Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1 *Множество X называется вещественным линейным пространством, если в X определены операции сложения и умножения на вещественное число, удовлетворяющие следующим аксиомам:*

1. $\forall x, y \in X \ \hookrightarrow \ x + y = y + x$;
2. $\forall x, y, z \in X \ \hookrightarrow \ (x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\exists \overline{0} : \ \forall x \in X \ \hookrightarrow \ x + \overline{0} = x$;
4. $\forall x \in X \ \ \exists -x \in X : \ \hookrightarrow \ x + (-x) = \overline{0}$;
5. $\forall x \in X \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $\forall x \in X \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\forall x, y \in X \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
8. $\forall x \in X \ \hookrightarrow \ 1x = x$.

Утверждение 1 *Пространство $\mathbb{R}^n$ является вещественным линейным пространством.*

Доказательство состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются.

Определение 2 *Линейное вещественное пространство X называется евклидовым, если в нем определено скалярное произведение, то есть любым элементам $x, y \in X$ поставлено в соответствие число $(x, y) \in \mathbb{R}$, причем выполняются аксиомы:*

1. $\forall x \in X \ \hookrightarrow \ (x, x) \geq 0$;
2. $\forall x \in X : (x, x) = 0 \ \hookrightarrow \ x = \overline{0}$;
3. $\forall x, y, z \in X \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow \ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
4. $\forall x, y \in X \ \hookrightarrow \ (x, y) = (y, x)$.

Утверждение 2 *Пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, является евклидовым.*

Доказательство состоит в проверке аксиом, которые, очевидно, выполняются.

Определение 3 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется внутренней точкой множества A, если $\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x) \subset A$ (то есть внутренняя точка лежит во множестве с некоторой окрестностью).*
Внутренностью множества A называется множество intA, *состоящее из всех внутренних точек множества A.*
Множество A называется открытым, если все его точки внутренние, то есть $A \subset \mathrm{intA}$. Пустое множество $\emptyset$ по определению считается открытым.

Так как для любого множества A справедливо включение $\mathrm{intA} \subset \mathrm{A}$, то равенство $A = \mathrm{intA}$ выполняется тогда и только тогда, когда множество A открыто.

Определение 4 *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется точкой прикосновения множества A, если $\forall \varepsilon > 0 : \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(x) \bigcap A \neq \emptyset$ (то есть в любой окрестности точки прикосновения найдутся элементы множества).*
Замыканием множества A называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех точек прикосновения множества A.
Множество A называется замкнутым, если любая точка прикосновения A содержится в A, то есть $\overline{A} \subset A$. Пустое множество $\emptyset$ по определению считается замкнутым.

Так как для любого множества A справедливо включение $A \subset \overline{A}$, то равенство $A = \overline{A}$ выполняется тогда и только тогда, когда множество A замкнуто.

Определение 5 *Границей множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{intA}$. Точки множества ∂A называются граничными точками множества A.*

Замечание 1 *Легко заметить, что $\overline{A} = \mathrm{intA} \bigcup \partial\mathrm{A}$.*

Задача 1 *Доказать, что счетное объединение и конечное пересечение открытых множеств есть открытое множество.*

Решение: 1) Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, где A_m – открытое множество $\forall m \in \mathbb{N}$. Выберем точку $a \in A$. Из определения множества A следует, что найдется множество A_k, такое что $a \in A_k$. Тогда a – внутренняя точка множества A_k, то есть $\exists \varepsilon > 0$, такое что $U_\varepsilon(a) \subset A_k$, в силу включений $U_\varepsilon(a) \subset A_k \subset A$ получаем, что a – внутренняя точка множества A. Таким образом, все точки множества A являются внутренними. Следовательно, множество A является открытым.

2) Рассмотрим множество $A = \bigcap\limits_{m=1}^{N} A_m$, где A_m – открытое множество $\forall m \in \overline{1, N}$. Выберем точку $a \in A$. Из определения множества A следует, что $a \in A_m$ $\forall m \in \overline{1, N}$. Тогда, в силу открытости каждого из множеств A_m найдутся такие числа $\varepsilon_m > 0$, что $U_{\varepsilon_m}(a) \subset A_m$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}$. Тогда верны включения $U_\varepsilon(a) \subset A_m$ $\forall m \in \overline{1, N}$. Откуда $U_\varepsilon(a) \subset A$. Следовательно, множество A является открытым.

