

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)} = \frac{x^7}{8}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $AT : A_1T = 4 : 1$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1 = 5$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K , а вторая касается стороны BC в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \frac{729}{x^4}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \frac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K , а вторая касается стороны AD в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5\left(\frac{x}{8}\right)} = \frac{1024}{x^3}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 485000 таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 485.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $CT : C_1T = 1 : 3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1 = 8$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{7}{b} - |y + b|, \\ x^2 + y^2 + 96 = -a(2y + a) - 20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L , а вторая касается стороны BC в точке F .

а) Найдите радиус окружности Ω_2 , если $AL = \sqrt{2}$, $CF = 2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5(50x)} = x^6.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 267000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 267.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 5$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{6}{a} - |y - a|, \\ x^2 + y^2 + b^2 + 63 = 2(by - 8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F , а вторая касается стороны AD в точке P .

а) Найдите радиус окружности Ω_2 , если $BF = 3\sqrt{2}$, $DP = \sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .