $f(x,y)$ и точка (x_0, y_0). Для любого фиксированного числа y предел функции одной переменной $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ (если он существует) обозначим через $\varphi(y)$. Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

называется повторным пределом функции f в точке (x_0, y_0). Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ также называется повторным пределом функции f в точке (x_0, y_0). Аналогично можно определить повторные пределы функции n переменных.

Замечание 1 *Из существования повторного предела не следует существования предела по совокупности переменных.*

Рассмотрим, например, функцию $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Очевидно, что $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = 0$, однако предел по совокупности не существует.

Замечание 2 *Из существования предела по совокупности не следует существование повторного предела.*

Рассмотрим, например, функцию $f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

Предел по совокупности переменных в точке $(0,0)$ равен 0, а повторные пределы не существуют.

Задача 3 *Найти предел по совокупности и повторные пределы функций*

1) $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$,

2) $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$,

в точке $(0,0)$.

Решение: 1) При фиксированном $x \neq 0$ выполнено $\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = 0$, если $x = 0$, то $f(0,y) = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$. В силу симметричности функции f относительно переменных x и y выполнено $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$. Для вычисления предела по совокупности перейдем к полярным координатам: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$.

$$f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) = \frac{\varrho^3\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{\varrho^2(1-\sin\varphi\cos\varphi)} = \frac{\varrho\sin 2\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)}{(2-\sin 2\varphi)}.$$

При $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 0$ или $\cos\varphi = -\sin\varphi$ выполнено $f = 0$. В остальных случаях, в силу неравенств $|\sin\varphi| \leq 1$, $|\cos\varphi| \leq 1$, $|\cos\varphi + \sin\varphi| \leq 1$ и $|2 - \cos\varphi| \geq 1$, выполнена цепочка неравенств

$$0 \leq f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \leq \varrho\sqrt{2} \to 0 \text{ при } \varrho \to +0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = 0$.

2) В силу того, что предел вида $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует, не будут существовать и повторные пределы. В случае же с пределом по совокупности (воспользовавшись определением предела по Гейне) мы будет иметь произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную. Таким образом, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} = 0$.

Непрерывность функции в точке

Определение 6 *Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если существует $\{x_k\} \subset X$ – последовательность Гейне в точке x_0.*
Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется изолированной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если $x_0 \in X$ и $\exists \delta > 0 \ : \ \mathring{U}_\delta(x_0) \bigcap X = \emptyset$.

Определение 7 *Пусть* x_0 *– предельная точка множества* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Элемент* $A \in \overline{\mathbb{R}} \bigcup \{\infty\}$ *будем называть пределом функции* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 *по множеству* X *и писать* $\lim\limits_{x \in X, x \to x_0} f(x) = A$*, если*
определение по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) \in U_\varepsilon(A);$$

определение по Гейне:
$\forall \{x_n\} \subset X$ *– последовательность Гейне в точке* $x_0 \ \hookrightarrow \ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Определение 8 *Функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *называется непрерывной в точке* $x_0 \in X$ *по множеству* $X \subset \mathbb{R}^n$ *если*
1) точка x_0 *является предельной точкой множества* X *и* $\lim\limits_{x \in X, x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *или*
2) точка x_0 *является изолированной точкой множества* X.

Определение 9 *Пусть* x_0 *– внутренняя точка множества* $X \subset \mathbb{R}^n$ *(то есть* $\exists \delta_0 > 0 \ : \ U_{\delta_0}(x_0) \subset X$*). Функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *называется непрерывной в точке* x_0 *(по совокупности переменных), если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*, то есть*
определение по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x - x_0| < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

определение по Гейне:

$$\forall \{x_k\} \subset U_{\delta_0}(x_0) \ : \ \lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \ \hookrightarrow \ \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Здесь в определении Коши не требуется, что $x \neq x_0$, а в определении Гейне не требуется, что $x_k \neq x_0$, так как при $x = x_0$ выполняется равенство $f(x) = f(x_0)$.

Теорема 2 *Определения непрерывности по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Замечание 3 *Из непрерывности функции* $f(x)$ *по совокупности переменных следует непрерывность* f *по каждой переменной в отдельности.*
Из непрерывности функции $f(x)$ *по каждой переменной в отдельности не следует непрерывность* f *по совокупности переменных.*

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

которая непрерывна в каждой точке по каждой переменной в отдельности, но не является непрерывной в точке $(0,0)$ по совокупности переменных.

Задача 4 *Является ли функция* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

1) непрерывной по x;

2) непрерывной по y;

3) непрерывной

в точке $(0,0)$.