Замечание 2 *Отметим, что счетное пересечение открытых множеств не обязательно является открытым. Пусть $A_m = \left(0, \frac{1}{m}\right)$. Тогда $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} = \{0\}$. Таким образом, множество A не является открытым. Очевидно, что аналогичный пример можно привести и в $\mathbb{R}^n$.*

Задача 2 *Доказать, что дополнение открытого множества является замкнутым.*

Решение: Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Предположим, что множество B не является замкнутым. Тогда найдется точка x, которая является точкой прикосновения множества B, но не лежит в B. Таким образом, $x \in A$, а значит точка x является внутренней точкой множества A, следовательно $\exists \varepsilon > 0$, такое что $U_\varepsilon(x) \subset A$. Отсюда $U_\varepsilon(x) \bigcap B = \emptyset$. Следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества B. Противоречие.

Замечание 3 *Аналогичным образом доказывается, что дополнение замкнутого множества является открытым.*

Задача 3 *Доказать, что счетное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Решение: 1) Рассмотрим множество $A = \bigcup\limits_{m=1}^{N} A_m$, где A_m – замкнутое множество $\forall m \in \overline{1, N}$. Пусть $B = \mathbb{R}^n \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{N} A_m\right)$. Несложно показать, что $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{N} A_m\right) = \bigcap\limits_{m=1}^{N} \mathbb{R}^n \setminus A_m$. Причем, каждое из множеств $\mathbb{R}^n \setminus A_m$ является открытым, как дополнение к замкнутому. Множество B является открытым, как конечное пересечение открытых множеств.

Отсюда множество A замкнуто, как дополнение к открытому множеству B.
2) Рассмотрим множество $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, где A_m – замкнутое множество $\forall m \in \mathbb{N}$. Пусть $B = \mathbb{R}^n \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \right)$. Несложно показать, что $\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \right) = \bigcup\limits_{m=1}^{N} \mathbb{R}^n \setminus A_m$. Каждое из множеств $\mathbb{R}^n \setminus A_m$ является открытым. Множество B является открытым, как счетное объединение открытых множеств. Отсюда множество A замкнуто, как дополнение к открытому множеству B.

Задача 4 $A \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое* $\Leftrightarrow A \bigcap \partial A = \emptyset$.

Решение: $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое $\Leftrightarrow$ все точки A являются внутренними $\Leftrightarrow \forall a \in A \ \ \exists \varepsilon : \ U_\varepsilon(a) \subset A \Leftrightarrow$ для любой точки множества A найдется окрестность, в которой лежат только точки множества $A \Leftrightarrow$ ни одна точка множества A не является граничной $\Leftrightarrow A \bigcap \partial A = \emptyset$.

Задача 5 $A \subset \mathbb{R}^n$ *– замкнутое* $\Leftrightarrow \partial A \subset A$.

Решение: $A \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое $\Leftrightarrow A = \overline{A}$, причем $\overline{A} = \mathrm{intA} \bigcup \partial \mathrm{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A$ и $\mathrm{intA} \subset \mathrm{A}$, причем второе включение выполнено всегда.

Задача 6 $A \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое,* $B \subset \mathbb{R}^n$ *– замкнутое* $\Rightarrow B \setminus A$ *– замкнутое.*

Решение: Пусть $C = B \setminus A$. Пусть множество C не является замкнутым. Тогда найдется точка x, которая является точкой прикосновения множества , но не лежит в . Либо эта точка лежит в A и в B, либо эта точка не лежит ни в A, ни в B. В первом случае она входит во множество A с некоторой окрестностью, соответственно, не может являться точкой прикосновения множества C. Во втором случае она не является точкой прикосновения множества B, следовательно, найдется окрестность этой точки, не имеющая со множеством B общих точек, соответственно, не может являться точкой прикосновения множества C. Пришли к противоречию. Множество C является замкнутым.