Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Дифференцируемость функции нескольких переменных. Геометрический смысл градиента и дифференциала

Определение 1 *Пусть функция* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *определена в* $U_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n$. *Функция* $f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *если существует вектор* $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|) \text{ при } x \to x^0,$$

где $(A, x - x^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + A_n(x_n - x_n^0)$ *– скалярное произведение векторов* A *и* $x - x^0$, $o(|x - x^0|)$ *– такая функция* $\varphi(x)$, *что* $\lim\limits_{x \to x^0} \frac{\varphi(x)}{|x - x^0|} = 0$.

При этом вектор A *называется градиентом функции* f *в точке* x^0 *и обозначается через* $\mathrm{grad} f(x^0)$.

Итак, функция f *дифференцируема в точке* x^0, *если существует вектор* $\mathrm{grad} f(x^0) \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$f(x) - f(x^0) = (\mathrm{grad} f(x^0), x - x^0) + o(|x - x^0|) \text{ при } x \to x^0.$$

Определение 2 *Дифференциалом функции* f *в точке* x^0 *называется линейная относительно приращений независимых переменных* $x_i - x_i^0$ *функция* $df(x^0) = (\mathrm{grad} f(x^0), x - x^0)$.

Для дифференцируемой в точке x^0 *функции* f *справедливо равенство*

$$f(x) - f(x^0) = \Delta f = df(x^0) + o(|x - x^0|) \text{ при } x \to x^0.$$

Определение 3 *Плоскость вида* $z(x, y) = f(x_0, y_0) + n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0)$ *называется касательной к графику функции двух переменных* $f(x, y)$ *в точке* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, *если она приближает график функции с точностью до* $o(\varrho)$ *при* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, *где* $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, *то есть*

$$f(x, y) - z = o(\varrho) \text{ при } (x, y) \to (x_0, y_0).$$

Теорема 1 ***(о геометрическом смысле градиента и дифференциала)*** *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена в окрестности точки* (x_0, y_0). *Касательная плоскость к графику функции* f *в точке* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *существует тогда и только тогда, когда функция* f *дифференцируема в точке* (x_0, y_0). *Для дифференцируемой функции вектор* $(\mathrm{grad} f(x_0, y_0), -1)$ *является нормальным вектором касательной плоскости, а дифференциал равен приращению аппликаты касательной плоскости:*

$$df(x_0, y_0) = z(x, y) - z(x_0, y_0).$$

Необходимые условия дифференцируемости. Производные по направлению

Теорема 2 ***(первое необходимое условие дифференцируемости)*** *Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x^0 и дифференцируема в этой точке, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0.*

Определение 4 *Производной функции f в точке x^0 по вектору $v \in \mathbb{R}^n$ называется*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}.$$

В частности, если v – единичный вектор (то есть является направлением), то $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ называется производной по направлению.

Задача 1 *Найти производную функции $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M_0(1, 1, 1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где $M(1, 5, 4)$.*

Решение: Решим задачу, пользуясь определением. Точка $x^0 = (1, 1, 1)$, $f(1, 1, 1) = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{1}{\sqrt{1^2+5^2+4^2}}(1, 5, 4)$ – направление, по которому будем брать производную. Значение функции при смещении в данном направлении определяется формулой

$$f(x^0+tv) = \arcsin \frac{1 + \frac{4}{\sqrt{42}}t}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{42}}t\right)^2 + \left(1 + \frac{5}{\sqrt{42}}t\right)^2}} = \arcsin \frac{1 + \frac{4}{\sqrt{42}}t}{\sqrt{2 + \frac{12}{\sqrt{42}}t + \frac{26}{42}t^2}}.$$

Воспользовавшись разложением в ряд Маклорена функции одной переменной, получим:

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(1 + \frac{4}{\sqrt{42}}t\right)\left(1 - \frac{3}{\sqrt{42}}t + o(t)\right)\right) - \frac{\pi}{4}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{42}}t + o(t)\right) - \frac{\pi}{4}}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{42}}t + o(t) - \frac{\pi}{4}}{t} = \frac{1}{\sqrt{42}}.$$

Таким образом, предел функции f по направлению $v = \frac{1}{\sqrt{1^2+5^2+4^2}}(1, 5, 4)$ равен $\frac{1}{\sqrt{42}}$.

Теорема 3 ***(второе необходимое условие дифференцируемости)*** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то производная по любому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ существует и равна скалярному произведению градиента на вектор v:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = (\mathrm{grad} f(x^0), v).$$

Замечание 1 *Из существования производных по всем направлениям (и по всем векторам) функции f в точке x^0 не следует дифференцируемость функции f в точке x^0.*

Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y^2 \neq 0, \\ 0, & x \neq y^2 \text{ или } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Отметим, что для любого вектора $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ найдется положительное число $\delta > 0$, такое что $\forall t \in (0, \delta) \hookrightarrow f(\delta v_1, \delta v_2) = 0$. Таким образом, производная $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ по любому вектору $v \in \mathbb{R}^2$ существует и равна нулю.

Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k, y_k)\} = \left\{\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k, \hat{y}_k)\} = \left\{\left(0, \frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k\to\infty} f(\hat{x}_k, \hat{y}_k),$$

то предел функции f в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует. А значит функция f не является непрерывной в точке $(0,0)$. Следовательно, в силу первого необходимого условия дифференцируемости функция f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Лемма 1 ***(второй геометрический смысл градиента)*** *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{grad} f(x^0) \neq \overline{0}$, то направление $\mathrm{grad} f(x^0)$ является направлением наиболее быстрого возрастания функции f в точке x^0, а направление $-\mathrm{grad} f(x^0)$ является направлением наиболее быстрого убывания функции f в точке x^0. То есть*

$\max\limits_{v \in \mathbb{R}^n : |v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ *достигается на векторе* $v_{\max} = \frac{\mathrm{grad} f(x^0)}{|\mathrm{grad} f(x^0)|}$;

$\min\limits_{v \in \mathbb{R}^n : |v|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ *достигается на векторе* $v_{\min} = -\frac{\mathrm{grad} f(x^0)}{|\mathrm{grad} f(x^0)|}$.

Частные производные

Определение 5 *Частной производной функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется производная функции одной переменной $\varphi(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ в точке x_i^0:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = f'_{x_i}(x^0) = \varphi'(x_i^0) =$$

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n)}{x_i - x_i^0}.$$

Таким образом, чтобы вычислить частную производную функции f по переменной x_i нужно зафиксировать все остальные переменные (при этом получится функция одной переменной x_i), а затем – вычислить производную полученной функции одной переменной.

Задача 2 *Найти частные производные функции* $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

Решение: Воспользовавшись определением, получаем $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{zx^{z-1}}{y^z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx^z}{y^{z+1}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \ln\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^z$.

Лемма 2 ***(о связи частных производных и производных по направлению)*** *Частная производная* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ *существует тогда и только тогда, когда для направлений* $v_i^+ = (0,\ldots,0,+1,0,\ldots,0)$ *и* $v_i^- = (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)$ *(где* ± 1 *стоит на* i*-м месте) производные по направлению* $\frac{\partial f}{\partial v_i^+}(x^0)$ *и* $\frac{\partial f}{\partial v_i^-}(x^0)$ *существуют и* $\frac{\partial f}{\partial v_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial v_i^-}(x^0)$*. При этом* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial v_i^+}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial v_i^-}(x^0)$.

Теорема 4 ***(третье необходимое условие дифференцируемости)*** *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*, то в этой точке все частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ *существуют и совпадают с соответствующими координатами вектора градиента:*

$$\mathrm{grad} f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right).$$

Замечание 2 *Из существования частных производных по всем переменным не следует дифференцируемость, а значит и существование градиента.*

Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y^2 \neq 0, \\ 0, & x \neq y^2 \text{ или } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Обе частные производные в точке $(0,0)$ равны нулю, но, как мы доказали выше, функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Замечание 3 *При помощи данной теоремы и второго необходимого условия можно иначе решить задачу 1.*

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)}} \cdot \frac{zx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)}} \cdot \frac{zy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отсюда находим градиент $\mathrm{grad} f(x^0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. И производную по направлению: $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = (\mathrm{grad} f(x^0), v) = \frac{1}{\sqrt{42}}(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 4) = \frac{1}{\sqrt{42}}$.

Теорема 5 ***(о связи частных производных и дифференциала функции)*** *Если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, то для дифференциала функции f в точке x^0 справедлива формула*

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) dx_i, \text{ где } dx_i = x_i - x_i^0.$$

Достаточные условия дифференцируемости

Теорема 6 *Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ определены в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0.*

Задача 3 *Доказать, что функции недеффиренцируемы в точке* $(0,0)$

1) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$;

2) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$;

3) $f(x,y) = \ln(3 + \sqrt[3]{x^2 y})$

.

Решение: Будем рассматривать функцию

$$\varphi(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из определения следует, что функция f дифференцируема, в точке $(0,0)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0,\ y \to 0} \varphi(x,y) = 0$. Поэтому будем в задаче исследовать данный предел.