Решение: 1) При $y=0$ выполнено $f(x,0) = 0 = f(0,0)$. Таким образом, функция f непрерывна по переменной x в точке $(0,0)$.
2) В силу симметричности функции f относительно переменных x и y, функция f непрерывна и по переменной y в точке $(0,0)$.
3) Перейдем к полярным координатам и рассмотрим предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Очевидно, что значение следующей функции $\frac{\varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\varrho^2} = \cos\varphi \sin\varphi$ зависит от угла φ. При выборе $\varphi = 0$ выполнено $\lim\limits_{\varrho\to+0} \frac{\varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\varrho^2} = 0$, при выборе $\varphi = \frac{\pi}{4}$ выполнено $\lim\limits_{\varrho\to+0} \frac{\varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi}{\varrho^2} = \frac{1}{2}$. По сути мы выбрали две разные последовательности Гейне, сходящиеся к точке $(0,0)$, пределы функции по которым различны. Таким образом, по совокупности переменных функция f не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Отметим, что при решении пункта 3) мы пользовались переходом к полярным координатам, что оказалось действенным не только при доказательстве существовании предела.

Задача 5 *Найти точки разрыва функция* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 3, & x+y = 0. \end{cases}$

Решение: Заметим, что не на прямой $x+y=0$ функция является непрерывной как композиция непрерывных функций. Причем не на прямой $x+y=0$ функция принимает вид: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$. Несложно увидеть, что $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y) = 3x_0^2$. Таким образом, при $x_0 = \pm 1$ предел функции совпадает со значением в точке $(x_0, -x_0)$, а в остальных случаях отличается. Следовательно, множество точек разрыва данной функции имеет вид: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0,\ x \neq \pm 1\}$.

Непрерывность функции на множестве

Определение 10 *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной на множестве $E \subset X$, если она непрерывна в каждой точке множества E.*

Теорема 3 ***(о непрерывности сложной функции)*** *Пусть заданы множества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и вектор-функции $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$, непрерывные на своих множествах определения. Пусть $f(X) \subset Y$. Тогда сложная вектор-функция $\varphi(x) = g(f(x))$ непрерывна на множестве X.*

Задача 6 *Является ли функция* $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ *непрерывной?*

Решение: Отметим, что при $y \neq 0$ функция f непрерывна как композиция непрерывных функций. Очевидно, что предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0$, как произведение бесконечно малой функции на ограниченную. Таким образом, в точке $(0,0)$ функция f также непрерывна. Однако при $x_0 \neq 0$ предел $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} x\sin\frac{1}{y}$ не существует. Следовательно, функция f не является непрерывной.

Задача 7 *Является ли функция* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos xy}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$ *непрерывной?*

Решение: Отметим, что при $x \neq 0$ функция f непрерывна как композиция непрерывных функций. $\frac{1-\cos(xy)}{x^2} = \frac{2\sin^2(xy)}{x^2}$. Очевидно, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2\sin^2(\frac{xy}{2})}{x^2} = \frac{1}{2}$. Таким образом в точке $(0,1)$ функция f также непрерывна. Однако, в точках вида $(0, y_0)$, где $y_0 \neq 1$ предел будет отличен от $\frac{1}{2}$. Следовательно, функция f не является непрерывной.

Теорема 4 ***(критерий непрерывности)*** *Функция $f\colon X \to Y$ непрерывна на $E \subset X$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(G) \subset X$ тоже является открытым множеством.*

Теорема 5 *Пусть функция $f\colon X \to Y$ непрерывна на компакте $K \subset X$. Тогда $f(K)$ – компакт в Y.*

Задача 8 *Является ли множество $A = \{(x, y, z) \mid e^{x^2+y^2} < 1 + z^2\}$ открытым?*

Решение: Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2} - 1 - z^2$. Она непрерывна на $\mathbb{R}^3$ как композиция непрерывных функций. Тогда по критерию непрерывности множество $A = f^{-1}(-\infty, 0)$ открыто в $\mathbb{R}^3$.

Равномерная непрерывность

Определение 11 *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ \forall x_1, x_2 \in X \ :\ |x_1 - x_2| < \delta \ \hookrightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 6 ***(Кантора)*** *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте X тогда f – равномерно непрерывна на K.*

Задача 9 *Является ли функция $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ равномерно непрерывной на $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \geq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$?*

Решение: Отметим, что множество A ограничено, так как содержится в шаре $B_5(0)$, и замкнуто, в силу нестрогости всех неравенств на переменные. Таким образом, множество A является компактом. Функция f непрерывна на множестве A как композиция непрерывных функций. Следовательно, по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на множестве A.