1) В силу того, что $f(x,0)=0$ и $f(0,y)=0$, выполнено $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, тогда $\varphi(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k,y_k)\}=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k,\hat{y}_k)\}=\left\{\left(0,\frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k,y_k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0=\lim_{k\to\infty}\varphi(\hat{x}_k,\hat{y}_k),$$

то предел функции φ в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует. Таким образом, функция f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

2) В силу того, что $f(x,0)=x$ и $f(0,y)=y$, выполнено $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, тогда $\varphi(x,y)=\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k,y_k)\}=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k,\hat{y}_k)\}=\left\{\left(0,\frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k,y_k)=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0=\lim_{k\to\infty}\varphi(\hat{x}_k,\hat{y}_k),$$

то предел функции φ в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует. Таким образом, функция f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

3) В силу того, что $f(x,0)=\ln 3$ и $f(0,y)=\ln 3$, выполнено $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, тогда $\varphi(x,y)=\frac{\ln(3+\sqrt[3]{x^2y})-\ln 3}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{3}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Рассмотрим две последовательности: $\{(x_k,y_k)\}=\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ и $\{(\hat{x}_k,\hat{y}_k)\}=\left\{\left(0,\frac{1}{k}\right)\right\}$. Эти две последовательности являются последовательностями Гейне, сходящимися к точке $(0,0)$. При этом:

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k,y_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{k\ln(1+\frac{1}{3k})}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(\hat{x}_k,\hat{y}_k)=0.$$

Таким образом, предел функции φ в точке $(0,0)$ по совокупности переменных не существует. Следовательно, функция f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Определение 6 *Пусть в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Частная производная функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ по переменной x_j в точке x^0 называется частной производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$ или $f''_{x_i x_j}(x^0)$. Частная производная порядка k определяется индукцией по k:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right).$$

Для функции $f(x, y)$ двух переменных можно рассматривать четыре производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ называются смешанными.

Замечание 4 *Смешанные производные могут зависеть от порядка дифференцирования. Рассмотрим функцию*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Найдем ее частные производные:

$$f'_x = \begin{cases} y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} - 2x^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

$$f'_y = \begin{cases} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} - 2y^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $f''_{xy}(0,0) = -1$, а $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Теорема 7 *Пусть обе смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ определены в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.*

Определение 7 *Функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ называется k раз дифференцируемой в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если все частные производные порядка $(k-1)$ функции f определены в окрестности точки x^0 и дифференцируемы в точке x^0. Дифференциал k-го порядка определяется по индукции:*

$$d^k f(x^0) = d(d^{k-1} f)(x^0).$$

Утверждение 1 *Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ является k раз дифференцируемой в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$d^k f(x^0) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} dx_{i_k} \ldots dx_{i_1}.$$

Формула Тейлора

Теорема 8 *Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ является $m+1$ раз дифференцируемой в некоторой δ-окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x^0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^0 + \theta \Delta x),$$

где $\theta = \theta(x) \in (0,1)$, $\Delta x = dx = x - x^0$.

Теорема 9 *Пусть все частные производные функции f до порядка m включительно существуют в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0. Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:*

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + o(|\Delta x|^m), \text{ при } \Delta x = x - x^0 \to 0.$$

Задача 4 *Найти первый и второй дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $(0,1)$ и выписать формулу Тейлора до $o(x^2 + (y-1)^2)$, где $f(x,y) =$* $\ln(1 + y\sin x)$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка функции f в точке $(0,1)$. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\cos x}{1+y\sin x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x}{1+y\sin x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$. Отметим, что находили частные производные первого порядка не только в точке $(0,1)$, но и в ее окрестности, так как они нам понадобятся для вычисления частных производных второго порядка. Таким образом, $df(0,1) = dx$.
Найдем частные производные второго порядка функции f в точке $(0,1)$. Причем будем пользоваться определением, то есть фиксировать все переменные кроме той, по которой будем брать производную

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)'_{x=0} = \left(\frac{-\sin x}{1+\sin x} - \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}\right)_{x=0} = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = (y)'_{y=1} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = \left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)'_{x=0} = \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}\right)_{x=0} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = (0)'_{y=1} = 0.$$

Таким образом $d^2 f(0,1) = -dx^2 + 2dxdy$. Осталось представить функцию f формулой Тейлора

$$f(x,y) = f(0,1) + df + \frac{1}{2}d^2 f + o(x^2 + (y-1)^2) = x - \frac{x^2}{2} + x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2).$$